R 43. 1984 Hr: 4 F2557

43. 1984 Hr: 4

1
TOMUL 43
ian.—febr.
1984

STUDII ȘI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

Consiliul de conducere

Acad. **E. CARAFOLI**, *redactor şef*

Membri:

Acad. **I. ANTON**,
Acad. **ŞT. BĂLAN**,
Acad. **D. DUMITRESCU**,
Acad. **C. IACOB**
Acad. **D. MATEESCU**,
Acad. **R. VOINEA**,
Prof. **C. AVRAM**, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **GH. BUZDUGAN**, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Dr. ing. **N. PATRAULEA**, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **R. C. BOGDAN**,
Prof. **D. PAVELESCU**,
Prof. **R. PRIŞCU**,
Dr. ing. **V. VISARION**,
Dr. ing. **D. PANTAZOPOL**,
Dr. ing. **I. CRIŞAN**,
Prof. **CR. PELECUDI**,
Prof. **TR. DEMIAN**,
Prof. **T. OROVEANU**, *secretar de redacţie.*

Colegiul de redacţie

Acad. **E. CARAFOLI**, *redactor şef*

Membri:

Acad. **I. ANTON**,
Acad. **D. MATEESCU**,
Dr. ing. **I. CRIŞAN**,
Dr. ing. **D. PANTAZOPOL**,
Prof. **TR. DEMIAN**,
Prof. **T. OROVEANU**, *secretar de redacţie.*

Toate comenzile externe pentru lucrările apărute în Editura Academiei R. S. România se vor adresa : ILEXIM, Departamentul export-import carte, Departamentul export-import presă (pentru reviste), 70 517, str. 13 Decembrie nr. 3, P. O. Box 136 — 137, telex 11226, Bucureşti, România. În ţară abonamentele se primesc la oficiile poştale, agenţiile poştale, factorii poştali şi difuzorii de presă din întreprinderi şi instituţii.

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice corespondenţă se trimit pe adresa Comitetului de redacţie al revistei, 70 701 str. Const. Mille nr. 15.

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
79 717, Calea Victoriei nr. 125, sectorul 1, Bucureşti

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 43, nr. 1 ianuarie—februarie 1984

SUMAR

STUDII

ACHIM IONIŢĂ, Influenţa întîrzierii răspunsului asupra stabilităţii avionului relaxat static longitudinal 3

I. CREŢU, AL. D. STAN, Sondă parţial penetrantă a unui strat productiv . . 12

LUCIA POPA, MARIN GHERGU, RADU POPA, Modelarea procesului de vidare la procedeul de turnare în forme vidate 30

MIHAI BUCULEI, DAN BAGNARU, Vibraţii aleatoare la mecanisme R(RRT) cu excitaţie prin bază 39

SORIN DUMITRU MUŞAT, Un procedeu de determinare a modurilor proprii de vibraţie la sistemele vibrante cu deplasări de rigid 46

MIRCEA V. SOARE, PETRE ŞUPROVICI, Asupra unei curbe funiculare . . . 53

IRONIM MARŢIAN, Plăci plane circulare cu deformaţii mari 66

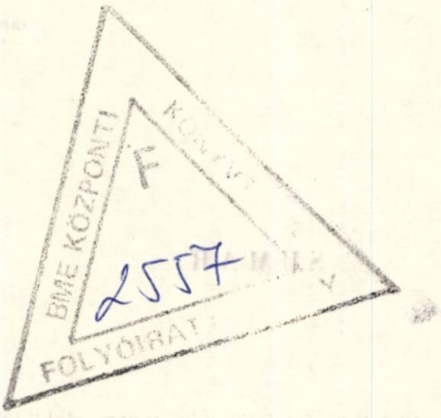
ADRIAN POPOVICI, Consideraţii asupra analizei seismice tridimensionale a platformelor marine template 82

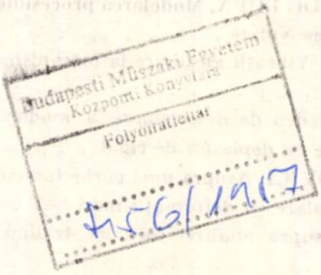
NOTE

GEORGE PETRESCU, DAN ILINCIOIU, Eforturi în sisteme de bare concurente datorate inexactităţilor de execuţie 94

RECENZII 99

1989


BME KÖZPONTI
KÖNYVTÁR
F
2557
FOLYÓIRAT


Budapesti Műszaki Egyetem
Központi Könyvtár
Folyóirattár
F 56/1917

1848

INFLUENȚA ÎNTÎRZIERII RĂSPUNSULUI ASUPRA STABILITĂȚII AVIONULUI RELAXAT STATIC LONGITUDINAL

de ACHIM IONIȚĂ

INCREST, București

Se studiază stabilitatea mișcării avionului în cazul comenzilor ideale și cînd timpul de răspuns este diferit de zero. Prin aplicarea metodei descompunerii—D, și a criteriului algebric de stabilitate pe modelul mișcării comandate, se constată că întîrzierea admisibilă descrește cu creșterea reacțiilor negative sau cu creșterea instabilității statice. Aprecierile calitative sînt urmate de o aplicație numerică.

NOTAȚII

V — viteza de referință (m/s),
W — greutatea de referință (kgf),
I_y — momentul de inerție în jurul axei Oy de referință a avionului (kgfms^2),
ρ — densitatea aerului (kg/m^3),
c — coarda medie aerodinamică (m),
S — suprafața de referință (m^2),
t^* — unitatea dimensională pentru timp (timp aerodinamic) : $c/2V$,
μ_1 — masa adimensională : $2W/\rho gSc$,
i_B — momentul de inerție adimensional, longitudinal : $8I_y/\rho Sc^3$,
$C_{L\alpha}$ — panta curbei de portanță a avionului,
$C_{m\alpha}$ — derivata momentului de tangaj în raport cu α (coeficientul de stabilitate statică longitudinală),
C_{mq} — derivata momentului de tangaj în raport cu q,
$C_{m\alpha}$ — derivata momentului de tangaj în raport cu α,
α — incidența de referință,
q — viteza unghiulară de tangaj,
η — bracajul de comandă al stabilizatorului,
θ — atitudinea longitudinală a avionului,
ζ — amortizarea redusă,
ω — frecvența naturală neamortizată,
K_s — marginea de stabilitate statică,
τ — întîrzierea,
λ — rădăcină a ecuației caracteristice
Δ — scris la stînga unui simbol indică după caz o deviație indusă de o perturbație sau o variabilă de comandă,
Λ — scris deasupra unui simbol indică o mărime adimensională.

St. Cerc. Mec. Apl., Tom 43, Nr. 1, 1984, P. 3—11

Devine generală tendința care reclamă integrarea proiectării sistemului de comandă în ansamblul avionului începînd de la stadiul preliminar al alegerii configurației. Se acceptă aprioric o slăbire a cerințelor de stabilitate în avantajul satisfacerii cerințelor privind performanțele avionului. În cadrul problemelor referitoare la sistemul de stabilizare, un rol esențial îl joacă relaxarea statică longitudinală.

Nu fac obiectul prezentului referat avantajele care se obțin în urma modificării marginii statice a avionului.

În cele ce urmează se va recurge întîi la modelul cu comenzi ideale (ipoteza că timpul de răspuns este neglijabil), în continuare urmărindu-se efectul întîrzierii răspunsului asupra stabilității zborului comandat precum și unele limite de valabilitate ale sistemului liniar ales.

Astfel, devine necesar să se stabilească dacă concluziile trase prin analiza soluțiilor sistemului cu comenzi ideale se poate extinde și asupra sistemului cu întîrzieri și anume pînă la ce valori ale întîrzierii τ.

Se vor determina reacțiile negative ale sistemului de stabilizare presupunînd o comandă ideală, urmărind apoi o apreciere a stabilizării artificiale în cazul unor întîrzieri oarecare.

În final, pe o aplicație numerică, se vor trage unele concluzii privind mărimea întîrzierii în raport cu următorii parametrii : marginea statică și frecvența naturală neamortizată.

1. STABILIZAREA ARTIFICIALĂ ÎN CAZUL COMENZII IDEALE

Fie

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax + Bu \tag{1}$$

sistemul de ecuații diferențiale ordinare care descrie mișcarea avionului ca sistem de comandă (zborul comandat), cu x vector coloană n dimensional reprezentînd variabilele de stare, u vectorul, m dimensional al variabilelor de comandă, A matricea $n \times n$ (matricea sistemului liber) și B o matrice $n \times m$ de comandă. Legătura inversă sau feedbackul este definită de $m \times n$ matricea K,

$$u = Kx,$$

care trebuie determinată astfel încît sistemul cu feedback să satisfacă condițiile care derivă din prescripțiile regulamentare adoptate. De obicei aceste prescripții definesc domenii de comportare și nu impun o anumită comportare particulară (domeniile corespund unui număr oarecare de inegalități impuse unor mărimi de testare care definesc calitățile cerute). Aici, ca mărimi de testare, se vor folosi coeficienții ecuației caracteristice ai sistemului cu feedback,

$$|A + BK - \lambda I| = 0, \tag{2}$$

unde I este matricea unitate.

Pe baza tehnicii de deplasare a polilor (pole shifting), determinarea matricei K va reveni la rezolvare a unui sistem de ecuații pentru care coeficienții ecuației caracteristice ai sistemului (1) are valori date. În cazul nostru sistemul de ecuații este unic determinat.

Se presupune că pilotul (sau o instalație automată) reușește să mențină deviațiile induse lente ale mișcării $c \cdot g$. (în particular, ale vitezei și pantei traiectoriei) în limite admisibile.

Sînt atunci îndeplinite condițiile de aplicabilitate ale teoriei mișcărilor parțial comandate pentru acest caz de constrîngere (intervenția stabilizatoare a comenzii declanșată de apariția unei perturbații încetează în momentul anulării deviației controlate $(\Delta\hat{V}, \Delta\theta)$ și $\lim_{\hat{t}\to\infty} \Delta\hat{V}(\hat{t}) = 0$, $\lim_{\hat{t}\to\infty} \Delta\theta(\hat{t}) = 0$ (vezi [1] 3.4.4.).

Matricea A din sistemul (1), corespunzătoare ecuațiilor adimensionale ale mișcării perturbatoare longitudinale va fi dată de sistemul :

$$\Delta\dot{\hat{\alpha}} = a_{22}\Delta\alpha + \Delta\hat{q},$$

$$\Delta\dot{\hat{q}} = a_{42}\Delta\alpha + a_{44}\Delta\hat{q}, \tag{3}$$

unde

$$a_{22} = -\frac{1}{2\mu_1} C_{L_\alpha},$$

$$a_{42} = \frac{1}{i_B}\left(C_{m_\alpha} - \frac{1}{2\mu_1} C_{L_\alpha} C_{m_{\dot{\alpha}}}\right), \tag{4}$$

$$a_{44} = \frac{1}{i_B}(C_{m_q} + C_{m_{\dot{\alpha}}}).$$

Singurul element care depinde de coeficientul de stabilitate statică, C_{m_α}, este a_{42}. S-a presupus $C_{m_\alpha} = -K_s C_{L_\alpha}$ (în cazul relaxării $K_s < 0$, adică $h > h_n$).

Modelul mișcării parțial comandate ține cont că efectul principal al deficiențelor de stabilitate statică vizează frecvența oscilațiilor rapide (instabilitatea statică duce la pierderea caracterului oscilator al acestui mod care degenerează în două moduri aperiodice, dintre care unul poate fi divergent).

S-a presupus pentru stabilizare o lege de comandă în η de forma :

$$\Delta\eta = K_\alpha\, \Delta\alpha + K_q \Delta\hat{q}, \tag{5}$$

K_α, K_q se calculează din egalitatea :

$$\begin{vmatrix} a_{22} - \lambda & 1 \\ a_{42} + kK_\alpha & a_{44} + kK_q - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\bar{\zeta}\hat{\omega}\lambda + \hat{\omega}^2.$$

Va rezulta pentru mărimile de testare impuse ($\overline{\zeta}$, $\hat{\omega}$) reacțiile negative :

$$K_q = -\frac{1}{k}(a_{22} + a_{44} + 2\overline{\zeta}\hat{\omega}),$$
$$K_\alpha = -\frac{1}{k}[(a_{42} + a_{22}(a_{22} + 12\overline{\zeta}\hat{\omega}) + \hat{\omega}^2], \tag{6}$$

cu coeficientul k, constant.

2. STABILIZAREA ARTIFICIALĂ ÎN CAZUL ÎNTÎRZIERILOR OARECARE

În continuare se consideră că timpul de răspuns al comenzii este diferit de zero, urmărindu-se efectul ei asupra eficienței stabilizării. Pentru modelarea matematică a mișcării perturbate cu întîrziere în cazul mișcării de bază staționare se recurge la un sistem liniar omogen de forma :

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Gx(t - \tau), \tag{7}$$

cu A și G matrice constante de aceeași dimensiune.

S-a făcut ipoteza că momentul de corecție longitudinal nu va corespunde momentului de timp t pentru care sînt scrise variabilele și derivatele respective ce caracterizează mișcarea aparatului, ci unui moment anterior $t - \tau$, τ reprezentînd întîrzierea constantă a comenzii.

Condiția necesară și suficientă ca sistemul (7) să fie asimptotic stabil este ca ecuația caracteristică

$$|A + Ge^{-\tau\lambda} - I\lambda| = 0 \tag{8}$$

să aibă toate rădăcinile în semiplanul stîng.

Ecuația caracteristică a sistemului cu întîrziere este un polinom exponențial care, pentru modelul nostru, are forma :

$$F(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2 + (b_1\lambda + b_2)e^{-\tau\lambda}. \tag{9}$$

S-a notat

$$a_1 = \frac{1}{2\mu_1} C_{L_\alpha} - \frac{1}{i_B}(C_{m_q} + C_{m_{\dot{\alpha}}}),$$
$$a_2 = \frac{C_{L_\alpha}}{i_B}\left(K_\rho - \frac{1}{2\mu_1} C_{m_q}\right), \tag{10}$$
$$b_1 = 2\overline{\zeta}\hat{\omega} - a_1;\ b_2 = \hat{\omega}^2 - a_2,\ \mu = \frac{b_2}{b_1}.$$

Evaluarea întîrzierilor admisibile în funcţie de parametrul K_s se va face prin două metode:

— delimitarea domeniului de stabilitate în spaţiul parametrilor (metoda descompunerii, D),

— cu criteriul algebric de stabilitate,

şi se vor compara rezultatele.

a) METODA DESCOMPUNERII D

Considerînd mărimile λ_i ca funcţii ale parametrilor sistemului, inegalităţile

$$\operatorname{Re} \lambda_i < 0$$

definesc domenii de stabilitate asimptotică uniformă din hiperspaţiu acestor parametrii. Frontiera domeniului va fi formată evident din totalitatea punctelor hiperspaţiului în care cel puţin o rădăcină caracteristică se anulează. Frontiera este descrisă de ecuaţiile parametrice:

$$\operatorname{Re} F(\lambda, p_1, p_2, \ldots, p_m) = 0, \tag{11}$$

$$\operatorname{Im} F(\lambda, p_1, p_2, \ldots, p_m) = 0,$$

unde $F(\lambda, p_1, p_2, \ldots, p_m)$ este cvasipolinomul caracteristic. Practic, frontiera domeniului de stabilitate asimptotică se construieşte pe baza ecuaţiilor (11).

Considerînd că

$$\sigma = \operatorname{Re}\lambda, \ \omega = \operatorname{Im}\lambda,$$

atunci

$$\operatorname{Re} F = \sigma^2 - \omega^2 - a_1\sigma + a_2 + b_1 e^{\sigma}[(\mu - \sigma)\cos\tau\omega + \omega\sin\tau\omega] = 0,$$

$$\operatorname{Im} F = 2\sigma\omega - a_1\omega + b_1 e^{\sigma}[\omega\cos\tau\omega - (\mu - \sigma)\sin\tau\omega] = 0. \tag{12}$$

Frontiera este imaginea în spaţiul parametrilor a axei imaginare din planul $(\sigma, \omega)(\operatorname{Re}\lambda = 0)$.

Ecuaţiile parametrice (12) devin pentru $\sigma = 0$

$$-\omega^2 + a_2 - a_1(\mu\cos\tau\omega + \omega\sin\tau\omega) = 0,$$

$$\omega - (\omega\cos\tau\omega - \mu\sin\tau\omega) = 0, \tag{13}$$

cu $b_1 = -a_1$ şi $\mu_0 = \dfrac{a_2 - \hat{\omega}^2}{a_1}$.

Presupunînd $\sin\tau\omega$, $\cos\tau\omega$ necunoscute ale sistemului (13), se ajunge prin substituție la ecuația în ω^2:

$$\left(\omega^2 + \frac{a_2 - \omega^2}{a_1}\mu_0\right)^2 + \omega^2\left(\mu_0 - \frac{a_3 - \omega^2}{a_1}\right) = (\omega^2 + \mu_0^2)^2.$$

Se face schimbarea de variabilă:

$$\overline{\mu} = \frac{a_2 - \omega^2}{a_1},$$

și, dezvoltînd în raport cu $\overline{\mu}$, se obține ecuația

$$\overline{\mu}^3 - \delta\overline{\mu}^2 - \mu_0^2\overline{\mu} + \delta\mu_0^2 = 0,$$

unde

$$\delta = \frac{a_2 + \mu_0^2}{a_1}.$$

Rezolvînd, se obține pentru ω șase rădăcini:

$$\omega_{1,2} = \pm i\frac{a_2 - \hat{\omega}^2}{a_1}; \quad \omega_{3,4} = \pm\sqrt{2a_2 - \hat{\omega}^2},$$

$$\omega_{5,6} = \pm\hat{\omega}.$$

Acestea sînt frecvențele la care ambele relații ar putea fi îndeplinite. Pentru $\tau > 0$, $\tau(\omega_i)$ $i = 3, 4, 5$ reprezintă granițe ale domeniului de stabilitate (la un $\hat{\omega}$ dat). Parametrii considerați vor fi τ și K_s. Pentru un ω dat, frontiera va indica valorile admisibile din punctul de vedere al stabilității zborului, ale întîrzierii în funcție de k_ϱ, $\hat{\omega}$ care caracterizează reacțiile inverse k_q, k_α.

Forma funcției $\tau(K_s)$ este dată de relația

$$\tau = \frac{1}{\omega}\arcsin\frac{\omega}{\omega^2 + \mu_0^2}\frac{\hat{\omega}^2 - \omega^2}{a_1}. \tag{14}$$

Dreapta $\hat{\tau} = 0$ (fig. 1) corespunde cazului comenzilor ideale și face parte din spațiul parametrilor.

Se poate observa că pentru valori mari negative ale lui K_s întîrzierea admisibilă tinde către zero.

În aplicațiile practice se impune ca $\mathrm{Re}\lambda \neq 0$, dat.

Datorită complexității ecuațiilor parametrice este dificil să se tragă concluzii din interpretarea lor analitică. O reprezentare grafică devine mai sugestivă. Prin eliminarea lui $b_1 e^\sigma$ se obține o relație similară cu (14):

$$\tau = \frac{1}{\omega}\operatorname{arc\,tg}\frac{3\sigma_0 - \omega^2 + a_2 - (a_1 + 2\sigma_0)\mu}{(\sigma_0^2 - \omega^2 - a_1\sigma_0 + a_2)\mu + 3\sigma_0\omega^2 + a_1\omega^2 - \sigma_0^2 a_1 - \sigma_0 a_2}, \tag{15}$$

$$\tau = \tau(K_s\,\hat{\omega}, \overline{\zeta}).$$

Funcția τ definește o infinitate de curbe, unele trecînd prin origine. Semiaxa $K_s < 0$ face parte din frontiera de stabilitate asimptotică (fig. 2).

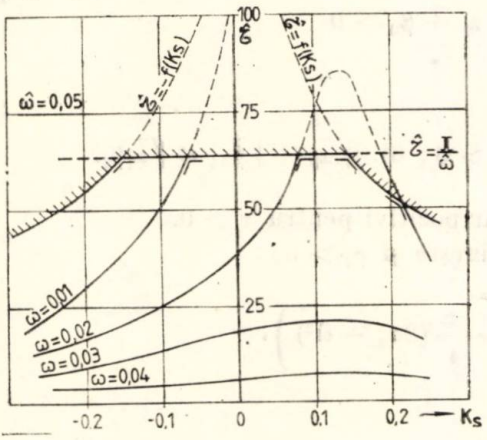


Fig. 1

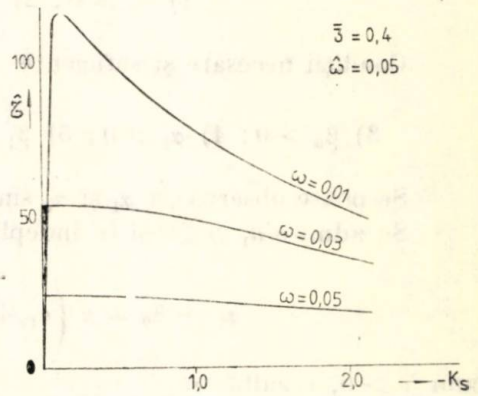


Fig. 2

b) CRITERIU ALGEBRIC DE STABILITATE

Criteriul Routh-Hurwitz, care asigură condițiile necesare și suficiente pentru ca rădăcinile unui polinom algebric să se afle în semiplanul stîng, constă dintr-un număr finit de inegalități algebrice pe care trebuie să le verifice coeficienții polinomului.

Deoarece polinoamele exponențiale depind de un număr finit de parametri (coeficienți și exponenți), se ajunge la un criteriu similar exprimat tot printr-un număr finit de inegalități [2], unele dintre condiții fiind relații transcedente între coeficienți.

Ecuația exponențială (9) se aduce, printr-o schimbare de variabilă convenabilă (care să pună în evidență întîrzierea τ)

$$\frac{\tau}{2}\lambda = Z + \varepsilon,$$

la forma

$$(Z^2 + \alpha_1 Z + \alpha_0)e^{2\varepsilon}\,\mathrm{ch}Z + (Z^2 + \beta_1 Z + \beta_0)\,\mathrm{sh}Z = 0, \qquad (16)$$

unde Z este noua variabilă complexă (cu ε real oricît de mic).
S-a notat :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\alpha_1 = \tau\bar{\zeta}\hat{\omega}\,;\ \lim_{\varepsilon\to 0}\beta_1 = \tau(a_1 - \bar{\zeta}\hat{\omega}),$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\alpha_0 = \frac{\tau}{2}\left(2\bar{\zeta}\hat{\omega} + \frac{\tau}{2}\hat{\omega}^2\right),$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\beta_0 = \frac{\tau}{2}\left[2(a_1 - \bar{\zeta}\hat{\omega}) + \frac{\tau}{2}(2a_2 - \hat{\omega}^2)\right].$$

După Cebotarev și Meiman, condițiile pentru ca polinomul exponențial (16) să aibă rădăcinile λ_i în semiplanul stîng sînt :
Condiții necesare

$$1)\ \alpha_0 > 0\ ;\ 2)\ \alpha_1 + \beta_0 > 0.$$

Condiții necesare și suficiente

$$3)\ \beta_0 > 0\ ;\ 4)\ \alpha_1 > 0\ ;\ 5)\ \beta_1 > 0\ ;\ 6)\ |\sqrt{\alpha_0} - \sqrt{\beta_0}| \leqslant \sqrt{\alpha_1\beta_1}.$$

Se poate observa că α_1 și α_0 sînt pozitivi pentru $\tau > 0$.
Se admite $a_1 > \overline{\zeta}\hat{\omega}$ și se îndeplinește și $\beta_1 > 0$,

$$\alpha_1 + \beta_0 = \tau\left(a_1 + \frac{\tau}{4}(2a_2 - \hat{\omega}^2)\right),$$

cum $\tau > 0$, rezultă

$$\tau < \frac{4\,a_1}{\hat{\omega}^2 - 2a_2}. \tag{17}$$

Din $\beta > 0$, obținem

$$\frac{\tau}{2}\left[2(a_1 - \overline{\zeta}\hat{\omega}) + \frac{\tau}{2}(2a_2 - \zeta\hat{\omega}^2)\right] > 0,$$

deci

$$\tau < \frac{2(a_1 - \overline{\zeta}\hat{\omega})}{\overline{\zeta}\hat{\omega}^2 - 2a_2}. \tag{18}$$

Inegalitatea (6) se reduce la

$$\sqrt{1 + \frac{2a_2}{a_1 - \overline{\zeta}\hat{\omega}}}\ \tau + \sqrt{\overline{\zeta}\hat{\omega}\tau} \geqslant \sqrt{\frac{\overline{\zeta}\hat{\omega}}{a_1 - \overline{\zeta}\hat{\omega}}}$$

și este îndeplinită pentru domeniul dat al valorilor lui τ, $\overline{\zeta}$, ω, K_s.
Din relațiile 17 și 18 se constată că la accentuarea instabilității statice, deci creșterea lui K_s, întîrzierea admisibilă se micșorează.

Aplicație numerică

Ca exemplu s-a considerat un avion cu următoarele date :

$S = 25\ \text{m}^2$; $c = 3\ \text{m}$; $W = 10\,000\ \text{kgf}$; $I_y = 40\,000\ \text{kgf/ms}^2$,

$V = 200\ \text{m/s}$; $\rho = 0{,}125\ \text{kgfs}^2/\text{m}^4$; $C_{L_\alpha} = 3{,}5$; $C_{m_q} = -6{,}0$; $C_{m_{\dot{\alpha}}} = -3{,}0$.

Prescripţiile din [3] date pentru parametrii $\hat{\omega}$, $\overline{\zeta}$, care, împreună cu parametrii K_s, definesc mărimea reacţiilor negative K_q şi K_α, au forma unor inegalităţi :

$$0{,}35 \leqslant \overline{\zeta} \leqslant 1{,}3\,;\ 0{,}27 \leqslant \delta_0\hat{\omega} \leqslant 1{,}86,$$

unde

$$\delta_0 = \frac{1}{\sqrt{\rho S C_{L_\alpha}}}\sqrt{\frac{8W}{Sc^2}}.$$

3. CONCLUZII

Prin aplicarea celor două metode s-a ajuns la concluzii similare şi anume că întîrzierea admisibilă descreşte odată cu mărirea instabilităţii statice (această creştere se traduce de fapt prin creşterea reacţiilor negative). Din imagini se constată că odată cu creşterea frecvenţei neamortizate ω, frontiera de stabilitate tinde spre dreapta, $\hat{\tau} = 0$ (fig. 1, 2).

Pentru o evaluare mai concludentă a efectului întîrzierii se poate repeta operaţia pentru un număr mai mare de valori date parametrilor $\hat{\omega}$, $\overline{\zeta}$. Totuşi, concluzia pentru variaţia lui K_s la un $\hat{\omega}$, $\overline{\zeta}$ arbitrar fixaţi pare suficientă pentru a avea o imagine calitativă asupra fenomenului. Pentru calcule necesare proiectării este recomandat a se recurge la modele mai complexe decît cel reprezentat de (3).

Primită la redacţie la 25 mai 1983

REFERINŢE

1. T. HACKER, *Stabilitate şi comandă în teoria zborului*, Edit. Academiei R. S. România, 1968.
2. МЕЙМАН Н.Н., ГЕБОТАРЕВ Н.Г., *Проблема Рауса—Гурвица для полиномов и целых функций*, Тр. Матем. ин-та им. Стеклова **26**(1949).
3. MIL—F—8785 (ASG) Military Specification, *Flying Qualities of Piloted Airplanes*.

SONDĂ PARȚIAL PENETRANTĂ A UNUI STRAT PRODUCTIV

de I. CREȚU, AL. D. STAN

Institutul de petrol și gaze, Ploiești

În lucrare se stabilește, pe o cale mult mai simplă decît aceea existentă în literatura de specialitate, debitul unei sonde imperfecte după gradul de deschidere. Rezultatul obținut este cu atît mai util cu cît s-a considerat că mișcarea fluidelor către sonda parțial penetrantă este mai apropiată de realitate.

Tot în lucrare, s-a stabilit și relația de calcul pentru debitul pătruns în sondă prin talpa acesteia considerată permeabilă.

S-a analizat și situația cînd o sondă imperfectă după gradul de deschidere produce din două strate cu permeabilități diferite.

În practica de șantier se întîmplă frecvent ca o sondă să penetreze parțial un strat productiv, sonda fiind denumită ca imperfectă după gradul de deschidere a stratului. În literatura de specialitate relația cea mai cunoscută de calcul pentru debitul unei astfel de sonde este aceea a lui M. Muskat [1]. Această relație a fost obținută cu ajutorul surselor imagine. Debitul sondei parțial penetrante mai poate fi calculat și cu relația obținută de J. Kozeny. Dacă se notează cu δ_M și δ_K coeficienții de imperfecție definiți ca raport între debitul sondei imperfecte, calculat cu relația M. Muskat și, respectiv, J. Kozeny, și debitul sondei perfecte, aceștia au valorile

$$\delta_M = \frac{\ln \dfrac{r_c}{r_s}}{\dfrac{1}{2\bar{h}}\left[2\ln\dfrac{4h}{r_s} - f(\bar{h})\right] - \ln\dfrac{4h}{r_c}}, \tag{1}$$

$$\delta_K = \bar{h}\left(1 + 7\sqrt{\frac{r_s}{2h\bar{h}}}\cos\frac{\pi\bar{h}}{2}\right), \tag{2}$$

unde $\bar{h} = \dfrac{b}{h}$, iar celelalte elemente sînt prezentate în figura 1. Funcția $f(\bar{h})$ are expresia

$$f(\bar{h}) = \ln \frac{\Gamma(0{,}875\,\bar{h})\,\Gamma(0{,}125\,\bar{h})}{\Gamma(1-0{,}875\,\bar{h})\,\Gamma(1-0{,}125\,\bar{h})}. \tag{3}$$

Funcția euleriană de speța a doua pentru argumentul x se definește cu relația $\Gamma(x) = \int_0^\infty y^{x-1}\,e^{-y}\,dy\,;\ x>0.$

Valorile extreme ale funcției $f(\bar{h})$ pentru cazurile limită ale lui $\bar{h}$ sînt

$$\lim_{\bar{h}\to 0} f(\bar{h}) = \infty, \tag{4'}$$

St. Cerc. Mec. Apl. Tom 43, Nr. 1, 1984, P. 12–29

$$\lim_{\bar{h}\to 1} f(\bar{h}) = \infty. \tag{4''}$$

Aceste valori ale lui $f(\bar{h})$ fac ca pentru $\bar{h} = 1$ debitul sondei să fie același cu al unei sonde perfecte, iar pentru $\bar{h} = 0$ debitul filtrat în sondă să fie nul. Ultima concluzie este valabilă dacă se admite talpa sondei impermeabilă, lucru ce corespunde întru totul cu realitatea din practica de șantier.

Pe altă parte, impermeabilitatea talpei nu poate fi admisă atît timp cît sonda, indiferent de gradul de imperfecțiune după gradul de deschidere al stratului productiv, este considerată ca perfectă după modul de deschidere a stratului.

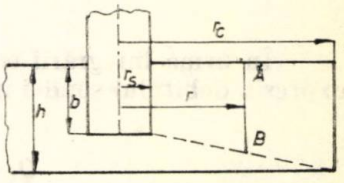


Fig. 1

Datorită acestui ultim aspect semnalat se consideră că atît relația lui Muskat, cît și aceea a lui Kozeny sînt limitate. Relația propusă în lucrarea noastră elimină limitele relațiilor amintite.

1. RELAȚIA PROPUSĂ PENTRU DEBITUL SONDEI IMPERFECTE

Se poate admite că pe cilindrul de rază r, figura 1, viteza de filtrare v are expresia

$$v = \frac{Q_i}{2\pi r \overline{AB}}, \tag{5}$$

Q_i fiind debitul sondei imperfecte, iar distanța $\overline{AB}$ are expresia

$$\overline{AB} = h\left[\bar{h} + (1-\bar{h})\frac{r-r_s}{r_c-r_s}\right]. \tag{6}$$

Pentru simplificarea calculelor, se admite că debitul sondei imperfecte este dat de debitul care pătrunde prin aria laterală a cilindrului de rază r cu generatoare $\overline{AB}$ și debitul care se filtrează prin talpa sondei.

Considerînd că pentru viteza de filtrare se poate aplica relația lui Darcy,

$$v = \frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r}, \tag{7}$$

avînd în vedere și expresia (6), se obține

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\mu Q_i}{2\pi k h r\left[\bar{h} + (1-\bar{h})\dfrac{r-r_s}{r_c-r_s}\right]}, \tag{8}$$

k fiind permeabilitatea stratului productiv, iar μ viscozitatea dinamică a fluidului.

Condițiile limită ale ecuației (8) sînt

$$\begin{aligned} &\text{la} \quad r = r_s, \quad p = p_s, \\ &\text{la} \quad r = r_c, \quad p = p_c. \end{aligned} \tag{9}$$

În urma integrării ecuației (8) cu condițiile limită admise, se obține expresia debitului sondei imperfecte după gradul de deschidere,

$$Q_i = \frac{2\pi k h (p_c - p_s)}{\mu \dfrac{r_c - r_s}{\bar{h} r_c - r_s} \ln \bar{h} \dfrac{r_c}{r_s}}. \tag{10}$$

Se observă cu ușurință că pentru $\bar{h} = 1$, debitul Q_i devine egal cu acela pentru o sondă perfectă, iar pentru $\bar{h} = 0$ se constată

$$\lim_{\bar{h} \to 0} \frac{\bar{h} r_c - r_s}{\ln \bar{h} \dfrac{r_c}{r_s}} = 0, \tag{11}$$

ceea ce înseamnă că atunci cînd sonda este complet imperfectă după gradul de deschidere a stratului, talpa fiind impermeabilă, ca și la relațiile stabilite de Muskat sau Kozeny, debitul de fluid pătruns în sondă este nul.

În tabelul 1 sînt calculați pentru $\bar{h} = 0\,;\, 0{,}25\,;\, 0{,}5\,;\, 0{,}75$ și 1 și următoarele date numerice: $r_s = 0{,}1$ m, $h = 40$ m, $r_c = 100$ m, coeficienții δ_M, δ_K cu ajutorul relațiilor (1) și (2) precum și coeficientul δ_e definit ca raport între debitul sondei calculat cu formula stabilită (10) și debitul sondei perfecte,

$$\delta_e = \frac{\ln \dfrac{r_c}{r_s}}{\dfrac{r_c - r_s}{\bar{h} r_c - r_s} \ln \bar{h} \dfrac{r_c}{r_s}}. \tag{12}$$

Se observă că cele mai mici valori ale coeficientului de imperfecțiune se obțin dacă se utilizează relația de calcul stabilită în această lucrare și cele mai mari cu relația lui J. Kozeny.

Tabelul 1

$\bar{h}$	0	0,25	0,50	0,75	1,00
δ_M	0	0,348155	0,612091	0,832229	1,0000
δ_K	0	0,364324	0,623743	0,832020	1,0000
δ_e	0	0,311827	0,555214	0,782332	1,0000

În tabelul 2 se redau valorile coeficienților δ_M, δ_K și δ_e pentru $\bar{h} = 0{,}25$ și 0,75 și $r_c/r_s = 100; 1000$ și 2000.

Tabelul 2

$\bar{h}$	0,25			0,75		
r_c/r_s	100	1000	2000	100	1000	2000
δ_M	0,344194	0,440485	0,464168	0,831910	0,881288	0,890933
δ_K	0,478648	0,478648	0,478648	0,981989	0,981989	0,981989
δ_e	0,346834	0,311829	0,305308	0,797280	0,782330	0,779372

Se observă că valorile coeficienților de imperfecție calculați cu cele trei relații sînt diferiți. Coeficientul calculat cu relația lui Kozeny nu depinde de raportul r_c/r_s.

Coeficienții de imperfecție δ_M și δ_K au tendințe contrare de variație în funcție de parametrul r_c/r_s; δ_M crește pe măsură ce se mărește raportul r_c/r_s, pe cînd δ_e scade la o valoare constantă a lui $\bar{h}$.

Pentru unele valori limită ale lui r_c/r_s și $\bar{h}$ se pot face comparații între coeficienții de imperfecție δ_M și δ_e.

Astfel, de exemplu, pentru orice valoare a lui $\bar{h}$ și un raport r_c/r_s foarte mare se obține

$$\lim_{r_c/r_s \to \infty} \delta_M = 1. \tag{13}$$

Această relație s-a obținut după ce s-a aplicat regula lui l'Hopital formulei (1). Tot pentru o valoare foarte mare a raportului r_c/r_s, coeficientul de imperfecție, calculat cu relația stabilită (12), după ce se aplică de două ori regula lui l'Hopital, va fi

$$\lim_{r_c/r_s \to \infty} \delta_e = \bar{h}. \tag{14}$$

Cu toate că în practica de șantier nu se poate întîmpla ca raza conturului r_c să fie egală cu aceea a sondei r_s, noi vom compara și pentru acest caz valorile coeficientului de imperfecțiune calculat cu relația lui M. Muskat și formula stabilită în lucrare. Astfel, pentru raportul r_c/r_s apropiat de unitate se găsește

$$\lim_{r_c/r_s \to 1} \delta_M = 0, \tag{15}$$

iar în urma aplicării regulii lui l'Hopital relației (12), se obține

$$\lim_{r_c/r_s \to 1} \delta_e = \frac{\bar{h} - 1}{\ln \bar{h}}. \tag{16}$$

În funcție de valorile lui $\bar{h}$, în tabelul 3 se redau valorile raportului $(\bar{h}-1)/\ln \bar{h}$ pentru acest caz limită.

Tabelul 3

$\bar{h}$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
δ_e	0	0,4971	0,6548	0,7830	0,8963	1
$(\bar{h}-\delta_e)/\bar{h}$	$-\infty$	−1,4855	0,6370	0,3060	0,1203	0

Este evident că deși nu poate fi întîlnit în practică un asemenea caz ca $\frac{r_c}{r_s}=1$, totuși diferența existentă între cele două relații, a lui M. Muskat și aceea stabilită, formula lui Kozeny este independentă de raportul r_c/r_s, dovedește plusul de valabilitate al ultimei. Acest lucru se arată prin aceea că pentru $\frac{r_c}{r_s}=1$ și sonda imperfectă poate fi admisă ca o sondă perfectă cu grosimea stratului egală cu b. La aceeași viteză de filtrare prin peretele sondei raportul dintre cele două debite va fi

$$\delta'_e=\bar{h}. \tag{17}$$

Tot în tabelul 3 se prezintă raportul dintre $(\bar{h}-\delta_e)/\bar{h}$, acest termen ar reprezenta eroarea relativă care se introduce la calculul lui δ_e, pentru situația limită, $\frac{r_c}{r_s}=1$, dacă acesta se calculează cu formula stabilită. Se observă că cele mai mici valori ale erorii introduse la calculul lui δ_e, pentru $\frac{r_c}{r_s}=1$, se obțin la valori mari ale lui $\bar{h}$. Faptul că la $\bar{h}=0$ se găsește o eroare foarte mare, nu micșorează valabilitatea formulei stabilite deoarece pentru $\bar{h}=0$ și $\frac{r_c}{r_s}=1$ sonda dispare. Dacă s-ar calcula, tot pentru situația $\frac{r_c}{r_s}=1$, eroarea care s-ar introduce, utilizînd formula lui M. Muskat, aceasta ar fi constantă și egală cu 1 pentru orice valoare a lui $\bar{h}$.

Aceste situații extreme analizate pentru $\frac{r_c}{r_s}$ arată, mai ales la valorile foarte mari ale raportului, că formula stabilită este mult mai corectă decît aceea a lui M. Muskat. Deoarece în acest caz, liniile de curent spre sonda imperfectă sînt paralele, ceea ce presupune că și sonda imperfectă poate fi admisă tot ca fiind perfectă, „grosimea" stratului productiv fiind deci b, ceea ce face ca raportul dintre debitele celor două sonde să fie $\bar{h}$.

2. SONDA CU TALPĂ PERMEABILĂ

În situația în care $h = 0$, sonda este complet imperfectă, relația de calcul a debitului sondei are expresia

$$Q_T = \frac{2\pi k r_s (p_c - p_s)}{\mu\left(1 - \frac{r_s}{h} + \frac{r_s}{h}\ln\frac{r_e}{h}\right)}. \tag{18}$$

Dacă se admite că $r_e = h$, mișcarea este radial sferică, debitul sondei are expresia

$$Q = \frac{2\pi k r_s (p_c - p_s)}{\mu\left(1 - \frac{r_s}{r_c}\right)}. \tag{19}$$

Se observă că ultima relație, de fapt, este o particularizare a expresiei precedente. Se observă tot din relația (18) că pentru valori mari ale raportului $\frac{r_e}{h}$, debitul sondei devine neglijabil. O altă situație extremă este aceea în care raza sondei devine foarte mare, unde se observă că

$$\lim_{r_s \to \infty} Q_T = \frac{2\pi k h (p_c - p_s)}{\mu\left(-1 + \ln\frac{r_c}{h}\right)}. \tag{20}$$

Se poate efectua un calcul pentru a determina debitul care pătrunde prin talpa permeabilă a unei sonde parțial penetrante. În acest scop, observînd geometria figurii 2, pentru un element de arie $2rdr$ situat pe talpa sondei la distanța r de axul acesteia, se poate scrie că debitul elementar care o străbate va fi

$$dQ_T(x) = 2\pi v r \sin\theta\, d\theta. \tag{21}$$

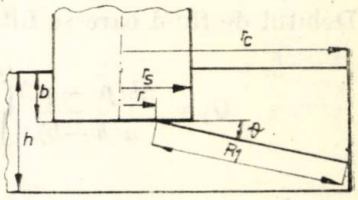


Fig. 2

Viteza de filtrare de pe talpa sondei în lungul liniei de curent de lungime R_1 va fi

$$v = \frac{\cos\theta}{r} \cdot \frac{p_c - p_s}{\ln\frac{R_1 \cos\theta}{r}}. \tag{22}$$

Apare funcția cos θ în această expresie deoarece se consideră că distanța $r/\cos\theta$ înlocuiește raza sondei, iar R_1 raza conturului de alimentare într-o curgere radial plană [1].

Se poate scrie imediat relația

$$R_1 \cos\theta = r_c - r \tag{23}$$

și, pe altă parte, tot din geometria figurii 2, se mai observă

$$\cos\theta = \frac{r_c - r}{R_1}; \quad \sin\theta = \frac{x}{R_1}, \tag{24}$$

iar

$$R_1^2 = x^2 + (r_c - r)^2. \tag{25}$$

Elementul de debit datorită vitezei de filtrare de pe linia de curent de lungime R_1 va fi

$$\mathrm{d}Q_T(x) = \frac{2\pi k(p_c - p_s)}{\mu} \frac{(r_c - r)\,x}{[x^2 + (r_c - r)^2] \ln \dfrac{r_c - r}{r}}\,\mathrm{d}r. \tag{26}$$

Se poate admite că valoarea debitului $\mathrm{d}Q_T$ este media ponderată în raport cu x ale lui $\mathrm{d}Q_T(x)$. Între aceste mărimi existînd relația

$$\mathrm{d}Q_T = \frac{1}{h-b} \int_0^{h-b} \mathrm{d}Q_T(x). \tag{27}$$

În urma efectuării calculelor, rezultă

$$\mathrm{d}Q_T = \frac{\pi k(p_c - p_s)}{\mu(h-b)} \frac{r_c - r}{\ln \dfrac{r_c - r}{r}} \ln \frac{(h-b)^2 + (r_c - r)^2}{(r_c - r)^2}. \tag{28}$$

Debitul de fluid care se filtrează numai prin talpa permeabilă se va scrie

$$Q_T = \frac{\pi k(p_c - p_s)}{\mu(h-b)} \int_0^{r_s} \frac{r_c - r}{\ln \dfrac{r}{r_c - r}} \ln \frac{(h-b)^2 + (r_c - r)^2}{(r_c - r)^2}\,\mathrm{d}r. \tag{29}$$

Se găsește în urma calculelor că pentru $b = h$

$$\lim_{(h-b)\to 0} Q_T = 0, \tag{30}$$

iar pentru sonda complet imperfectă, $b = 0$, debitul are expresia

$$Q_T = \frac{\pi k(p_c - p_s)}{\mu h} \int_0^{r_s} \frac{r_c - r}{\ln \dfrac{r}{r_c - r}} \ln \frac{h^2 + (r_c - r)^2}{(r_c - r)^2}\,\mathrm{d}r. \tag{31}$$

Se observă că pentru grosimi foarte mari ale stratelor productive și tot $b = 0$, relația (29) conduce tot la un debit nul pătruns prin talpa sondei ca și relația (18).

Este evident, dacă se admite că talpa sondei este permeabilă pentru diverse grade de penetrare ale stratului productiv, debitul care se filtrează în sondă este dat de suma debitelor calculate cu relațiile stabilite (10) și (31)

$$Q_{imp} = \frac{\pi k(p_c - p_s)}{\mu(h-b)} \left[\frac{2h(h-b)}{\dfrac{r_c - r_s}{\bar{h} r_c - r_s} \ln \bar{h} \dfrac{r_c}{r_s}} + \right.$$

$$\left. + \int_0^{r_s} \frac{r_c - r}{\ln \dfrac{r}{r_c - r}} \ln \frac{(h-b)^2 + (r_c - r)^2}{(r_c - r)^2} \, dr \right]. \qquad (32)$$

Pentru $r_c = 100$ m, $r_s = 0{,}1$ m și valorile lui $h = 10, 20, 40$ m, iar $\bar{h} = 0$; 0,25; 0,50; 0,75 și 1, s-a calculat numeric al doilea termen al sumei din interiorul parantezei din relația (32).

Tabelul 4

h, m \ $\bar{h}$	0	0,25	0,50	0,75	1,00
10	$1{,}18078 \times 10^{-2}$	$1{,}106724 \times 10^{-2}$	$8{,}86202 \times 10^{-3}$	$5{,}1775 \times 10^{-3}$	0
20	$4{,}65168 \times 10^{-2}$	$4{,}36619 \times 10^{-2}$	$3{,}505731 \times 10^{-2}$	$2{,}057592 \times 10^{-2}$	0
40	0,176017	0,165705	0,134403	0,0824278	0

În tabelul 5 se redau tot pentru aceleași valori ale lui r_c, r_s, h și $\bar{h} = 1$ mărimile termenului

$$T = \frac{r_s}{1 - \dfrac{r_s}{h} + \dfrac{r_s}{h} \ln \dfrac{r_c}{h}}. \qquad (33)$$

Acest termen și acela redat în tabelul 2, pentru $\bar{h} = 0$, fac ca debitele pătrunse în sondă prin talpa permeabilă a acesteia să difere între relația (18) și aceea stabilită în lucrarea noastră, expresia (32).

Tabelul 5

m \	10	20	40
T, m	0,098714	0,099621	0,100021

Se observă că pentru $\bar{h} = 0$ atît termenul T din tabelul 5, cît și valorile aceluiași parametru din tabelul 4, calculat cu relația propusă în lucrare, cresc pe măsură ce se mărește h. Ordinul de mărime al celor doi termeni este comparabil. Diferențe mai mici sînt pentru grosimile mai mici de strate.

3. STRATE CU PERMEABILITĂȚI DIFERITE

În practica de șantier se întîlnesc frecvent cazuri cînd sonda este imperfectă după gradul de deschidere, și stratele au permeabilități diferite.

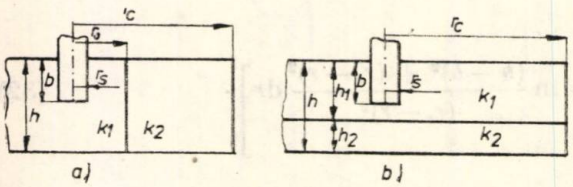


Fig. 3

Cele două cazuri distincte pe care le considerăm sînt prezentate în figurile 3*a* și 3*b*.

Este cunoscut din literatura de specialitate că la traversarea unei suprafețe care separă două zone cu permeabilități diferite, k_1 și k_2, are loc o refracție a liniilor de curent pentru care se scrie egalitatea

$$\frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\operatorname{tg} \theta_2} = \frac{k_1}{k_2}, \tag{34}$$

θ_1 și θ_2 sînt unghiurile pe care le fac direcțiile liniilor de curent în interiorul zonei de permeabilitate k_1, respectiv k_2 cu normala la suprafața de separație a celor două zone.

În ambele situații semnalate, debitul Q_i care se scurge către sonda imperfectă satisface inecuațiile

$$\frac{2\pi k_2 h \Delta p/\mu}{f(\bar{h})} < Q_i < \frac{2\pi k_1 h \Delta p/\mu}{f(\bar{h})}. \tag{35}$$

În aceste inecuații s-a admis $k_1 > k_2$ și s-a notat

$$f(\bar{h}) = \frac{r_c - r_s}{\bar{h} r_c - r_s} \ln \bar{h} \frac{r_c}{r_s}, \quad \bar{h} = \frac{b}{h}, \quad \text{în cazul figurii 3}b,$$

$$h = h_1 + h_2.$$

Inecuațiile (35) s-au scris avînd în vedere faptul că permeabilitatea medie echivalentă celor două strate cu permeabilitățile k_1 și k_2 este situată între acestea.

În prima situație, dacă se admite că H este înălțimea maximă pe care se filtrează fluidul prin macrosonda cu razele r_c și r_0 și se introduc notațiile

$$\bar{h}_1 = \frac{b}{H}, \quad \bar{h}_2 = \frac{H}{h}, \tag{36}$$

$$f(\bar{h}_1) = \frac{r_0 - r_s}{\bar{h}_1 r_0 - r_s} \ln \bar{h}_1 \frac{r_0}{r_s}; \quad f(\bar{h}_2) = \frac{r_c - r_0}{\bar{h}_2 r_c - r_0} \ln \bar{h}_2 \frac{r_c}{r_0} \tag{37}$$

se pot scrie relațiile

$$p_c - p_0 = \frac{Qf(\bar{h}_2)}{2\pi k_2 h/\mu}; \quad p_0 - p_s = \frac{Qf(\bar{h}_1)}{2\pi k_1 H/\mu}. \tag{38}$$

Aceste expresii au fost obținute admițînd că relația (10) se aplică atît pentru macrosonde cu razele r_c și r_0 și pentru aceea cu razele r_0 și r_s.

Dacă se notează cu k_{med} permeabilitatea medie a celor două strate cu permeabilitățile k_1 și k_2, rezultă expresia

$$\frac{f(\bar{h})}{k_{med} \cdot h} = \frac{f(\bar{h}_1)}{k_1 \cdot H} + \frac{f(\bar{h}_2)}{k_2 \cdot h}. \tag{39}$$

În funcție de termenul $\dfrac{f(\bar{h})}{k_{med} h}$ se poate calcula debitul produs de sonda imperfectă,

$$Q = \frac{2\pi k_{med} h \Delta p/\mu}{f(\bar{h})}.$$

Pentru a calcula termenul $\dfrac{f(\bar{h})}{k_{med} \cdot h}$, este necesară cunoașterea lui H. Această lungime se determină din condiția ca linia de curent din stratul cu permeabilitatea k_1, notat cu AB, să fie linia de curent refractată BC din stratul cu permeabilitatea k_2, figura 4.

Din această condiție, avînd în vedere că se pot scrie și relațiile

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{H - b}{r_0 - r_s}; \quad \operatorname{tg} \theta_2 = \frac{h - H}{r_c - r_0}, \tag{40}$$

rezultă expresia lui H,

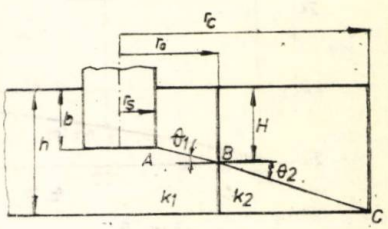


Fig. 4

$$H = b \frac{1 + \bar{h} \dfrac{k_1}{k_2} \dfrac{r_0 - r_s}{r_c - r_0}}{1 + \dfrac{k_1}{k_2} \dfrac{r_0 - r_s}{r_c - r_0}}. \tag{41}$$

În tabelul 6 se redau valorile raportului H/b în funcție de valorile r_0, r_c și k_1/k_2 pentru $r_s = 0{,}1$ m și $\bar{h} = 0{,}75$.

Tabelul 6

k_1/k_2	0,2			1			10		
r_e, m / r_0, m	50	100	150	50	100	150	50	100	150
1	1,0027	1,0014	1,0009	1,0135	1,0067	1,0045	1,1116	1,0625	1,042
5	1,0160	1,0076	1,0050	1,0736	1,0367	1,0245	1,3991	1,2552	1,1894
30	1,1726	1,0590	1,0356	1,4494	1,2244	1,1496	1,7029	1,6077	1,5352

În figura 5 se prezintă pentru $k_1/k_2 = 0{,}2$, $r_0 = 1{,}5$ m, $\bar{h} = 0{,}75$ valorile termenului $f(\bar{h}) = \dfrac{k_2}{k_{med}} = \dfrac{f(\bar{h}_1)}{k_1/k_2}\dfrac{h}{H} + f(\bar{h}_2)$ în funcție de raza conturului de alimentare r_e.

Se observă că la creșterea razei r_0 și a razei conturului de alimentare r_e termenul $f(\bar{h})\dfrac{k_2}{k_{med}}$ crește. Creșterea este mult mai mare la creșterea razei r_0.

În situația limită, în care $\bar{h} = 1$, rezultă $H = b$ și, de asemenea, se constată cu ușurință că se obțin și egalitățile

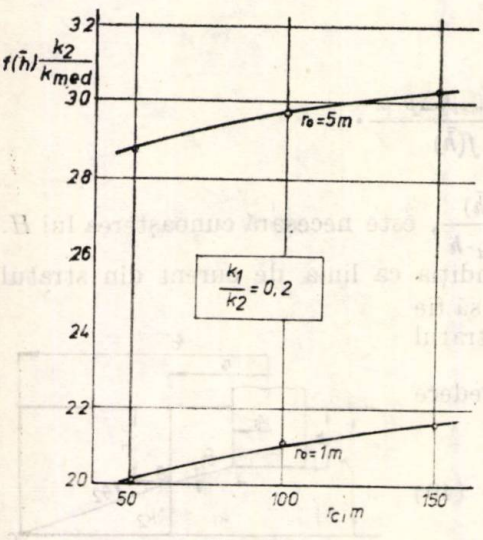


Fig. 5

$$f(\bar{h}) = \ln\frac{r_e}{r_s};\quad f(\bar{h}_1) = \ln\frac{r_0}{r_s};$$

$$f(\bar{h}_2) = \ln\frac{r_e}{r_0},$$

iar în urma calculului pentru această situație rezultă

$$k_{med} = \frac{\ln\dfrac{r_e}{r_s}}{\dfrac{h}{H}\dfrac{\ln r_0/r_s}{k_1} + \dfrac{\ln r_e/r_0}{k_2}}, \qquad (42)$$

relație ce coincide cu aceea pentru situația unor strate concentrice și permeabilități diferite, sonda fiind perfectă [1].

Celălalt caz limită, $\bar{h} = 0$, nu prezintă interes deoarece s-a admis talpa sondei ca fiind impermeabilă în funcție de r_e pentru $r_0 = 1, 5$, și 30 m pentru situația sondei perfecte din punct de vedere al deschiderii stratului.

În situația în care stratele sînt așezate orizontal, așa cum s-a arătat, pot exista cele două situații : $b < h_1$ sau $b > h_1$. Pentru cazul în care $b < h_1$,

se poate scrie debitul care se infiltrează între cilindrul de rază r, grosime h_1 și sonda de rază r_s, de unde se deduce căderea de presiune,

$$p_0 - p_s = \frac{Qf(\bar{h}_1)}{2\pi k_1 h_1/\mu}. \tag{43}$$

Din geometria figurii 7 se pot scrie expresiile

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{r_u - r_s}{h_1 - b};\quad \operatorname{tg}\theta_2 = \frac{r_c - r_u}{h_2},$$

avînd în vedere relația (34), se obține

$$\frac{\dfrac{r_u - r_s}{h_1 - b}}{\dfrac{r_c - r_u}{h_2}} = \frac{k_1}{k_2}, \tag{44}$$

de unde se găsește valoarea razei r_u,

$$r_u = \frac{r_s + r_c \dfrac{h_1 - b}{h_2}\dfrac{k_1}{k_2}}{1 + \dfrac{h_1 - b}{h_2}\cdot\dfrac{k_1}{k_2}}. \tag{45}$$

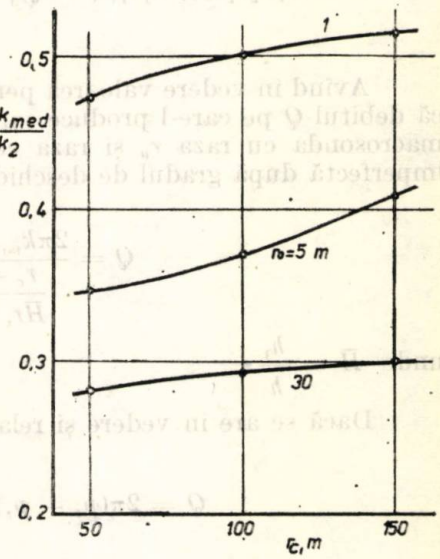


Fig. 6

Pe altă parte se consideră coroana circulară situată între razele r_u și r_c ca fiind formată din două strate cu permeabilitățile k_1 și k_2.

Se poate admite că pe cilindrul de rază r, figura A.1, permeabilitatea medie este dată de relația

$$k_m = \frac{k_1 h_1 + k_2 \overline{ED}}{h_1 + \overline{ED}}. \tag{46}$$

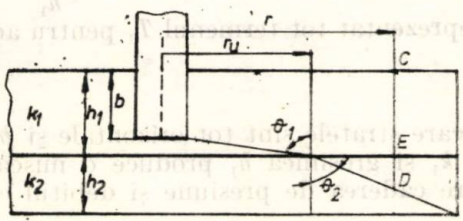


Fig. 7

$\overline{ED}$ fiind înălțimea stratului de permeabilitate k_2. Dacă se consideră că permeabilitatea medie pe întreaga coroană circulară situată între

razele r_u și r_c este k_{med}, acesta se poate calcula, anexa 1 a lucrării, și are forma

$$k_{med} = \frac{2k_2 \ln \frac{r_c}{r_u}}{\ln \frac{r_c[k_2h_2r_c + k_1h_1(r_c - r_u)]}{r_u[k_2h_2r_u + k_1h_1(r_c - r_u)]} + \frac{2k_2 - k_1}{k_1} \ln \frac{r_c[k_2h_2r_u + k_1h_1(r_c - r_u)]}{r_u[k_2h_2r_c + k_1h_1(r_c - r_u)]}}. \tag{47}$$

Avînd în vedere valoarea permeabilității medii, k_{med}, se poate admite că debitul Q pe care-l produce sonda este egal cu acela care pătrunde în macrosonda cu raza r_u și raza conturului r_c; macrosonda fiind evident imperfectă după gradul de deschidere și are mărimea

$$Q = \frac{2\pi k_{med} h(p_c - p_0)/\mu}{\frac{r_c - r_u}{\bar{H}r_c - r_u} \ln \bar{H} \frac{r_c}{r_u}}, \tag{48}$$

unde $\bar{H} = \frac{h_1}{h}$.

Dacă se are în vedere și relația (43), se găsește imediat

$$Q = 2\pi(p_c - p_s)/\mu \left[\frac{k_1h_1}{f(\bar{h}_1)} + \frac{k_{med}h}{f(\bar{H})} \right], \tag{49}$$

unde s-a notat $f(\bar{H}) = \frac{r_c - r_u}{\bar{H}r_c - r_u} \ln \bar{H} \frac{r_c}{r_u}$, relație ce a fost obținută considerînd că macrosonda are gradul de imperfecțiune $\bar{H}$.

În figura 8 s-a reprezentat termenul

$$T_1 = \frac{1}{f(\bar{h}_1)} + \frac{1}{h_1} \cdot \frac{k_{med}}{k_2} \frac{k_2}{k_1} \frac{h}{f(\bar{H})}$$

pentru $\frac{k_1}{k_2} = 0{,}2$ în funcție $\bar{h}_1$ și de valorile lui $\frac{h_2}{h_1} = 5$; 1; 0,5 și 0,2, iar în figura 9 s-a reprezentat tot termenul T_1 pentru aceleași valori ale lui $\frac{h_1}{h_2}$ și $\frac{k_1}{k_2} = 10$.

În situația în care stratele sînt tot orizontale și $b > h_1$, stratul care are permeabilitatea k_1 și grosimea h_1 produce o mișcare radial plană și din acest motiv între căderea de presiune și debitul care se filtrează în sondă este relația

$$Q_1 = \frac{2\pi k_1 h_1 (p_c - p_s)}{\mu \ln \frac{r_c}{r_s}}, \tag{50}$$

iar stratul 2 produce ca și cum gaura de sondă ar fi imperfectă față de acesta cu gradul de imperfecțiune, figura 10,

$$\bar{h} = \frac{b - h_1}{h_2}. \tag{51}$$

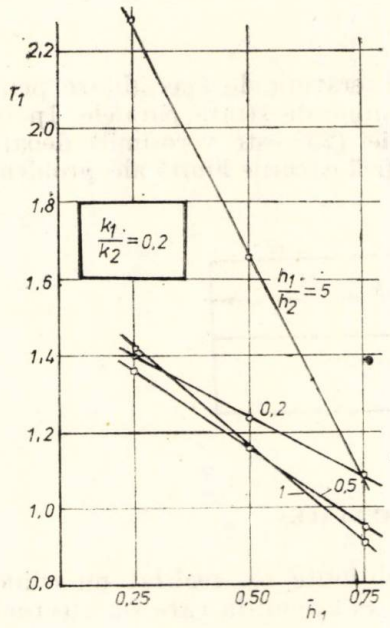


Fig. 8

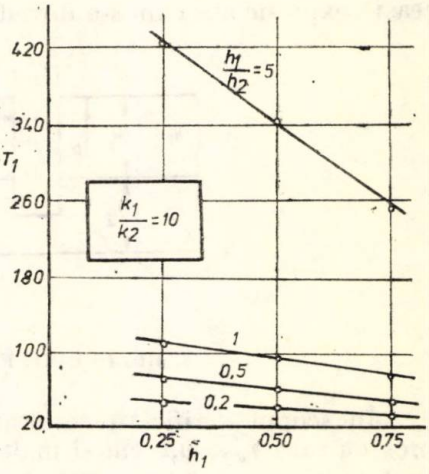


Fig. 9

Debitul produs de acest strat va fi

$$Q_2 = \frac{2\pi k_2 h_2 (p_c - p_s)/\mu}{\frac{r_c - r_s}{\bar{h} r_c - r_s} \ln \bar{h} \frac{r_c}{r_s}}. \tag{52}$$

Debitul total produs de cele două strate va fi

$$Q = Q_1 + Q_2 = \frac{2\pi(p_c - p_s)}{\mu} \left[\frac{k_1 h_1}{\ln \frac{r_c}{r_s}} + \frac{k_2 h_2}{\frac{r_c - r_s}{\bar{h} r_c - r_s} \ln \bar{h} \frac{r_c}{r_s}} \right]. \tag{53}$$

Pentru situația în care stratul cu indicele 2 este foarte subțire ($h_2 = 0$), rezultă imediat

$$Q = \frac{2\pi k_1 h_1 (p_c - p_s)}{\mu \ln \frac{r_c}{r_s}}, \tag{54}$$

iar în situația că $b = h_1 + h_2$, sonda este perfectă și produce din două strate paralele cu direcția de curgere a fluidului. În această situație se găsește

$$Q = \frac{2\pi(p_c - p_s)}{\mu \ln \frac{r_c}{r_s}} (k_1 h_1 + k_2 h_2), \tag{55}$$

rezultat care este același cu acela din literatura de specialitate pentru sondele perfecte și produc dintr-o succesiune de strate paralele. Ipoteza efectuată ce a condus la obținerea relației (23) este verosimilă deoarece această expresie așa cum s-a dovedit verifică cazurile limită ale problemei.

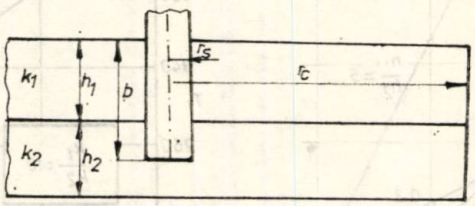


Fig. 10

4. REZULTATE EXPERIMENTALE

În scopul verificării rezultatelor obținute s-a realizat un cilindru poros cu raza $r_c = 9{,}2$ cm și înălțimea $h = 22$ cm, în care s-a efectuat o gaură cu raza $r_s = 0{,}5$ cm. Cilindrul realizat a simulat o sondă de injecție cu gradul de imperfecție $\bar{h} = 0{,}6363$. Din datele experimentale ale debitelor de injecție și ale căderilor de presiune s-a estimat permeabilitatea materialului poros ca fiind 28,5661 D. Fluidul injectat a fost aerul. În figura 11 sînt redate valorile debitelor de aer filtrate prin sonda imperfectă cu gradul de imperfecție $\bar{h} = 0{,}6363$ precum și valorile care s-ar fi obținut utilizînd formula lui M. Muskat și aceea propusă în lucrarea noastră (10).

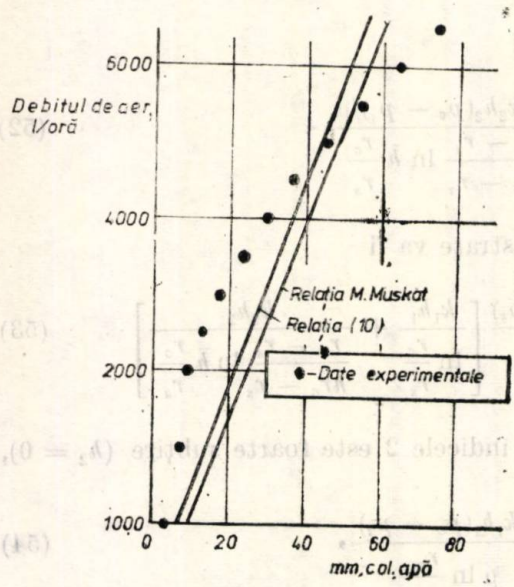


Fig. 11

Este foarte posibil ca atît valorile obținute cu relația lui M. Muskat, cît și acelea calculate cu formula (10) să se abată mult de la datele experimentale deoarece acestea din urmă au fost determinate în condițiile unei filtrări neliniare, în timp ce relațiile de

calcul amintite sînt stabilite pentru filtrarea liniară. De altfel, dependenta existentă între debitul de injecție și căderea de presiune realizată în sondă dovedește caracterul neliniar de filtrare. Totuși, la debite mici de injecție, unde mișcarea este mai apropiată de aceea liniară, debitele calculate cu relația propusă (10) sînt mai mari decît debitele calculate cu formula lui M. Muskat, acestea din urmă fiind mult mai depărtate de valorile experimentale.

ANEXA 1

În cazul în care se consideră că cele două strate de permeabilitate k_1 și k_2 formează geometria redată în figura A.1, se poate scrie, pentru două plane paralele situate la distanța dr unul de celălalt, permeabilitatea medie.

$$k_{med} = \frac{\ln \frac{r_c}{r_u}}{\int_{r_u}^{r_c} \frac{\ln \frac{r + dr}{r}}{k_m}}. \qquad (A.1)$$

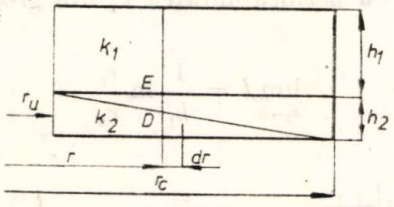


Fig. A.1

Se poate considera că $\ln \frac{r + dr}{r} \approx \frac{dr}{r}$, ceea ce face ca relația (A.1) să fie scrisă și sub forma

$$k_{med} = \frac{\ln \frac{r_c}{r_u}}{\int_{r_u}^{r_c} \frac{dr}{r \cdot k_m}}. \qquad (A.2)$$

Avînd în vedere și relația (46) din text, se poate scrie $\frac{y}{h_2} = \frac{r - r_u}{r_c - r_u}$, rezultă că numitorul fracției din (A.2) are forma

$$I = \int_{r_u}^{r_c} \frac{dr}{rk_m} = \int_{r_u}^{r_c} \frac{h_1(r_c - r_u) + h_2 r}{r[k_1 h_1 (r_c - r_u) + k_2 h_2 r]} dr. \qquad (A.3)$$

Integrala se calculează cu ușurință și are mărimea

$$I = \frac{1}{2k_2} \ln \frac{r_c[k_2h_2r_c + k_1h_1(r_c - r_u)]}{r_u[k_2h_2r_u + k_1h_1(r_0 - r_u)} + \\ + \frac{1}{2k_2} \frac{2k_2 - k_1}{k_1} \ln \frac{r_c[k_2h_2r_u + k_1h_1(r_c - r_u)]}{r_u[k_2h_2r_c + k_1h_1(r_c - r_u)]}. \tag{A.4}$$

Pentru cazul particular, $k_1 = k_2 = k$, rezultă $k_{med} = k$, lucru care era de așteptat deoarece cele două strate sînt cu aceeași permeabilitate.

În cazul în care fiecare din cele două ar avea pe rînd grosimi neglijabile, permeabilitatea medie este egală cu permeabilitatea stratului a cărei grosime nu se neglijează.

Astfel se constată cu ușurință că

$$\lim_{h_1 \to 0} I = \frac{1}{k_2} \ln \frac{r_c}{r_u}, \tag{A.5}$$

ceea ce conduce la $k_{med} = k_2$.
În situația că stratul cu permeabilitatea k_2 are grosimea k_2 foarte mică, se găsește

$$\lim_{h_2 \to 0} I = \frac{1}{k_1} \ln \frac{r_c}{r_u} \tag{A.6}$$

și $k_{med} = k_1$.

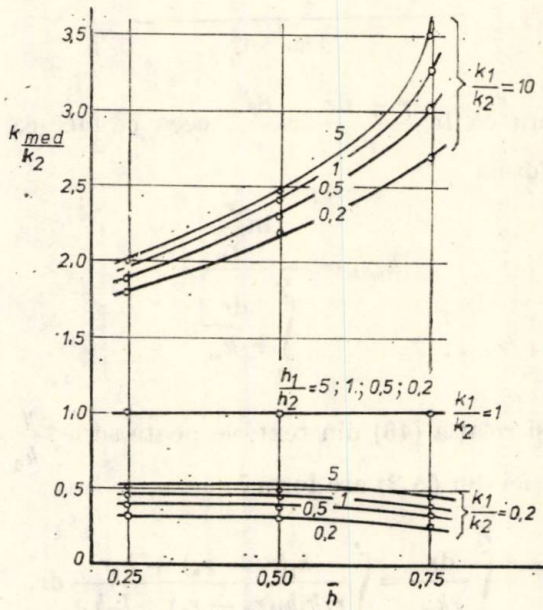


Fig. A.2

Aceste cazuri extreme pe care le verifică relația stabilită a permeabilității medii permite să admitem valabilitatea acesteia pentru toate situațiile din practica de șantier. În figura A.2 se reprezintă raportul k_{med}/k_2 în funcție de valorile raportului $k_1/k_2 = 0{,}2, 1, 10$ și $\bar{h}$ pentru raza conturului de alimentare $r_c = 100$ m.

4. CONCLUZII

În lucrare se stabilește o nouă relație pentru debitul sondei parțial penetrante. Relația obținută s-a stabilit pe o cale cu mult mai simplă decît aceea existentă în literatura de specialitate și, în plus, are un suport cu mult mai real. Debitul unei sonde calculat cu relația stabilită este mai mic decît debitul calculat cu relațiile existente în literatura de specialitate.

De asemenea, s-a stabilit relația de calcul pentru debitul care pătrunde prin talpa permeabilă a unei sonde parțial penetrante a stratului.

S-a analizat și situația unor strate cu permeabilități diferite și sonda imperfectă.

Primită la redacție la 25 mai 1982

BIBLIOGRAFIE

1. I. CREȚU, *Hidraulica generală și subterană*. Edit. didactică și pedagogică, București, 1971, p. 272—285.

MODELAREA PROCESULUI DE VIDARE LA PROCEDEUL DE TURNARE ÎN FORME VIDATE

de LUCIA POPA

Liceul matematică-fizică „N. Bălcescu", București

MARIN GHERGU, RADU POPA

Institutul politehnic, București

Se prezintă un model matematic pentru simularea procesului de vidare a formelor de turnare. Modelul se bazează pe soluționarea numerică cuplată, folosind metoda caracteristicilor, a ecuațiilor curgerii nepermanente unidimensionale, a gazelor prin conducte și prin medii poroase. Modelul matematic permite să se studieze influența diferiților parametri constructivi și funcționali asupra procesului și să se aleagă soluțiile de proiectare optime pentru această fază a unei linii de turnare în forme vidate.

1. INTRODUCERE

Realizarea formelor de turnare prin vidare constituie una dintre cele mai moderne soluții adoptate la ora actuală în cadrul liniilor de turnare automată. Procesele gazodinamice care apar în instalație sînt foarte complexe, incluzînd fenomene de curgere a gazelor în regim nepermanent, atît pe conductele de legătură între formă și recipientul de vid, cît și în mediul poros constituit de materialul poros al formei. Cele două curgeri se condiționează reciproc și sînt puternic influențate de o serie de parametri geometrici, fizici și operaționali ai instalației, în timp ce, pe de altă parte, o bună cunoaștere a acestor procese de curgere permite dimensionarea corectă a instalațiilor și încadrarea corespunzătoare a fazei respective în procesul global realizat de către linia automată de turnare.

Dacă modelarea matematică a curgerii nestaționare a gazelor în conducte s-a efectuat în special în legătură cu unele probleme de aerodinamică sau de transport a gazelor naturale, modelarea curgerilor gazoase prin medii poroase a urmărit cu precădere studiul evoluției formațiunilor subterane de gaze naturale.

Lucrarea de față propune un model matematic pentru analiza simultană a celor două tipuri de procese de curgere menționate mai sus, așa cum apar ele într-o astfel de instalație.

În principiu, instalația este compusă din elementele precizate în figura 1.

Schematic, o secțiune prin formă și masa de formare arată ca în figura 2.

Pe scurt, operațiunile care se efectuează sînt următoarele :

— În prima fază, se mulează folia de plastic impermeabilă 1 peste model, prin legarea mesei de formare la recipientul de vid (tăblia superioară a mesei și modelul sînt prevăzute cu orificii fine, ca în figura 2).

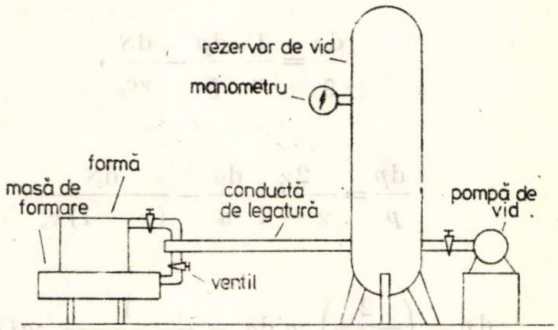
— Se plasează rama formei deasupra și se umple cu amestecul de formare (nisip), iar deasupra ramei se plasează folia de plastic impermeabilă 2.

— Se conectează rama la recipientul de vid, aerul din masa de nisip ieșind prin peretele perforat în cavitatea periferială și fiind absorbit în recipientul de vid.

St. Cerc. Mec. Apl., Tom 43, Nr. 1, 1984, P. 30—38

Depresiunea care apare în materialul formei asigură rezistența mecanică necesară și păstrează conturul modelului. După executarea ramei pentru a doua jumătate a modelului și asamblarea celor două rame, poate

Fig. 1



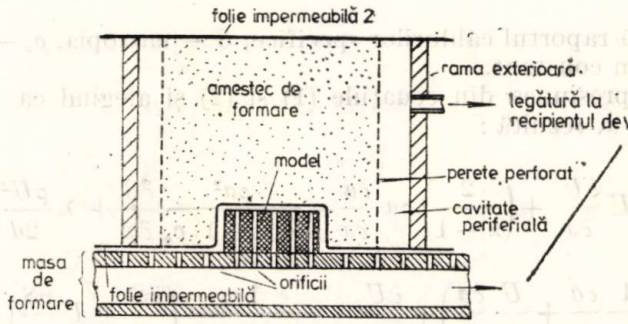


Fig. 2

avea loc turnarea metalului topit. Această etapă este, din punct de vedere al fenomenelor gazodinamice, cu mult mai complexă, în special din cauza efectelor termice. Studiul de față se rezumă la procesul de vidare al unei rame, după mularea foliei 1 peste model și înaintea turnării.

2. MODELAREA MATEMATICĂ A PROCESELOR DE CURGERE

Pentru curgerea nepermanentă a gazelor pe conductele de legătură, se adoptă modelul unidimensional descris de ecuațiile :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + f = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U)}{\partial x} = 0, \tag{2}$$

în care U este viteza medie de curgere ; p — presiunea statică ; ρ — densitatea gazului ; x — coordonata longitudinală ; t — timpul ; iar f — un termen care include pierderea de sarcină prin frecare, ales de obicei de

forma $f = \lambda U^2/(2d)$, unde d este diametrul conductei (presupus constant) și λ — coeficientul pierderilor de sarcină.

Deoarece viteza sunetului este $a = \sqrt{\varkappa p/\rho}$, iar [1]

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{\varkappa}\frac{dp}{p} - \frac{dS}{\varkappa c_v}, \tag{3}$$

rezultă

$$\frac{dp}{p} = \frac{2\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{da}{a} - \frac{dS}{(\varkappa - 1)\, c_v}$$

sau

$$dp = \left(\frac{2}{\varkappa - 1}\right)\rho a\, da - \frac{1}{\varkappa(\varkappa - 1)\, c_v}\rho a^2\, dS, \tag{4}$$

unde $\varkappa$ reprezintă raportul căldurilor specifice, S — entropia, c_v — căldura specifică la volum constant.

Eliminînd presiunea din ecuațiile (1) și (2) și alegînd ca variabile dependente U și a, rezultă :

$$E_1 = \rho\frac{\partial U}{\partial t} + \rho U\frac{\partial U}{\partial x} + \left(\frac{2}{\varkappa - 1}\right)\rho a\frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\rho a^2}{\varkappa(\varkappa - 1)\, c_v}\frac{\partial S}{\partial x} + \lambda\frac{\rho U^2}{2d} = 0, \tag{5}$$

$$E_2 = \left(\frac{2}{\varkappa - 1}\right)\left(\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{U}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\right) + \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{(\varkappa - 1)\, c_v}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + U\frac{\partial S}{\partial t}\right) = 0. \tag{6}$$

Dacă se multiplică E_2 cu o constantă arbitrară C, se adună rezultatul cu E_1 și se aleg pentru C valorile $\pm a$, se obține setul de ecuații diferențiale ordinare echivalent cu sistemul (5)—(6) sub forma

$$\frac{dU}{dt} + \left(\frac{2}{\varkappa - 1}\right)\frac{da}{dt} = -\frac{\lambda U^2}{2d} + \frac{a}{\mathcal{R}}\frac{dS}{dt} + \frac{a^2}{\varkappa\mathcal{R}}\frac{\partial S}{\partial x}, \tag{7.1}$$

valabilă pe curba $\dfrac{dx}{dt} = U + a$ pentru U și a (7.2)

și pe $dx/dt = U$ pentru S, (7.3)

precum și

$$\frac{dU}{dt} - \left(\frac{2}{\varkappa - 1}\right)\frac{da}{dt} = -\frac{\lambda U^2}{2d} - \frac{a}{\mathcal{R}}\frac{dS}{dt} + \frac{a^2}{\varkappa\mathcal{R}}\frac{\partial S}{\partial x}, \tag{8.1}$$

valabilă pe curba $\dfrac{dx}{dt} = U - a$ pentru U și a (8.2)

și pe $dx/dt = U$ pentru S. (8.3)

Se introduc variabilele adimensionale :

$$\bar{x} = x/L, \quad \bar{t} = ta_{ref}/L, \quad \bar{U} = U/a_{ref} \text{ și } \bar{a} = a/a_{ref}, \tag{9}$$

unde a_{ref} este o viteză a sunetului aleasă ca valoare de referință, iar L o lungime caracteristică. Neglijînd efectele de schimb de căldură (condiții izentropice), rezultă ecuațiile caracteristice adimensionale care descriu curgerea nepermanentă pe conductă :

$$\frac{d\bar{U}}{d\bar{t}} + \left(\frac{2}{\varkappa - 1}\right)\frac{d\bar{a}}{d\bar{t}} = -\frac{\lambda L}{2d}\cdot\bar{U}^2 \tag{10.1}$$

valabilă pe $\dfrac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \bar{U} + \bar{a}$ (10.2)

și

$$\frac{d\bar{U}}{d\bar{t}} - \left(\frac{2}{\varkappa - 1}\right)\frac{d\bar{a}}{d\bar{t}} = -\frac{\lambda L}{2d}\bar{U}^2 \tag{11.1}$$

valabilă pe $\dfrac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \bar{U} + \bar{a}.$ (11.2)

Pentru simplificarea expunerii, se admite că fenomenul de curgere a gazelor în mediul poros (nisipul de formare) are un caracter unidimensional și este guvernat de ecuațiile [2] :

$$m\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V)}{\partial x} = 0, \tag{12}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho k}V = 0, \tag{13}$$

$$\frac{\rho}{\rho_{ref}} = \left(\frac{p}{p_{ref}}\right)^n, \tag{14}$$

în care m este porozitatea ; V — viteza de filtrare ; μ — viscozitatea dinamică a gazului ; k — coeficientul de permeabilitate ; p_{ref} — o presiune aleasă ca valoare de referință ; ρ_{ref} — valoarea corespunzătoare a densității ; n — exponent funcție de natura termodinamicii procesului (în continuare se admite $n = 1$ — evoluție izotermă).

Cu variabilele adimensionale :

$$\xi = x/l, \quad \tau = c_{ref}\, t/l, \quad v = V/c_{ref} \text{ și } \eta = \rho/\rho_{ref}, \tag{15}$$

unde l este o lungime caracteristică a mediului poros, iar $c_{ref}^2 = \frac{1}{m}\frac{p_{ref}}{\rho_{ref}}$, rezultă ecuaţiile adimensionale

$$m\frac{\partial \eta}{\partial \tau} + v\frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \eta\frac{\partial v}{\partial \xi} = 0, \tag{16.1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{m}{\eta}\frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \alpha\frac{v}{\eta} = 0, \tag{16.2}$$

în care $\alpha = \mu l/(\rho_{ref}\, c_{ref}\, k)$.

Ecuaţiile caracteristice ale sistemului (16) se obţin sub forma

$$\eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau} + m\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\tau} + \alpha v = 0 \tag{17.1}$$

$$\text{valabilă pe } \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\tau} = \frac{v}{2m} + \sqrt{1 + \frac{v^2}{4m^2}} \approx \frac{v}{2m} + 1 \tag{17.2}$$

şi

$$\eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau} - m\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\tau} + \alpha v = 0 \tag{18.1}$$

$$\text{valabilă pe } \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi\tau} = \frac{v}{2m} - \sqrt{1 + \frac{v^2}{4m^2}} \approx \frac{v}{2m} - 1, \tag{18.2}$$

unde s-a avut în vedere că $v \ll 1$ şi $m \in (0{,}3 \div 0{,}5)$.

3. ALGORITMUL DE REZOLVARE PRIN METODA CARACTERISTICILOR

Algoritmul de rezolvare fiind acelaşi atît pentru ecuaţiile (10)—(11), cît şi pentru ecuaţiile (17)—(18), amănuntele date în continuare se vor referi doar la rezolvarea primului grup de ecuaţii.

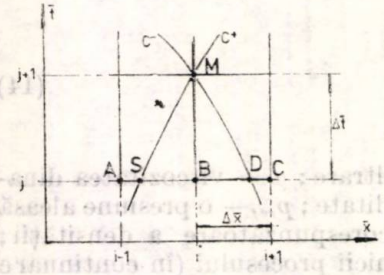


Fig. 3

Deoarece membrii drepţi ai ecuaţiilor (10.2) şi (11.2) au valori diferite de la punct la punct în domeniul $\bar{x} - \bar{t}$, aceste ecuaţii corespund unor curbe în planul $\bar{x} - \bar{t}$ — curbele caracteristice. Se adoptă o reţea de calcul cu paşi $\Delta\bar{x}$ şi $\Delta\bar{t}$ ficşi, legaţi prin relaţia

$$\Delta\bar{t} = \beta\Delta\bar{x}, \text{ unde } \beta \leqslant \min\left|\frac{1}{\bar{U} + \bar{a}}\right|, \tag{19}$$

ceea ce asigură ca cele două caracteristici care trec prin nodul de reţea M (fig. 3) să intersecteze linia $\bar{t}_j$ între nodurile A şi C imediat vecine nodului de calcul M.

Aproximînd curbele SM și DM prin dreptele corespunzătoare și exprimînd ecuațiile (10) și (11) în diferențe finite, rezultă

$$\begin{aligned}
&\frac{\bar{U}_M - \bar{U}_S}{\Delta\bar{t}} + \left(-\frac{2}{\varkappa - 1}\right)\frac{\bar{a}_M - \bar{a}_S}{\Delta\bar{t}} + \frac{\lambda L}{2d}\bar{U}_S\,|\bar{U}_S| = 0,\\
&\frac{\bar{U}_M - \bar{U}_D}{\Delta\bar{t}} - \left(\frac{2}{\varkappa - 1}\right)\frac{\bar{a}_M - \bar{a}_D}{\Delta\bar{t}} + \frac{\lambda L}{2d}\bar{U}_D\,|\bar{U}_D| = 0.
\end{aligned} \tag{20}$$

Valorile $\bar{U}_S$, $\bar{a}_S$, $\bar{U}_D$ și $\bar{a}_D$ se pot găsi prin interpolare liniară între valorile cunoscute ale acestor mărimi din nodurile A, B și C, sub forma :

$$\begin{aligned}
&\bar{U}_S = \frac{\bar{U}_B + \beta Y_S}{1 - \beta Z_S}; \quad \bar{a}_S = \frac{\bar{a}_B - \beta Y_S}{1 - \beta Z_S},\\
&\bar{U}_D = \frac{\bar{U}_B + \beta Y_D}{1 - \beta Z_D} \text{ și } \bar{a}_D = \frac{\bar{a}_B + \beta Y_D}{1 - \beta Z_D},
\end{aligned} \tag{21}$$

unde

$$Y_S = \bar{U}_A\,\bar{a}_B - \bar{U}_B\,a_A; \quad Z_S = \bar{U}_A + \bar{a}_A - \bar{U}_B - \bar{a}_B,$$

$$Y_D = \bar{U}_C\,\bar{a}_B - \bar{U}_B\,\bar{a}_C \text{ și } Z_D = \bar{U}_B - \bar{a}_B - \bar{U}_C + \bar{a}_C.$$

Avînd în vedere relațiile (21), din ecuațiile (20) se obțin cele două necunoscute $\bar{U}_M$ și $\bar{a}_M$. În același mod se poate găsi soluția în toate nodurile interioare (cu excepția frontierelor $\bar{x}_1 = 0$ și $\bar{x}_1 = 1$) la momentul de timp $\bar{t}_{j+1}$, dacă se cunoaște soluția în toate nodurile rețelei la momentul $\bar{t}_j$.

Condițiile la limită se impun în raport cu configurația și modul de funcționare a instalației. Astfel :

a) *Pentru curgerea pe conductă.*

— La legătura cu forma : $p_1(t) = p_f(t)$, unde $p_f(t)$ reprezintă presiunea în cavitatea periferială a formei. Notînd cu M_f masa de aer conținută în această cavitate, cu Q_1 debitul masic la intrarea în conductă și cu Q_{inf} debitul masic infiltrat din mediul poros, dacă se admite procesul izoterm, se poate scrie

$$p_f^{j+1}/M_f^{j+1} = p_f^j/M_f^j = \text{const.},$$

de unde

$$p_f^{j+1} = p_f^j\,M_f^{j+1}/M_f^j = p_f^j\frac{M_f^j - Q_1^j\,\Delta t + Q_{inf}^j\,\Delta t}{M_f^j}. \tag{22}$$

Deoarece $a^{2\varkappa/(\varkappa-1)} = \dfrac{p}{p_{ref}}\,a_{ref}^{2\varkappa/(\varkappa-1)}$, luînd $\varkappa = 1{,}4$ și notînd $\bar{p} = p/p_{ref}$, rezultă

$$\bar{a}^7 = \bar{p}. \tag{23}$$

Debitul masic exprimat în variabile adimensionale este

$$Q = a_{ref}\ \rho_{ref}\ \frac{\pi d^2}{4}\ \bar{U}\bar{a}^5, \tag{24}$$

iar pasul de timp de calcul va fi $\Delta t = \dfrac{L}{a_{ref}}\ \dfrac{\beta}{(N-1)}$,

unde N reprezintă numărul de noduri de calcul $\bar{x}_i$ al rețelei.

Folosind relațiile (22)—(24) și a doua ecuație (20), se obțin cu ușurință valorile $\bar{U}_1^{j+1}$ și $\bar{a}_1^{j+1}$ dacă se cunoaște Q_{inf}.

— La legătura cu recipientul de vid : $p_N(t) = p_v(t)$, unde $p_v(t)$ reprezintă presiunea în recipientul de vid, dată de

$$p_v^{j+1} = p_v^j\ \frac{M_v^j + Q_N^j\,\Delta t}{M_v^j}, \tag{25}$$

Se folosește prima ecuație (20) împreună cu relațiile (25), (23) și (24), rezultînd $\bar{U}_N$ și $\bar{a}_N$.

b) *Pentru curgerea prin mediul poros* (considerînd că secțiunea transversală admite o axă de simetrie $X - X$ și neglijînd grosimea modelului în comparație cu grosimea formei (fig. 4)).

— La cavitatea periferială : $[p(t)]_{x=0} = p_f(t)$, iar în variabile adimensionale

$$[\tau_l(\tau)]_{\xi=0} = \bar{p}_f(\tau). \tag{26}$$

— La axa de simetrie : $V_{x=l} = 0$, adică

$$[v(\tau)]_{\xi=1} = 0. \tag{27}$$

Condițiile inițiale depind de modul cum se convine să se opereze instalația. În mod obișnuit, cu ajutorul pompei de vid se realizează în recipientul de vid o anumită presiune absolută p_v, mai mică decît presiunea atmosferică, ventilele de pe conducta de legătură cu forma fiind închise. După atingerea depresiunii necesare, se întrerupe legătura cu pompa și se deschide legătura cu forma. Pentru această schemă de lucru, condițiile inițiale ar fi :

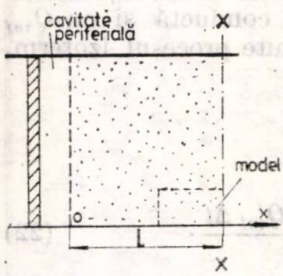


Fig. 4

— pe conducta de legătură, $\bar{U}(\bar{x}, 0) = 0$ și $\bar{a}(\bar{x}, 0)$ corespunzînd presiunii absolute p_v ;

— în formă, $v(\xi, 0) = 0$ și $\tau_l(\xi, 0)$ corespunzînd presiunii atmosferice.

Referitor la curgerea gazelor pe conductă, apare firesc să se aleagă lungimea conductei L ca lungime de referință, iar a_{ref} corespunde condițiilor, atmosferice standard (de exemplu). Pentru curgerea gazelor în mediul poros, lungimea de referință l reprezintă jumătate din lățimea secțiunii transversale a formei. Deoarece raportul dintre aceste două lungimi carac-

teristice este relativ mare în situațiile practice obișnuite, dacă se dorește discretizarea variabilelor spațiale $\bar{x}$ și ξ într-un număr aproximativ egal de intervale, rezultă o diferență substanțială între valorile $\Delta\bar{t}$ corespunzătoare la pașii de calcul $\Delta\bar{t}$ și $\Delta\tau$ care trebuie adoptați în rezolvarea numerică a celor două procese de curgere . Pentru a se ține seama de acest aspect, programul de calcul efectuează analiza pe un pas $\Delta\bar{t}$ pentru conductă și pe mai mulți pași $\Delta\tau$ pentru mediul poros, astfel încît aceștia să corespundă la același timp real ca și pasul $\Delta\bar{t}$. Pentru curgerea în mediul poros se admit valorile mediate pe pasul $\Delta\bar{t}$ ale condițiilor la limită și acestea se mențin constante pe toți pașii $\Delta\tau$ corespunzători. Algoritmul se reia pentru $\Delta\bar{t}$ următor la curgerea pe conductă și un număr de pași $\Delta\tau$ pentru curgerea în mediul poros ș.a.m.d.

4. EXEMPLE NUMERICE

În figura 5 este reprezentată variația cu timpul adimensional a presiunii adimensionale, în cîteva secțiuni caracteristice ale unei instalații, pentru următoarele date de intrare: presiunea atmosferică 98066,5 N/m², densitatea aerului $\rho = 1{,}167457$ kg/m³, constanta universală a aerului $\mathscr{R} = 289{,}69$ J/kg/°K, temperatura aerului $T = 293$°K, viscozitatea dinamică a aerului $\mu = 0{,}169 \cdot 10^{-4}$ kg/m/s, volumul rezervorului de vid = 2 m³,

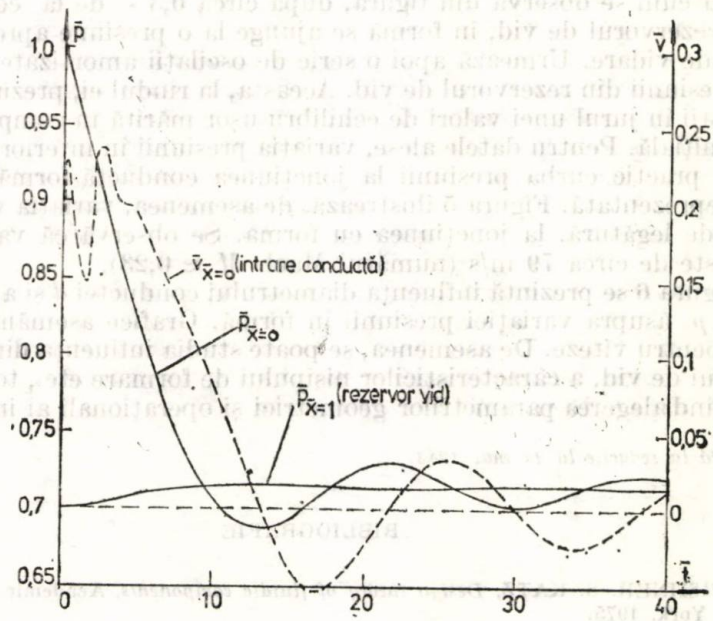


Fig. 5

lungimea conductei $L = 10$ m, diametrul conductei $d = 0{,}05$ m, porozitatea nisipului $m = 0{,}44$, coeficientul de permeabilitate $k = 0{,}296 \cdot 10^{-9}$ m², volumul cavității periferiale = 0,04 m³, jumătate din lățimea formei

$l = 0{,}2$ m, aria laterală corespunzătoare 0,5 m^2, presiunea de vidare $p_v/p_{at} = 0{,}7$. Adimensionalizările s-au făcut în raport cu $p_{at} = 98066{,}5$ N/m^2, $a_{ref} = 342{,}93$ m/s, $c_{ref} = 436{,}93$ m/s, $t_0 = L/a_{ref} = 0{,}02916$ s. Cele două lungimi s-au împărțit în cîte 10 intervale egale, de mărime $\Delta\bar{x} = \Delta\xi = 0{,}1$.

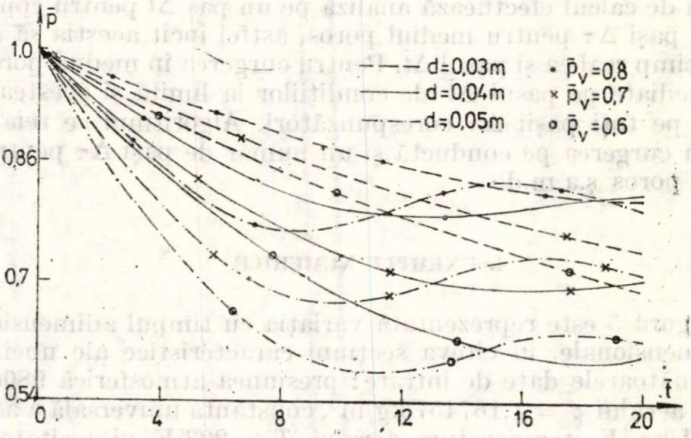


Fig. 6

După cum se observă din figură, după circa 0,3 s de la conectarea formei la rezervorul de vid, în formă se ajunge la o presiune apropiată de presiunea de vidare. Urmează apoi o serie de oscilații amortizate în timp, în jurul presiunii din rezervorul de vid. Aceasta, la rîndul ei, prezintă unele mici oscilații în jurul unei valori de echilibru ușor mărită în comparație cu valoarea inițială. Pentru datele alese, variația presiunii în interiorul formei urmărește practic curba presiunii la joncțiunea conductă-formă și nu a mai fost reprezentată. Figura 5 ilustrează, de asemenea, variația vitezei pe conducta de legătură, la joncțiunea cu forma. Se observă că valoarea ei maximă este de circa 79 m/s (numărul Mach $M \approx 0{,}23$).

În figura 6 se prezintă influența diametrului conductei d și a presiunii de vidare $\bar{p}_v$ asupra variației presiunii în formă. Grafice asemănătoare se pot trasa pentru viteze. De asemenea, se poate studia influența dimensiunii rezervorului de vid, a caracteristicilor nisipului de formare etc., toate acestea permițînd alegerea parametrilor geometrici și operaționali ai instalației.

Primită la redacție la 17 mai 1983

BIBLIOGRAFIE

1. J. M. KIRSHNER, S. KATZ, *Design theory of fluidic components*, Academic Press, New York, 1975.
2. T. OROVEANU, *Asupra utilizării metodei caracteristicilor în studiul unor scurgeri lente ale gazelor*, St. cerc. mec. apl., **27**, *4* (1968).

VIBRAȚII ALEATOARE LA MECANISME R(RRT) CU EXCITAȚIE PRIN BAZĂ

de MIHAI BUCULEI și DAN BAGNARU

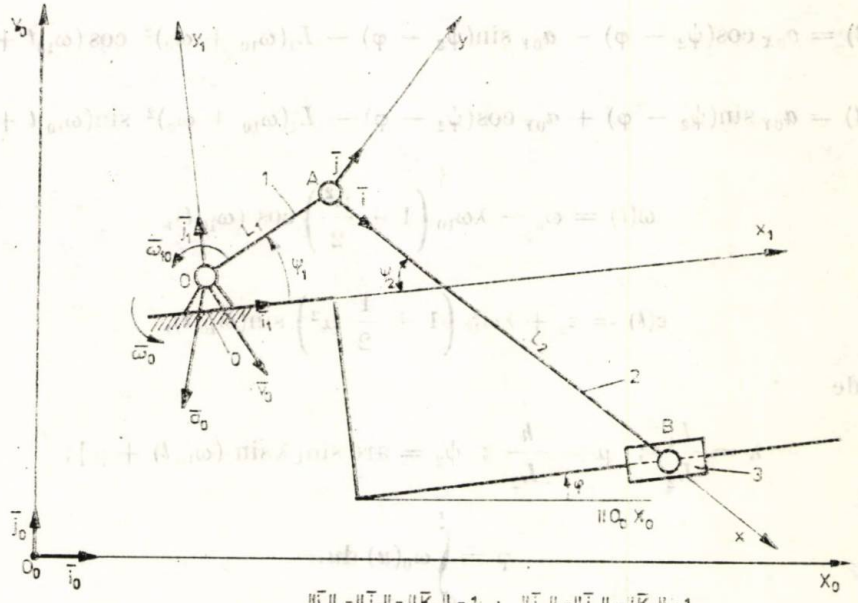
Universitatea din Craiova

În lucrare se abordează analiza vibrațiilor mecanismelor R(RRT) cu biela liniar-elastică. Baza mecanismului se consideră mobilă, excitația aleatoare de tip rototranslație fiind aplicată prin bază.

Folosind ecuații de mișcare pe model decuplat, se studiază vibrația aleatoare transversală a bielei, determinînd răspunsul dinamic și caracteristicile acestuia : speranța matematică, funcția de autocorelație, dispersia etc. Se folosesc transformările integrale Laplace și Fourier finite.

1. MODELUL MATEMATIC AL MIȘCĂRII

Se consideră un mecanism R(RRT) (fig. 1), cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_{10}$ a elementului motor (1) în raport cu baza (0), constantă.



$$\|\bar{i}_0\| = \|\bar{j}_0\| = \|\bar{K}_0\| = 1 \quad ; \quad \|\bar{i}_1\| = \|\bar{j}_1\| = \|\bar{K}_1\| = 1$$

$$\|i\| = \|j\| = \|K\| = 1 \quad ; \quad \bar{K}_0 = \bar{K}_1 = \bar{K}$$

Fig. 1. — Mecanism R(RRT) cu baza mobilă.

Se presupune că baza are o rototranslație plană $[\bar{v}_0 ; \bar{a}_0 ; \bar{\omega}_0 ; \bar{\varepsilon}_0]$ cu elementele funcții aleatoare de timp cunoscute

$$\bar{v}_0 = v_{0x}(t)\,\bar{i}_0 + v_{0y}(t)\,\bar{j}_0 ; \quad \bar{a}_0 = a_{0x}(t)\bar{i}_0 + a_{0y}(t)\,\bar{j}_0,$$
$$\bar{\omega}_0 = \omega_0(t)\bar{k}_0, \quad \bar{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0(t)\bar{k}_0. \tag{1}$$

Fie $[\bar{v}_A ; \bar{a}_A ; \bar{\omega}_2 ; \bar{\varepsilon}_2]$ rotrotranslaţia plană instantanee a bielei (2)

$$\bar{v}_A = v_1\bar{i} + v_2\bar{j} ; \bar{a}_A = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} ; \tag{2}$$

$$\bar{\omega}_2 = \omega\bar{k} ; \quad \bar{\varepsilon}_2 = \varepsilon\bar{k}.$$

După calcule se obţine

$$v_1(t) = v_{0X}\cos(\psi_2 - \varphi) - v_{0Y}\sin(\psi_2 - \varphi) - L_1(\omega_{10} + \omega_0) \times$$

$$\times \sin(\omega_{10}t + \psi_2), \tag{3}$$

$$v_2(t) = v_{0X}\sin(\psi_2 - \varphi) + v_{0Y}\cos(\psi_2 - \varphi) + L_1(\omega_{10} + \omega_0) \times$$

$$\times \cos(\omega_{10}t + \psi_2), \tag{4}$$

$$a_1(t) = a_{0X}\cos(\psi_2 - \varphi) - a_{0Y}\sin(\psi_2 - \varphi) - L_1(\omega_{10} + \omega_0)^2 \cos(\omega_{10}t + \psi_2), \tag{5}$$

$$a_2(t) = a_{0Y}\sin(\psi_2 - \varphi) + a_{0Y}\cos(\psi_2 - \varphi) - L_1(\omega_{10} + \omega_0)^2 \sin(\omega_{10}t + \psi_2), \tag{6}$$

$$\omega(t) = \omega_0 - \lambda\omega_{10}\left(1 + \frac{\mu^2}{2}\right)\cos(\omega_{10}t), \tag{7}$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + \lambda\omega_{10}^2\left(1 + \frac{1}{2}\mu^2\right)\sin(\omega_{10}t), \tag{8}$$

unde

$$\lambda = \frac{L_1}{L_2} ; \quad \mu = \frac{h}{L_2} ; \quad \psi_2 = \arcsin[\lambda\sin(\omega_{10}t) + \mu] ;$$

$$\varphi = \int_0^t \omega_0(u)\,du.$$

În calculul lui $\omega(t)$ şi $\varepsilon(t)$ s-a folosit o dezvoltare binominală, cu neglijarea termenilor în $\lambda^2, \lambda^3, \ldots, \lambda$ fiind considerat mic.

Elementele rototranslaţiei bielei (2) s-au calculat în ipoteza că barele (1), (2) şi baza (0) sînt rigide.

Se studiază numai vibraţia transversală a bielei, folosind ca ecuaţie de mişcare [1]:

$$EI\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \omega^2\rho A u + [\rho A a_2 + \rho A\omega v_1 + \rho A\varepsilon x - f] = 0, \tag{9}$$

corespunzătoare modelului decuplat.

S-a notat

EI — rigiditatea la încovoiere; A — aria secțiunii transversale; ρ — masa specifică; $u(x, t)$ — elongația (deplasarea) în vibrația transversală; $f(x, t)$ — forța pe unitatea de lungime.

Ecuația (9) corespunde modelului liniar-elastic.

Se consideră condițiile inițiale:

$$u(x, 0) = 0\,; \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \tag{10}$$

și condițiile de limită:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L, t) = 0, \tag{11}$$

unde s-a notat

$$L_2 = L.$$

Fie $[0\,; t_f] \equiv [0\,; t_n]$ intervalul temporal de observare a mișcării. Fie $d_n = \{t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_k < t_{k+1} < \ldots t_{n-1} < t_n = t_f$ o diviziune a intervalului $[0, t_f]$ construită astfel ca pe oricare dintre subintervalele $[t_k\,; t_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-2}$, elementele $v_1, v_2, a_1, a_2, \omega, \varepsilon$ ale rototranslației bielei să fie constante (egale cu o valoare medie). Fie astfel $v_i(t) = v_{ik}$, $a_i(t) = a_{ik}$, $\omega(t) = \omega_k$, $\varepsilon(t) = \varepsilon_k$, $i = \overline{1, 2}$, $t \in [t_k\,; t_{k+1}]$. Asupra modului lor de calcul se va reveni. Fie $u_k(x, t)$ răspunsul dinamic pentru $k \in [t_k\,; t_{k+1}]$.

Se poate scrie:

$$u(x, t) = u_0(x, t) + \sum_{k=0}^{k=n-2} [u_{k+1}(x, t) - u_k(x, t)]\, H(t - t_{k+1}), \tag{12}$$

unde $H(t)$ este distribuția Heaviside.

Aplicînd succesiv ecuației (9) transformata Laplace unilaterală, în raport cu timpul, și transformata Fourier finită în sinus, în raport cu abscisa x, $x \in [0, L]$, se obține după inversare soluția pe $[t_k\,; t_{k+1}]$,

$$u(x, t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\rho A \sqrt{c^2 \alpha_n^4 + \omega_k^2}} \int_0^t f^*(n, \tau) \sin \left[\sqrt{c^2 \alpha_n^4 + \omega_k^2}\,(t - \tau)\right] \mathrm{d}\tau + \right. \tag{13}$$

$$\left. + \frac{2\Phi_k(n)}{c^2 \alpha_n^4 + \omega_k^2} \sin^2 \left(\frac{t}{2} \sqrt{c^2 \alpha_n^4 + \omega_k^2} \right) \right\} \sin \alpha_n x,$$

unde

$$\Phi_k(n) = -(a_{2k} + \omega_k v_{1k}) \frac{L}{n\pi} [1 + (-1)^{n+1}](-\varepsilon_k(-1)^{n+1} \frac{L^2}{n\pi}, \tag{14}$$

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{L},\ n \in N\,;\ f^*(n, \tau) = \int_0^L f(x, \tau) \sin \alpha_n x \, \mathrm{d}x.$$

Înlocuind (14) în (12) se obține deplasarea transversală $u(x, t)$ ca funcție aleatoare de timp.

Se fac, mai jos, o serie de precizări privind determinarea concretă a „constantelor" v_{1k}, v_{2k}, a_{1k}, a_{2k}, ω_k, ε_k.

Se consideră că diviziunea d_n are pasul constant $h = t_{k+1} - t_k$, $\forall k$.

Fie p numărul realizărilor cunoscute pentru funcțiile aleatoare $v_{0X}(t)$, $v_{0Y}(t)$, $a_{0X}(t)$, $a_{0Y}(t)$, $\omega_0(t)$, $\varepsilon_0(t)$.

Notăm cu $v_{0X,k}$, $v_{0Y,k}$, $a_{0X,k}$, $a_{0Y,k}$, ω_{0k}, ε_{0k} numerele aleatoare care reprezintă media fiecăreia din cele p realizări în intervalul $[t_k, t_{k+1}] \equiv [kh\,;\ (k+1)h]$.

Spre exemplu, dacă notăm cu $\omega_0^{(1)}(t), \ldots, a_0^{(p)}(t)$ cele p realizări ale funcției aleatoare $\omega_0(t)$, atunci ω_{0k} este dat de mulțimea de constante aleatoare :

$$\omega_{0k} = \left\{ \frac{1}{h} \int_{kh}^{(k+1)h} \omega_0^{(1)}(t)\mathrm{d}t\,;\ \ldots\ ;\ \frac{1}{h} \int_{kh}^{(k+1)h} \omega_0^{(p)}(t)\,\mathrm{d}t \right\}.$$

Mărimile v_{1k}, v_{2k}, a_{1k}, a_{2k}, ω_k, ε_k se calculează prin mediere, în raport cu timpul, în intervalul $[t_k\,;\ t_{k+1}] \equiv [kh\,;\ (k+1)h]$.

Folosind (7) și (8) se obține

$$\omega_k = \omega_{0k} - \frac{1}{h}\left\{ \lambda(2+\mu^2) \sin\left(\frac{h\omega_{10}}{2}\right) \cos\left[\frac{(2k+1)h}{2}\,\omega_{10}\right]\right\}, \tag{15}$$

$$\varepsilon_k = \varepsilon_{0k} + \frac{1}{h}\left\{ \lambda\omega_{10}(2+\mu^2) \sin\left(\frac{h\omega_{10}}{2}\right) \sin\left[\frac{(2k+1)h}{2}\,\omega_{10}\right]\right\}. \tag{16}$$

Medierea pentru calculul mărimilor v_{1k}, v_{2k}, a_{1k} a_{2k} se poate face numeric subdivizînd intervalul $[t_k\,;\ t_{k+1}] \equiv [kh\,;\ (k+1)h]$ în r subintervale de pas egal cu $h_1 = \dfrac{h}{r}$, r fiind adoptat apriori în funcție de precizia dorită în calcul.

Se obține :

$$v_{1k} = \frac{h_1}{2h}\left[v(kh) + v_1(kh + nh_1) + 2\sum_{i=1}^{r-1} v_1(kh + ih_1)\right], \tag{17}$$

și expresii analoage pentru v_{2k}, a_{1k}, a_{2k}.

Se poate scrie :

$$v_1(kh + ih_1) = v_{0X;k}\cos[\psi_2(kh + ih_1) - \varphi_k] - v_{0Y,k}\sin[\psi_2(kh + ih_1) - \varphi_k] - L_1(\omega_{10} + \omega_{0k})\sin[\omega_{10}(kh + ih_1) + \psi_2(kh + ih_1)], \tag{18}$$

$$v_2(kh + ih_1) = v_{0X,k}\sin[\psi_2(kh + ih_1) - \varphi_k] + v_{0Y,k}\cos[\psi_2(kh + ih_1) - \varphi_k] + L_1(\omega_{10} + \omega_{0k})\cos[\omega_{10}(kh + ih_1) + \psi_2(kh + ih_1)], \tag{19}$$

$$a_1(kh + ih_1) = a_{0X,k} \cos[\psi_2(kh + ih_1) - \varphi_k] - a_{0Y,k} \sin[\psi_2(kh +$$

$$+ ih_1) - \varphi_k] - L_1(\omega_{10} + \omega_{0k})^2 \cos[\omega_{10}(kh + ih_1) + \psi_2(kh + ih_1)], \quad (20)$$

$$a_2(kh + ih_1) = a_{0X,k} \sin[\psi_2(kh + ih_1) - \varphi_k] + a_{0Y,k} \cos[\psi_2(kh +$$

$$+ ih_1) - \varphi_k] - L_1(\omega_{10} + \omega_{0k})^2 \sin[\omega_{10}(kh + ih_1) + \psi_2(kh + ih_1)], \quad (21)$$

unde φ_k este mulțimea de constante aleatoare

$$\varphi_k = \left\{ \frac{1}{h} \int_{kh}^{(k+1)h} \varphi^j(t)\, dt \mid j = \overline{1, p} \right\}.$$

Caz particular: $\varphi \equiv 0$; $\omega_0 \equiv 0$; $v_{0X} = \text{const.}$ (cunoscută); $a_{0X} \equiv 0$; $v_{0Y}(t)$, $a_{0Y}(t)$ — variabile aleatoare.

Cazul corespunde vibrațiilor aleatoare pe direcția oy, transmise prin bază.

Se neglijează influența forțelor exterioare pe bielă: $f = 0$.

Soluția (13) devine

$$u_k(t) = \frac{4}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_k(n) \sin^2\left(\frac{t}{2}\sqrt{c^2\alpha_n^4 + \omega_k^2}\right)}{c^2\alpha_n^4 + \omega_k^2} \sin(\alpha_n x), \quad (22)$$

unde

$$\omega_k = -\frac{1}{h}\left\{\lambda(2 + \mu^2) \sin\left(\frac{h\omega_{10}}{2}\right) \cos\left[\frac{(2k+1)h}{2}\omega_{10}\right]\right\}, \quad (23)$$

$$\varepsilon_k = \frac{1}{h}\left\{\lambda\omega_{10}(2 + \mu^2) \sin\left(\frac{h\omega_{10}}{2}\right) \sin\left[\frac{(2k+1)h}{2}\omega_{10}\right]\right\}, \quad (24)$$

$$a_{2k} = \frac{h_1}{2h}\left[a_{0Y,k} S(kh) + a_{0Y,k} S(kh + rh_1) + \right.$$

$$\left. + 2\sum_{i=1}^{r-1} a_{0Y,k} S(kh + ih_1)\right] - L\omega_{10}^2 F, \quad (25)$$

$$v_{1k} = -\frac{h_1}{h}[v_{0Y,k}(\lambda \sin(\omega_{10} kh) + \mu) + v_{0Y,k}(\lambda \sin(\omega_{10}(kh + ih_1) + \mu)] - L\omega_{10}F, \quad (26)$$

$$F = \frac{1 - \mu^2}{\omega_{10}} \sin\left(\frac{h\omega_{10}}{2}\right) \sin\left[\frac{(2k+1)h\omega_{10}}{2}\right] - \frac{\mu\lambda}{2\omega_{10}}\left[h -\right.$$

$$-\sin\left(\frac{h\omega_{10}}{2}\right)\cos\left(\frac{(2k+1)h\,\omega_{10}}{2}\right)\Bigg]-\frac{\lambda^2}{6\omega_{10}}[\cos^3((k+1)h\,\omega_{10})-$$

$$-\cos^3(kh\omega_{10})-\frac{\lambda^2}{\omega_{10}}\sin\left[\frac{(2k+1)h\omega_{10}}{2}\right]\sin\left(\frac{h\omega_{10}}{2}\right)+$$

$$+\frac{\lambda}{2\omega_{10}}\sin[(2k+1)h\omega_{10}]\cos(h\omega_{10})+\frac{\mu}{2\omega_{10}}\sin\left[\frac{(2k+1)h\omega_{10}}{2}\right]\times\cos\left(\frac{h\omega_{10}}{2}\right), \tag{27}$$

$$S(t)=1-\frac{\lambda^2}{2}\sin^2(\omega_{10}\,t)-\frac{\mu^2}{2}-\mu\lambda\sin(\omega_{10}\,t). \tag{28}$$

2. PARAMETRII CARACTERISTICI AI VIBRAȚIEI ALEATOARE

Se consideră că viteza unghiulară aleatoare $\omega_0(t)$ a bazei este suficient de mică ca efectul ei să fie neglijabil.

Se va pune deci $\omega_0 \cong 0$, $\varepsilon_0 \cong 0$.

Este suficient să se calculeze parametrii caracteristici ai răspunsului dinamic $u_k(x, t)$, $t \in [t_k; t_{k+1}]$ pentru răspunsul global utilizîndu-se relația (12). Scopul îl constituie determinarea parametrilor caracteristici ai variabilei aleatoare $u_k(x, t)$ în funcție de parametrii caracteristici ai excitației, care sînt determinabili pe baza cunoașterii realizărilor funcțiilor aleatoare $v_{0x}(t)$, $v_{0y}(t)$, $a_{0x}(t)$, $a_{0y}(t)$ prin metodele cunoscute.

Se poate scrie

$$u_k(x,\,t)=A_k(t,\,n)+B_k(t,\,n)\,\Phi_k(n), \tag{29}$$

unde

$$A_k(t,\,n,\,x)=\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\int_0^t f^*(n,\tau)\{\sin[\sqrt{c^2\alpha_n^4+\omega_k^2}(t-\tau)]\,\mathrm{d}\tau\}\sin(\alpha_n\,x)}{\rho A\sqrt{c^2\alpha_n^4+\omega_k^2}}, \tag{30}$$

$$B_k(t,\,n,\,x)=\frac{4\sin(\alpha_n\,x)}{L(c^2\alpha_n^4+\omega_k^2)}\sin^2\left(\frac{t}{2}\sqrt{c^2\alpha_n^4+\omega_k^2}\right). \tag{31}$$

În (29) $\Phi(n)$ este o variabilă aleatoare, ai cărei parametri se determină cu metodele cunoscute, folosind relația de definiție (14). Se presupun astfel cunoscute speranța matematică ($m_{\Phi k}$), dispersia, valoarea medie pătratică etc.

Speranța matematică a funcției $u_k(x, t)$ este

$$m_{u_k}(x,\,t)=A_k(t,\,x,\,n)+B_k(t,\,x,\,n)\,m_{\Phi_k}(n), \tag{32}$$

unde

$$m_{\Phi_k} = -(m_{a_{2k}} + \omega_k m_{V_{1k}}) \frac{L}{n\pi} [1 + (-1)^{n+1}] - \varepsilon_k (-1)^{n+1} \frac{L^2}{n\pi}. \quad (33)$$

Fie $t \in [t_k ; t_{k+1}]$, $t' \in [t_s ; t_{s+1}]$, $k \neq s$.

Funcția de autocorelație pentru $u(x, t)$ este

$$K_u(x, t, t') = B_k(t, x, n)\, B_s(t', x, n)\, [m_{\Phi_k \Phi_s} - m_{\Phi_k} m_{\Phi_s}]. \quad (34)$$

Dispersia este

$$D_u(x, t) = [B_k(t, x, n)]^2 \cdot [m_{\Phi_k^2} - (m_{\Phi_k})^2] \quad (35)$$

pentru $t \in [t_k ; t_{k+1}]$.
Valoarea medie pătratică este

$$\sigma_u(x, t) = \sqrt{D_u(x, t)}, \; t \in [t_k ; t_{k1}], \quad (36)$$

iar funcția de autocorelație normată va fi

$$r_u(x, t, t') = \frac{m_{\Phi_k \Phi_s} - m_{\Phi_k} m_{\Phi_s}}{\sqrt{[m_{\Phi_k^2} - (m_{\Phi_k})^2][m_{\Phi_s^2} - (m_{\Phi_s})^2]}} \quad (37)$$

3. CONCLUZIE

Relațiile de calcul prezentate permit analiza vibrației liniar-elastice a bielei unui mecanism R(RRT), cunoscînd caracteristicile statistice ale excitației prin bază.

Aplicația este imediată, în special la mecanismele R(RRT) ale mașinilor agricole, excitația prin bază fiind dependentă de caracteristicile terenului.

Primită la redacție la 3 ianuarie 1983

BIBLIOGRAFIE

1. M. BUCULEI, *Mouvements aléatoires des mécanismes plans à éléments déformables*, Rev. Roum. Sci. Techn. Méc. Appl., 2 (1981).
2. F. DINICĂ, C. TEODOSIU, *Vibrații neliniare și aleatoare*, Edit. Acad. R. S. România, București, 1969.
3. CHR. PELECUDI, *Precizia mecanismelor*, Edit. Academiei R. S. România, București, 1975.
4. V. A. SVETLIȚKI, *Sluciainie Kolebania mehaniceskih sistem*, Mașinostraienie, Moskva, 1976.

UN PROCEDEU DE DETERMINARE A MODURILOR PROPRII DE VIBRAȚIE LA SISTEMELE VIBRANTE CU DEPLASĂRI DE RIGID

de SORIN DUMITRU MUȘAT,

Universitatea din Galați

În lucrare este prezentat un procedeu de determinare a modurilor proprii de vibrație la sisteme vibrante cu deplasări de rigid. Eliminarea pulsațiilor nule ale sistemului și a singularității matricei de rigiditate se realizează prin separarea deplasărilor elastice de cele de rigid. Se prezintă mai multe forme ale ecuației matriceale a modurilor proprii de vibrație.

1. NOȚIUNI INTRODUCTIVE

Fie un sistem de rigide (C_i) reprezentînd un sistem vibrant; se consideră că forțele care se dezvoltă în sistem sînt numai forțe interioare liniar elastice și, eventual, forțe de legătură din legăturile exterioare pasive (fig.1). Fie N numărul gradelor de libertate ale sistemului, reprezentînd suma

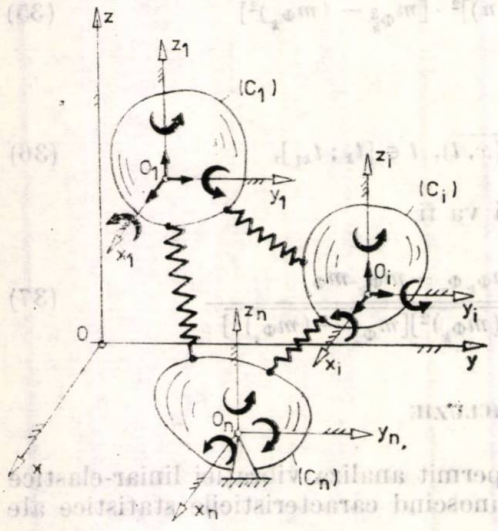


Fig. 1

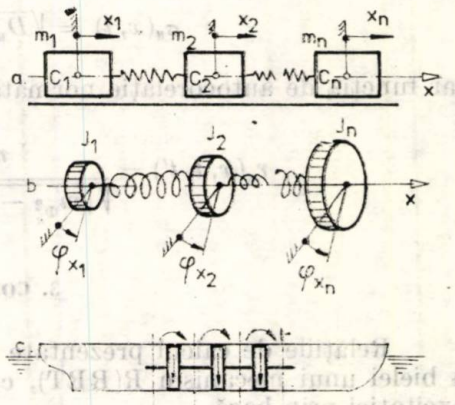


Fig. 2

gradelor de libertate ale maselor sale. Ne referim la situațiile în care prin rigidizarea legăturilor elastice, corespunzător stării nedeformate a acestora, sistemul vibrant se reduce la un rigid. Îl vom numi *sistemul solidificat*. În figura 2 sînt reprezentate cîteva astfel de situații; în figura 2*c* este arătat un astfel de sistem vibrant, servind la modelarea vibrațiilor de încovoiere ale grinzii navă, obținut prin concentrarea caracteristicilor de inerție.

Dacă legăturile exterioare permit mobilitatea sistemului solidificat se spune că sistemul vibrant prezintă deplasări de rigid. Fie $1 \leqslant n \leqslant 6$ numărul gradelor de libertate ale sistemului solidificat. Oricînd se pot alege cei N parametri de poziție ai sistemului vibrant astfel ca printre aceștia să

St. Cerc. Mec. Apl., Tom 43, Nr. 1, 1984, P. 46–52

se găsească și cei n parametri de poziție ai sistemului solidificat. Se consideră că parametrii de poziție ai sistemului vibrant sînt deplasări ale maselor față de o poziție a sistemului solidificat admisă ca referință (fig. 1).

Vibrațiile libere ale unui astfel de sistem apar ca mici oscilații în jurul unei poziții oarecare a sistemului solidificat. Matricele de rigiditate, $[K]$, și de inerție, $[M]$, ale sistemului sînt de dimensiuni $N \times N$, matricea $[K]$ fiind singulară. Sistemul vibrant prezintă un număr de pulsații nule egal cu numărul gradelor de libertate, n, ale sistemului solidificat.

Vom defini o *deplasare de rigid independentă* a sistemului vibrant, o deplasare a sistemului solidificat din poziția de referință, deplasare determinată de o valoare arbitrară, în particular unitară, a unuia din cei n parametri de poziție ai săi, ceilalți $n - 1$ fiind menținuți cu valoare nulă. Notînd cu $\{\Delta\}$ un vector cuprinzînd deplasările maselor sistemului vibrant într-o deplasare de rigid independentă, se pot construi un număr de n astfel de vectori,

$$\{\Delta\} = \{\Delta_1, \ldots, \Delta_{N-n}, \Delta_{N-n+1}, \ldots \Delta_N\}_k, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

în care $\Delta_{N-n+1}, \ldots, \Delta_N$ sînt parametrii ce definesc deplasarea de rigid independentă, unul nenul, ceilalți $n - 1$ nuli; valorile deplasărilor $\Delta_1 \ldots, \Delta_{N-n}$ se exprimă cu ajutorul valorilor $\Delta_{N-n+1}, \ldots, \Delta_N$ fie din considerente geometrice, fie pe baza relațiilor evidente:

$$[K]\{\Delta\}_k = 0, \; k = 1, \ldots, n.$$

Acestea se pot partiționa în forma:

$$\left[\begin{array}{c|c} [\tilde{K}] & [K^*] \\ \hline \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \{\tilde{\Delta}\} \\ \hline \{\Delta_r\} \end{array}\right\}_k = \left\{\begin{array}{c} \{0\} \\ \hline \{0\} \end{array}\right\}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

S-a notat $\{\Delta_r\}_k = [\Delta_{N-n+1}, \ldots, \Delta_N]_k^T$ un vector construit cu valorile parametrilor de poziție ai sistemului solidificat, corespunzător unei deplasări de rigid independente. Se pot extrage sistemele de ecuații algebrice liniare:

$$[\tilde{K}]\{\tilde{\Delta}\}_k = -[K^*]\{\Delta_r\}_k, \quad k = 1, \ldots, n,$$

pentru care se poate realiza o rezolvare simultană pe toate variantele. O dată determinați vectorii $\{\tilde{\Delta}\}_k$, se pot completa vectorii $\{\Delta\}_k$.

2. ELIMINAREA DEPLASĂRILOR DE RIGID

Fie ecuațiile de mișcare ale sistemului vibrant, în formă matriceală,

$$[M]\{\ddot{X}\} + [K]\{X\} = \{0\}, \tag{2}$$

în care $\{X\}$ este vectorul deplasărilor maselor sistemului față de poziția sistemului solidificat admisă ca referință. Căutînd soluții ce reprezintă

mișcări oscilatorii armonice și în fază, $\{X\} = \{V\} \sin pt$, din (2) se obțin ecuațiile modurilor proprii de vibrație :

$$[K]\{V\} = p^2[M]\{V\}, \tag{3}$$

unde p reprezintă puslații proprii, iar $\{V\}$ vectorii formelor proprii de vibrație.

În cazul unor modele de sisteme vibrante cu un număr mare de grade de libertate, așa cum sînt modelele obținute pentru sistemele cu masă distribuită prin concentrarea maselor sau prin aplicarea metodei elementelor finite, este necesară utilizarea calculului automat. În legătură cu aceasta, existența pulsațiilor nule (singularitatea matriei $[K]$) introduce o serie de inconveniente legate de tehnica de calcul. Aceste inconveniente pot fi înlăturate procedînd la eliminarea parametrilor de poziție ai sistemului solidificat. Pentru aceasta se observă că în procesul vibrației libere a sistemului are loc un echilibru al forțelor (cuplurilor) de inerție pe direcția gradelor de libertate ale sistemului solidificat (nu există reacțiuni dinamice pe aceste direcții). În formă energetică condițiile de echilibru dinamic se vor exprima prin condițiile ca lucrul mecanic al forțelor de inerție aferente unui mod propriu de vibrație, efectuat pe deplasările maselor corespunzătoare unei deplasări de rigid a sistemului vibrant, să fie nul. Cu particularitățile calculului în domeniul micilor deplasări aceste condiții se scriu :

$$\{\Delta_r\}_k^T(p^2([M]\{V\}) = 0, \; k = 1, \ldots, n,$$

încît pentru $p \neq 0$ se poate reține :

$$\{\Delta_r\}_k^T[M]\{V\} = 0, \; k = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Relațiile (4) se pot scrie concentrat, matriceal :

$$[\psi]\{V\} = \{0\}, \tag{5}$$

cu

$$[\psi] = \begin{bmatrix} \{\Delta_r\}_1^T \\ \vdots \\ \{\Delta_r\}_n^T \end{bmatrix} [M]. \tag{6}$$

Punînd în evidență dimensiunile matricelor, ecuațiile (5) și (3) se vor scrie :

$$[\psi]_{n\times N}\{V\}_{N\times 1} = \{0\}_{n\times 1}, \tag{7}$$

$$[K]_{N\times N}\{V\}_{N\times 1} = p^2[M]_{N\times N}\{V\}_{N\times 1}. \tag{8}$$

Se partiționează matricele din (7) și (8) în felul următor :

$$[[\tilde{\psi}]_{n\times(N-n)} \vdots [\psi^*]_{n\times n}] \left\{ \begin{array}{c} \{\tilde{V}\}_{(N-n)\times 1} \\ \hdashline \{V_r\}_{n\times 1} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \{0\} \\ \hdashline \{0\} \end{array} \right\}, \tag{9}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} [\tilde{K}]_{(N-n)\times(N-n)} & [K^*]_{(N-n)\times n} \\ \hline [K^*]^T_{n\times(N-n)} & [\tilde{k}]_{n\times n} \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\{\tilde{V}\}\\ \hline \{V_r\}\end{array}\right\} =$$

$$= p^2\left[\begin{array}{c|c} [\tilde{M}]_{(N-n)\times(N-n)} & [M^*]_{(N-n)\times n} \\ \hline [M^*]^T_{n\times(N-n)} & [\tilde{m}]_{n\times n} \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\{\tilde{V}\}\\ \hline \{V_r\}\end{array}\right\}. \tag{10}$$

Se desfășoară produsele de submatrice din (9) și (10):

$$[\tilde{\psi}]\{\tilde{V}\} + [\psi^*]\{V_r\} = \{0\}, \tag{11}$$

$$[\tilde{K}]\{\tilde{V}\} + [K^*]\{V_r\} = p^2([\tilde{M}]\{\tilde{V}\} + [M^*]\{V_r\}), \tag{12'}$$

$$[K^*]^T\{\tilde{V}\} + [\tilde{k}]\{V_r\} = p^2([M^*]\{\tilde{V}\} + [\tilde{m}]\{V_r\}). \tag{12''}$$

Din relația (9) se pot exprima parametrii de poziție corespunzători deplasării de rigid în funcție de ceilalți parametri de poziție ai sistemului:

$$\{V_r\} = [\Phi]\{\tilde{V}\} \text{ cu } [\Phi]_{n\times(N-n)} = -[\psi_r]^{-1}_{n\times n}[\tilde{\psi}]_{n\times(N-n)}. \tag{13}$$

Introducînd $\{V_r\}$ dat de (13) în relația (12') se obține:

$$([\tilde{K}] + [K^*][\Phi])\{\tilde{V}\} = p^2([\tilde{M}] + [M^*][\Phi])\{\tilde{V}\}. \tag{14}$$

Notînd matricele din paranteze (matrice reduse) cu:

$$[K'_r] = [\tilde{K}] + [K^*][\Phi],\ [M'_r] = [\tilde{M}] + [M^*][\Phi],$$

relația (14) se scrie:

$$[K'_r]\{\tilde{V}\} = p^2[M'_r]\{\tilde{V}\}, \tag{15'}$$

cu $[K'_r]$ nesingulară și cu $[K'_r]$ și $[M'_r]$ nesimetrice, de dimensiuni $(N-n)\times(N-n)$. Relația (15') reprezintă o primă formă a ecuațiilor modurilor proprii de vibrație.

Introducînd acum $\{V_r\}$ dat de (13) în relația (12'') se obține:

$$([K^*]^T\{\tilde{V}\} + \{\tilde{k}\}[\Phi])\{\tilde{V}\} = p^2([M^*]^T\{V\} + [\tilde{m}][\Phi]\{V\}).$$

Preînmulțită cu $[\Phi]^T$, ultima relație devine:

$$([\Phi]^T[K^*]^T + [\Phi]^T[\tilde{k}][\Phi])\{\tilde{V}\} =$$

$$= p^2([\Phi]^T[M^*]^T + [\Phi]^T[\tilde{m}][\Phi])\{\tilde{V}\}.$$

Notînd matricele din paranteze (matrice reduse) cu :

$$[K_r''] = [\Phi]^T[K^*]^T + [\Phi]^T[\tilde{k}][\Phi], \quad [M_r''] = [\Phi]^T[M^*]^T + [\Phi]^T[\tilde{m}][\Phi],$$

se obține o nouă formă a ecuației matriceale a modurilor proprii de vibrație :

$$[K_r'']\{\tilde{V}\} = P^2[M_r'']\{\tilde{V}\}, \tag{15''}$$

cu $[K_r'']$ nesingulară și cu $[K_r'']$ și $[M_r'']$ nesimetrice.

O altă formă a ecuației matriceale a modurilor proprii de vibrație se poate obține însumînd relațiile (15') și (15''), adică

$$[K_r]\{\tilde{V}\} = P^2[M_r]\{\tilde{V}\}, \tag{16}$$

cu

$$[K_r] = [K_r'] + [K_r''], \quad [M_r] = [M_r'] + [M_r''],$$

care se desfășoară :

$$[K_r] = [\tilde{K}] + [K^*][\Phi] + ([K^*][\Phi])^T + [\Phi]^T[\tilde{k}][\Phi],$$

$$[M_r] = [\tilde{M}] + [M^*][\Phi] + ([M^*][\Phi])^T + [\Phi]^T[\tilde{m}][\Phi].$$

Ținînd cont că matricele $[\tilde{K}]$, $[\tilde{k}]$, $[\tilde{M}]$, $[\tilde{m}]$ sînt simetrice, că produsele de forma $[\Phi]^T$[simetrică]$[\Phi]$ sînt matrice simetrice și că suma dintre o matrice pătrată și transpusa ei au ca rezultat o matrice simetrică, rezultă că matricele $[K_r]$ și $[M_r]$ sînt matrice simetrice ($[K_r]$ nesingulară).

Oricare din cele trei variante poate fi adusă la forma standard $[A]\{\tilde{V}\} = \lambda\{V\}$ cu $[A]$ nesimetrică. Pentru varianta din relația (16) există posibilitatea de a se aduce la forma standard $[A]\{x\} = \lambda\{x\}$ cu $[A]$ simetrică ([2]). Se va opta pentru una din variante în funcție de subrutina de care se dispune.

O dată determinate pulsațiile și vectorii $\{\tilde{V}\}$, cu relația (13) se pot exprima vectorii corespunzători $\{V_r\}$ cu care se completează vectorii $\{V\}$ ai formelor proprii de vibrație. Se obțin astfel vectorii $\{V\}_k$ și pulsațiile P_k, $k = 1, \ldots, N-n$.

3. EXEMPLIFICARE

Fie sistemul vibrant din figura 3 la care parametrul x_3, se alege pentru a defini deplasarea de rigid. Matricele de rigiditate și de inerție sînt :

$$[K] = k\left[\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right], \quad [M] = m\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

din care se extrag :

$$[\tilde{K}] = k\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad [K^*] = k\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad [\tilde{k}] = k[1];$$

$$M = m\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [M^*] = m\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [\tilde{m}] = m[1].$$

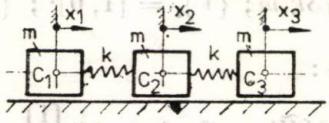


Fig. 3

Vectorul deplasării de rigid a sistemului (translaţia pe direcţia x) va fi

$$\{\Delta\}_1 = [1, 1, 1]^T,$$

încît

$$[\psi] = \{\Delta\}_1^T [M] = m[1, 1 \mid 1].$$

Se extrag :

$$[\tilde{\psi}] = m[1, 1], \quad [\psi_r] = m[1] \text{ cu care } [\Phi] = [-1, -1].$$

Pentru o soluţie cu matricele nesimetrice vom scrie :

$$[K_r'] = k\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - k\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}[-1, -1] = k\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}; \quad [M_r'] \equiv [\tilde{M}].$$

Ecuaţia modurilor proprii de vibraţie este

$$\left(k\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - p^2 m\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{17}$$

Pentru o soluţie cu matrice simetrice vom scrie în plus :

$$[K_r''] = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} k[0, -1) + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} k[1][-1, -1] = k\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$[M_r''] = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} m[0, 0] + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} m[1][-1, -1] = m\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

astfel încît :

$$[K_r] = k\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad [M_r] = m\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ecuaţia modurilor proprii de vibraţie este

$$\left(k\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 5\end{bmatrix} - p^2 m\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix}V_1\\ V_2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}. \tag{18}$$

Atît ecuaţia (17), cît şi ecuaţia (18) duc la aceleaşi rezultate :

$$p_1 = \sqrt{k/m};\ p_2 = \sqrt{3k/m};\ \{\tilde{V}\}_1 = [1, 0]^T;\ \{\tilde{V}\}_2 = [1, -2]^T.$$

Se evaluează vectorii $\{V_r\}$:

$$\{V_r\}_1 = [\Phi]\{\tilde{V}\}_1 = [-1, -1]\begin{Bmatrix}1\\ 0\end{Bmatrix} = \{-1\},$$

$$\{V_r\}_2 = [\Phi]\{\tilde{V}\}_2 = [-1, -1]\begin{Bmatrix}1\\ -2\end{Bmatrix} = \{1\},$$

astfel încît vectorii formelor proprii de vibraţie sînt :

$$\{V\}_1 = [1, 0, -1]^T,\ \{V\}_2 = [1, -2, 1]^T.$$

Primită la redacţie la 28 mai 1982

BIBLIOGRAFIE

1. C. S. DESAI, J. F. ABEL, *Introduction to the finite element method*, Van Nostrand, 1972.
2. J. S. PRSEMIENICKI, *Theory of matrix structural analysis*, McGraw-Hill, 1968.
3. D. MANGERON, N. IRIMICIUC, *Mecanica rigidelor cu aplicaţii în inginerie*, vol. III, Edit. tehnică, Bucureşti, 1981.
4. P. C. WANG, *Metode numerice şi matriceale în mecanica construcţiilor, cu aplicaţii la calculatoare*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1970.

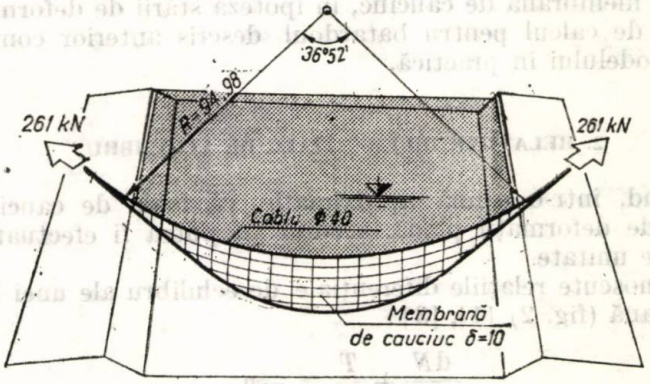
ASUPRA UNEI CURBE FUNICULARE *)

de MIRCEA V. SOARE și PETRE ȘUPROVICI
Institutul de construcții, București

Se descrie determinarea curbei funiculare în cazul aplicării unei sarcini triunghiulare. Soluția este obținută cu ajutorul integralelor eliptice. Se demonstrează că problema nu este posibilă decît dacă tensiunea în fir, respectiv în bandă, este mai mare decît o anumită valoare limită.

1. INTRODUCERE

În domeniul lucrărilor hidrotehnice de barare provizorie se preconizează uneori soluții cu batardouri din pînză de cauciuc. O astfel de soluție



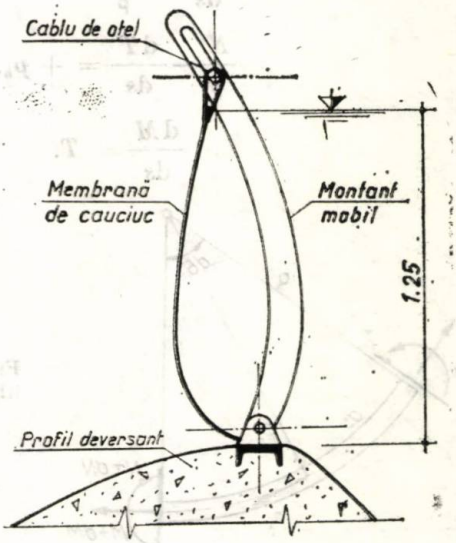


Fig. 1. — Batardoul din membrană de cauciuc.

*) Lucrare prezentată la Consfătuirea de Mecanică a solidelor (Cluj-Napoca, 5—6 noiembrie 1982) de primul autor.

St. Cerc. Mec. Apl., Tom. 43, Nr. 1, 1984, P. 53—65

a fost avută în vedere, ca variantă, pentru batardoul de intervenție de la U.H.Pitești, Argeș.

Batardoul menționat era alcătuit dintr-o membrană de cauciuc prinsă etanș după un arc de cerc, la partea inferioară, de pragul deversorului și lateral de culei. Batardoul se ridica prin întinderea unui cablu de oțel pe care culisau bridele de prindere a marginii superioare a membranei. Cablul de oțel era ancorat, la capete, în masive de beton amplasate la cele două maluri, iar întinderea lui se făcea cu ajutorul unui troliu. Un sistem de profiluri metalice articulate la bază și care se ridica prin întinderea cablului de oțel asigura rigiditatea pe direcția verticală a ansamblului (fig. 1).

În lucrare se dezvoltă un model de calcul al stării de eforturi și de deformații în membrana de cauciuc, în ipoteza stării de deformații plană. Un exemplu de calcul pentru batardoul descris anterior confirmă aplicabilitatea modelului în practică.

2. RELAȚIILE DIFERENȚIALE DE ECHILIBRU

Admițînd, într-o primă aproximație, că foaia de cauciuc se află într-o stare de deformații plană, studiul va putea fi efectuat pentru o fîșie de lățime unitate.

Sînt cunoscute relațiile diferențiale de echilibru ale unei bare avînd axa curbă plană (fig. 2) [1], [3]:

$$\frac{dN}{ds} + \frac{T}{\rho} = -p_t, \tag{1 a}$$

$$\frac{N}{\rho} - \frac{dT}{ds} = +p_n, \tag{1 b}$$

$$\frac{dM}{ds} = T. \tag{1 c}$$

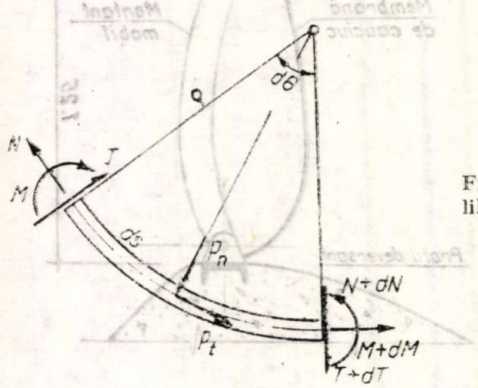


Fig. 2. — Exprimarea echilibrului unui element de cablu.

În condițiile unei bare perfect flexibile și a unei sarcini hidrostatice, avem

$$p_t = 0, \quad T = 0 \quad \text{și} \quad M = 0.$$

Ecuația (1 c) va fi identic verificată, iar (1 a), (1 b) se reduc la

$$\frac{dN}{ds} = 0, \tag{2 a}$$

$$\frac{N}{\rho} = p_n. \tag{2 b}$$

Din (2 a) rezultă $N = \text{const.}$, iar din (2 b) se deduce

$$N = p_n \rho = \text{const.}; \tag{3}$$

ea determină raza de curbură ρ, deci forma curbei funiculare, pentru un p_n dat.

Pentru presiunea hidrostatică avem

$$p_n = \gamma x \quad \text{cu} \quad x \in (0, l), \tag{4}$$

unde am presupus că oglinda lichidului este la capătul superior al barei.

3. ECUAȚIA DIFERENȚIALĂ A CURBEI FUNICULARE

Ținînd seama că raza de curbură este dată de expresia

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''},$$

din (3) și (4) se obține

$$\frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \frac{\gamma_x}{N}. \tag{5}$$

În (5) se poate integra o dată

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{\gamma}{2N}(x^2 + C_1), \tag{6}$$

unde C_1 reprezintă o constantă de integrare. Prima derivată poate fi explicitată

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\gamma}{2N}(x^2 + C_1)}{\sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4N^2}(x^2 + C_1)^2}}. \tag{7}$$

Ținînd seama de semnificația fizică a problemei, anume că pe deschiderea l există o secțiune în care tangenta la fibra medie deformată

este paralelă cu axa nedeformată (fig. 3), rezultă că $C_1 < 0$; vom lua $C_1 = -c^2l^2$, unde $c \in (0\,;1)$.

Ținînd seama de această notație, relația (7) devine

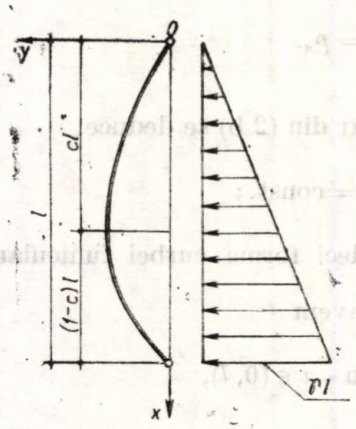


Fig. 3. — Încărcarea cablului cu sarcină triunghiulară.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\gamma}{2N}(x^2 - c^2l^2)}{\sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4N^2}(x^2 - c^2l^2)^2}}, \tag{8}$$

Integrînd odată expresia precedentă, se obține

$$y = \int_0^x \frac{\frac{\gamma}{2N}(x^2 - c^2l^2)}{\sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4N^2}(x^2 - c^2l^2)^2}}\,dx. \tag{9}$$

Prin fixarea limitei inferioare a integralei este satisfăcută condiția de rezemare în origine, anume ca pentru $x = 0$ să avem $y = 0$.

Constanta c urmează să fie precizată din condiția ca $y = 0$ pentru $x = l$.

Integrala din (9) este o *integrală eliptică*. Pentru aducerea ei la o formă canonică se fac substituțiile

$$\frac{\gamma}{2N}(x^2 - c^2l^2) = 1 - 2k^2\sin^2\varphi, \tag{10 a}$$

$$c^2 = -\frac{2N}{\gamma l^2}(1 - 2k^2). \tag{10 b}$$

Rezultă atunci

$$x = 2\sqrt{\frac{N}{\gamma}}\,k\cos\varphi;\quad \mathrm{d}x = -2\sqrt{\frac{N}{\gamma}}\,k\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi, \tag{11}$$

iar limitele devin : $x = 0 \to \varphi = \pi/2$ și $x \to \varphi$.

Se obține, în acest fel

$$y = \sqrt{\frac{N}{\gamma}}\int_0^{\pi/2}\frac{1-2k^2\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi = 2\sqrt{\frac{N}{\gamma}}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi -$$

$$-2\sqrt{\frac{N}{\gamma}}\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi - \sqrt{\frac{N}{\gamma}}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} +$$

$$+\sqrt{\frac{N}{\gamma}}\int_0^{\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\cdot \tag{12}$$

Dacă se introduc notațiile

$E(\varphi, k) = \int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\cdot\mathrm{d}\varphi$ integrala eliptică de speța a doua, de amplitudine φ și modul k,

$E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\cdot\mathrm{d}\varphi$ integrala eliptică completă de speța a doua,

$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ integrala eliptică de prima speță, de amplitudine φ și modul k,

$F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ integrala eliptică completă de prima speță,

ecuația curbei funiculare se scrie

$$y = \sqrt{\frac{N}{\gamma}}\left[2E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - 2E(\varphi, k) - F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) + F(\varphi, k)\right]. \tag{13}$$

Funcțiile eliptice sînt tabelate în funcție de variabilele φ și θ (unde $k = \sin\theta$) (vezi de exemplu [2]).

Pentru impunerea condiției la limită la capătul $x = l$, observăm că din (11) se deduce

$$\cos \varphi_1 = \frac{1}{2k} \sqrt{\frac{\gamma l^2}{N}} \tag{14 a}$$

sau

$$\varphi_1 = \arccos \left(\frac{1}{2k} \sqrt{\frac{\gamma l^2}{N}} \right). \tag{14 b}$$

Luînd $\varphi = \varphi_1$, expresia (13) se transformă în ecuația transcendentă

$$2E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - 2E(\varphi_1, k) - F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) + F(\varphi_1, k) = 0, \tag{15}$$

din a cărei rezolvare rezultă, în final, constanta c.

4. DISCUȚIA SOLUȚIEI

Întrucît rezolvarea directă a ecuației transcendente (15) este dificilă, s-a preferat rezolvarea numerică plecînd de la ecuația

$$\int_0^l \frac{\frac{\gamma}{2N}(x^2 - c^2 l^2)}{\sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4N^2}(x^2 - c^2 l^2)^2}} \, dx = 0. \tag{16}$$

În acest scop lungimea l a fost împărțită în 20 intervale egale. Pentru a ajunge la expresii adimensionale s-a notat

$$N = \alpha \cdot \gamma l^2 \tag{17}$$

și s-a făcut schimbarea de variabilă $x = \xi l$, $dx = l d\xi$; cu acestea, ecuația (16) devine

$$\int_0^1 \frac{\frac{1}{2\alpha}(\xi^2 - c^2)}{\sqrt{1 - \frac{1}{4\alpha^2}(\xi^2 - c^2)^2}} \, d\xi = 0, \tag{18}$$

iar rădăcinile c au fost determinate pentru diferite valori ale parametrului α.

Cînd α ia valori foarte mari (eforturi mari în bară), valoarea lui c poate fi obținută direct considerînd, sub radical, $1/4\alpha^2 \to 0$, adică neglijînd paranteza în raport cu unitatea. Rămîne de efectuat integrala

$$\int_0^1 (\xi^2 - c^2)\, d\xi = \left| \frac{\xi^3}{3} - c^2\xi \right|_0^1 = \frac{1}{3} - c^2,$$

de unde, din anularea ultimului membru, rezultă rădăcina convenabilă $c = 1/\sqrt{3} \approx 0{,}57735$, valoare care determină și poziția momentului încovoietor maxim la grinda simplu rezemată încărcată cu sarcină triunghiulară pe toată deschiderea.

Problema limitei inferioare este mai dificilă. Din condiția de existență a unei soluții reale, putem scrie inegalitatea

$$1 - \frac{1}{4\alpha^2}(\xi^2 - c^2)^2 > 0,$$

echivalentă cu inegalitățile

$$-1 < -\frac{c^2}{2\alpha} \leqslant \frac{1}{2\alpha}(\xi^2 - c^2) \leqslant \frac{1}{2\alpha}(1 - c^2) < 1.$$

De aici rezultă condițiile

$$c^2 > 1 - 2\alpha \text{ și } c^2 < 2\alpha. \tag{19}$$

La limită, cînd inegalitățile devin egalități, ecuațiile $c^2 = 1 - 2\alpha$ și $c^2 = 2\alpha$ reprezintă două parabole; graficele lor au fost reprezentate în figura 4. Cele două parabole se intersectează în punctul $\alpha = 1/4$, $c = 1/\sqrt{2}$.

Vom căuta să reprezentăm graficul $f(c, \alpha) = 0$ reprezentat de ecuația transcendentă (18). Conform celor stabilite precedent, graficul admite o asimptotă paralelă cu axa $O\alpha$, anume $c = 1/\sqrt{3}$.

Calculul numeric furnizează valori ale lui c pentru valori ale lui α de cel puțin 0,35. Pentru valori $\alpha < 0{,}35$ trebuie să se caute rezolvarea directă a ecuației transcendente (18).

Vom căuta punctul limită al curbei situat pe parabola $c^2 = 1 - 2\alpha$. Asociind relația (10 b) în care înlocuim pe N prin expresia (17), avem

$$c^2 = 1 - 2\alpha = -2\alpha(1 - 2k^2),$$

din care se deduce $4k^2\alpha = 1$ sau $2k\sqrt{\alpha} = 1$.

Mai departe, relația (14a) devine

$$\cos \varphi_1 = \frac{1}{2k} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = 1 \text{ sau } \varphi_1 = 0.$$

Cum $E(0, \theta) = F(0, \theta) = 0$, ecuația transcendentă (15) se reduce la

$$2E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = 0$$

sau

$$2E\left(\frac{\pi}{2}, \theta\right) - F\left(\frac{\pi}{2}, \theta\right) = 0,$$

în care am făcut substituția $k \to \theta$.

Cu ajutorul tabelelor [2], prin interpolare liniară rezultă $\theta = 65{,}355°$ și succesiv

$$k = \sin \theta = 0{,}90891; \qquad \alpha = \frac{1}{4k^2} = 0{,}30262;$$

$$c^2 = 1 - 2\alpha = 0{,}39476; \qquad c = 0{,}62830.$$

Rezolvarea poate fi făcută și direct utilizînd dezvoltările în serii de puteri ale funcțiilor $E\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$ și $F\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$, ajungîndu-se, în final, la ecuația

$$1 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2m+1}{2m-1} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2m)}\right)^2 k^{2m},$$

care determină aceeași valoare a rădăcinii k.

5. LUNGIMEA ARCULUI

Lungimea arcului s a curbei funiculare determinate precedent rezultă din relația

$$s = \int_0^l \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{1}{4\alpha^2}\left(\frac{x^2}{l^2} - c^2\right)^2}}.$$

Făcînd aceeași substituție (10 a), (10 b) se ajunge la expresia

$$s = l\sqrt{\alpha}\left[F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - F(\varphi_1, k)\right].$$

Cînd $\alpha \to \infty$, rezultă $s/l \to 1$. Pentru limita inferioară

$$\frac{s}{l} = \sqrt{\alpha} \cdot F(90°\,; 65{,}375°) = \sqrt{0{,}30252} \cdot 2{,}32 \approx 1{,}276.$$

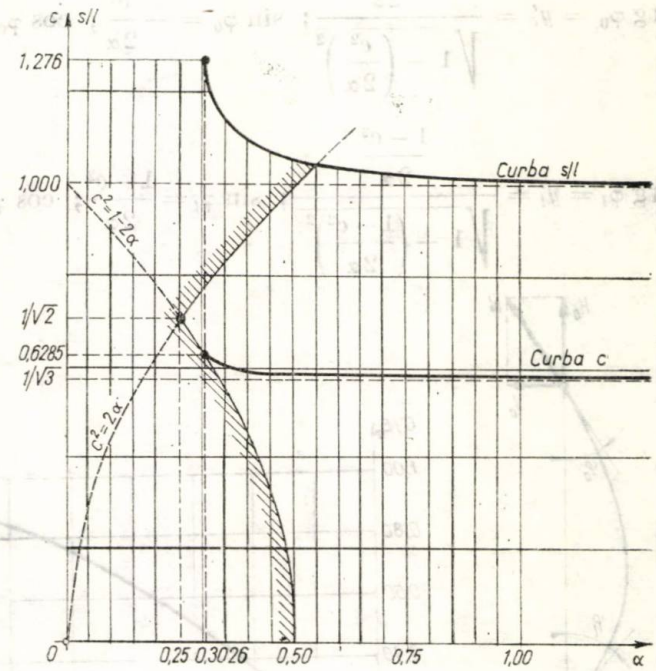


Fig. 4. — Variația lui c și s/l în funcție de parametrul încărcării α.

Variația raportului s/l în funcție de α este redată în figura 4. Pentru un calcul mai detaliat, în tabelul 1 au fost date valorile lui c și s/l în funcție de diferite valori ale lui α.

Tabelul 1

α	c	s/l	α	c	s/l
0,3025	0,62845	1,27600	0,55	0,58441	1,04197
0,35	0,60208	1,14024	0,60	0,58312	1,03444
0,36	0,59967	1,12750	0,65	0,58217	1,02883
0,37	0,59770	1,11684	0,70	0,58144	1,02452
0,38	0,59603	1,10773	0,75	0,58087	1,02113
0,39	0,59459	1,09984	0,80	0,58041	1,01841
0,40	0,59335	1,09292	0,85	0,58004	1,01620
0,41	0,59225	1,08679	0,90	0,57973	1,01435
0,42	0,59127	1,08133	0,95	0,57948	1,01283
0,43	0,59041	1,07643	1,00	0,57926	1,01153
0,44	0,58963	1,07200	1,50	0,57818	1,00502
0,45	0,58892	1,06799	2,00	0,57781	1,00280
0,46	0,58828	1,06433	3,00	0,57756	1,00124
0,47	0,58770	1,06099	4,00	0,57747	1,00070
0,48	0,58716	1,05792	5,00	0,57743	1,00045
0,49	0,58665	1,05509	10,00	0,57736	1,00011
0,50	0,58622	1,05248		0,57735	1,00000

Pentru calculul practic mai interesează pantele tangentelor la fibra medie deformată pe cele două reazeme. Avem (fig. 5)

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = y_0' = \frac{-\frac{c^2}{2\alpha}}{\sqrt{1-\left(\frac{c^2}{2\alpha}\right)^2}};\quad \sin\varphi_0 = -\frac{c^2}{2\alpha};\quad \cos\varphi_0 = \sqrt{1-\left(\frac{c^2}{2\alpha}\right)^2},$$

$$\operatorname{tg}\varphi_l = y_l' = \frac{\frac{1-c^2}{2\alpha}}{\sqrt{1-\left(\frac{1-c^2}{2\alpha}\right)^2}};\quad \sin\varphi_l = \frac{1-c^2}{2\alpha};\quad \cos\varphi_l = \sqrt{1-\left(\frac{1-c^2}{2\alpha}\right)^2}.$$

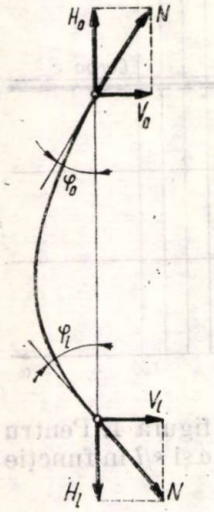


Fig. 5. — Reacţiunile de la capetele cablului.

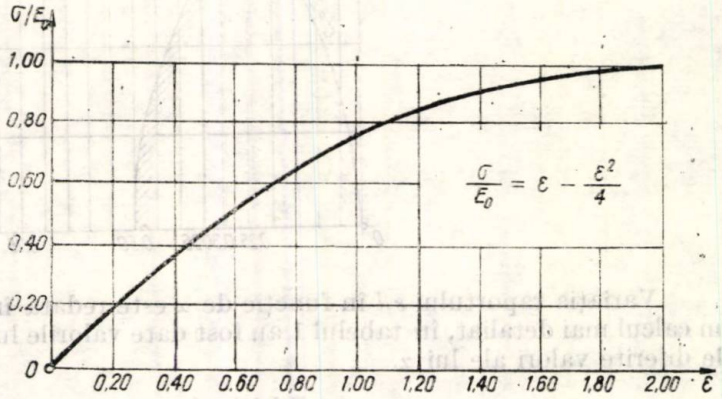


Fig. 6. — Curba caracteristică $\frac{\sigma}{E_0} - \varepsilon$.

Componentele reacţiunii sînt

$$H_0 = N\cos\varphi_0;\quad V_0 = N\sin\varphi_0,$$
$$H_l = N\cos\varphi_l,\quad V_l = N\sin\varphi_l.$$

6. LEGEA CONSTITUTIVĂ A MATERIALULUI

Pentru cauciuc s-a admis următoarea lege constitutivă

$$\varepsilon = 2\left(1-\sqrt{1-\frac{\sigma}{E_0}}\right) \qquad (20\,a)$$

sau

$$\sigma = E_0\left(\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{4}\right), \tag{20 b}$$

unde E_0 reprezintă modulul de elasticitate în origine. Conform indicațiilor din literatură s-a luat $E_0 = 80$ daN/cm².

Tabelul 2

ε	σ/E_0	ε	σ/E_0	ε	σ/E_0	ε	σ/E_6
0	0	0,07	0,068775	0,40	0,3600	1,10	0,7975
0,01	0,009975	0,08	0,078400	0,50	0,4375	1,20	0,8400
0,02	0,019900	0,09	0,087975	0,60	0,5100	1,40	0,9100
0 03	0,029775	0,10	0,097500	0,70	0,5775	1,50	0,9375
0,04	0,039600	0,15	0,144375	0,80	0,6400	1,60	0,9600
0,05	0,049375	0,20	0,190000	0,90	0,6975	1,80	0,9900
0,06	0,059100	0,30	0,277500	1,00	0,7500	2,00	1

Valorile lui ε pentru diferite rapoarte σ/E_0 sînt trecute în tabelul 2, iar graficul funcției este redat în figura 6.

7. CALCULUL PRACTIC

Cu datele tabelate, calculul practic se conduce după cum urmează.

1°. În baza unei tensiuni alese σ, se determină efortul axial $N = \sigma A$, unde A este aria secțiunii transversale a benzii și apoi coeficientul $\alpha = N/\gamma l^2$.

2°. Din tabelul 1 se determină raportul s/l.

3°. Cu ajutorul relației (20 a) sau din tabelul 2 se găsește alungirea specifică ε.

4°. Se calculează lungimea arcului deformat, într-o primă aproximație, cu ajutorul relației

$$s_1 = (1 + \varepsilon_0)\, s.$$

5°. Cu s_1 astfel calculat se intră în tabelul 1 și se citește α_1 corespunzător.

6°. Cu α_1 astfel determinat se calculează σ_1 și apoi ε_1.

7°. Se repetă toate operațiile pînă ce creșterea lungimii arcului și, implicit, scăderea tensiunii în banda de cauciuc sînt mai mici decît o valoare admisă inițial.

Toate operațiile de iterație pot fi înlocuite printr-o formulă aproximativă, admițînd pentru produsul ce determină alungirea specifică finală o expresie de forma

$$1 + \varepsilon_{final} = (1 + \varepsilon)\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1 + \frac{\varepsilon}{4}\right)\left(1 + \frac{\varepsilon}{8}\right)\cdots\left(1 + \frac{\varepsilon}{2^n}\right)\cdots =$$

$$= \prod_{n=0}^{\infty}\left(1 + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) \approx 1 + 2\varepsilon + \frac{4}{3}\varepsilon^2 + \frac{2}{7}\varepsilon^3 + \ldots \tag{21}$$

(coeficienţii din ultimul membru rezultă prin însumarea unor progresii geometrice).

Observaţie. Deoarece valoarea iniţială α_0 conduce la valoarea cea mai mare a tensiunii în membrana de cauciuc, este acoperitor să se lucreze cu tensiunea iniţială.

8. APLICAŢIE NUMERICĂ

Se dă lungimea $l = 1{,}25$ m şi o grosime $\delta = 10$ mm; se alege o tensiune în banda de cauciuc $\sigma = 6{,}25$ daN/cm^2.

Rezultă atunci

$$N = \sigma \cdot \pi \cdot 1 = 6{,}25 \text{ daN/cm} = 625 \text{ daN/m},$$

$$\alpha = \frac{N}{\gamma l^2} = \frac{625}{1000 \times 1{,}25} = 0{,}40.$$

Din tabelul 1 rezultă $c = 0{,}5933$ şi $s/l = 1{,}09292$.

Pentru raportul

$$\frac{\sigma}{E_0} = \frac{6{,}25}{80} = 0{,}078125$$

rezultă $\varepsilon = 0{,}0797$.

Din aplicarea relaţiei (21) obţinem

$$s_{\text{final}}/l = 1 + 2 \times 0{,}0797 + \frac{4}{3} \cdot 0{,}0797^2 + \frac{2}{7} \cdot 0{,}0797^3 + \ldots =$$

$$= 1 + 0{,}1594 + 0{,}008469 + 0{,}000145 = 1{,}168.$$

Pentru acest raport corespunde din tabelul 1 $\alpha = 0{,}34$ şi

$$N = 0{,}34 \times 1000 \times 1{,}25^2 = 531{,}25 \text{ daN/m},$$

$$\sigma = 5{,}31 \text{ daN/cm}^2,$$

deci o scădere a tensiunii în banda de cauciuc, cu 15%.

★

În încheiere, vom calcula componentele H şi V pentru valorile iniţiale ale lui α:

$$\sin \varphi_0 = -\frac{c^2}{2\alpha} = -0{,}440; \quad \cos \varphi_0 = \sqrt{1 - \left(\frac{c^2}{2\alpha}\right)^2} = 0{,}898,$$

$$\sin \varphi_l = \frac{1 - c^2}{2\alpha} = 0{,}810; \quad \cos \varphi_l = \sqrt{1 - \left(\frac{1 - c^2}{2\alpha}\right)^2} = 0{,}587,$$

$$H_0 = 625 \times 0{,}898 = 561{,}25 \text{ daN/m},$$

$$V_0 = -625 \times 0{,}440 = -275{,}00 \text{ daN/m},$$

$$H_l = 625 \times 0{,}587 = 366{,}88 \text{ daN/m},$$

$$V_l = 625 \times 0{,}810 = 506{,}25 \text{ daN/m}.$$

Primită la redacție la 10 februarie 1983

BIBLIOGRAFIE

1. V. VÂLCOVICI, ȘT. BĂLAN, R. P. VOINEA, *Mecanica teoretică*, Ed. a 2-a, Edit. tehnică, București, 1963.
2. B. I. SEGAL, K. A. SEMENDIAEV, *Tabele matematice cu cinci zecimale* (în l. rusă), Izdatel'stvo Akademii Nauk SSSR, Moskva-Leningrad, 1950.
3. M. V. SOARE, *Rezistența materialelor. Curs și aplicații*. Vol. 1, Litografia Inst. Construcții București, 1978.

PLĂCI PLANE CIRCULARE CU DEFORMAȚII MARI

de IRONIM MARȚIAN

Institutul politehnic, Cluj-Napoca

În lucrare se formulează, în deplasări și eforturi, problema rezolvării plăcilor plane circulare cu deformații mari, iar apoi, ca aplicație, se studiază placa circulară rezemată, încărcată pe contur cu un moment uniform distribuit considerînd cele două cazuri de rezemare care, datorită deformațiilor extensionale ale suprafeței mediane sub acțiunea încărcării exterioare transversale, nu mai realizează același tip de legătură : fixă (articulație) și mobilă (reazem simplu). Eforturile de membrană care apar determină posibilitatea evaluării mai corecte a rigidității plăcii, acestea reducînd efectul încovoierii.

Cînd deplasările transversale ale plăcilor plane sînt de același ordin de mărime cu grosimea lor $\left(\frac{1}{5} < \frac{w}{h} < 1{,}2\right)$, ipoteza neglijării extinderii suprafeței mediane este valabilă numai dacă suprafața deformată a plăcii este desfășurabilă. În cazul cel mai general însă, încovoierea plăcii este însoțită și de deformații extensionale ale suprafeței mediane, acestea dînd naștere la o stare de eforturi suplimentară, de membrană, care permite evaluarea mai riguroasă a rigidității plăcii față de situația cînd s-ar accepta teoria liniară, valabilă numai în domeniul deformațiilor mici $\left(\frac{w}{h} \leqslant \frac{1}{5}\right)$. Analiza comportării plăcii la acțiunea încărcărilor transversale trebuind să se facă pe forma deformată (calcul de ordinul II), un calcul neliniar se impune a fi necesar datorită considerării în relațiile geometrice ale deformațiilor și a termenilor neliniari (neliniaritate geometrică).

Literatura tehnică de specialitate este săracă în informații privitoare la apariția efectului de membrană, dar mai ales la consecința imediată a acestuia : diminuarea efectului de încovoiere. Dintr-o astfel de perspectivă problema plăcilor plane cu deformații mari prezintă interes, cel puțin din punct de vedere teoretic deocamdată. Vom sublinia de asemenea și faptul că reazemul articulat și simpla rezemare nerealizînd acum același tip de legătură, apare evidentă distincția dintre ele.

1. STAREA DE EFORTURI ȘI DEFORMAȚII

Să presupunem o placă circulară oricum rezemată pe contur, de rază a, grosime h și încărcată transversal cu o sarcină uniform distribuită de intensitate p. Sub acțiunea acestei încărcări exterioare și a eforturilor secționale — de membrană și de încovoiere cu forță tăietoare, eforturile de lunecare și de torsiune lipsind datorită solicitării axial-simetrice, un element infinitezimal decupat din placă cu ajutorul a două plane transversale radiale făcînd între ele unghiul $d\theta$ și a două secțiuni circulare distanțate cu dr (fig. 1), trebuie să fie în echilibru. Echilibrul acestui element se exprimă prin [1] [2] :

— ecuația de proiecții după direcția radială :

$$N_r - N_t + r\frac{dN_r}{dr} = 0, \tag{1}$$

— ecuația de proiecții după tangenta la linia mediană a elementului este identic satisfăcută,

— ecuația de momente în raport cu o axă din planul elementului, normală pe rază :

$$Q_r = -D\left(\frac{\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}r^3} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right), \tag{2}$$

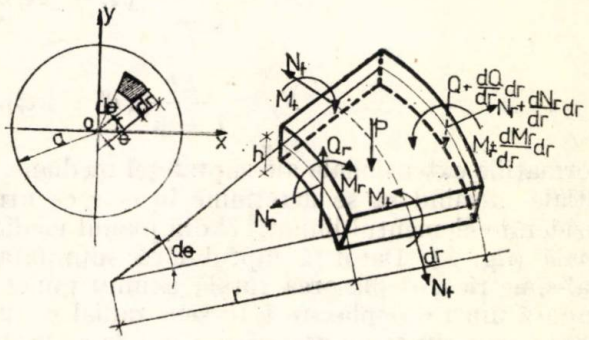


Fig. 1. — Element de placă acționat de eforturile secționale.

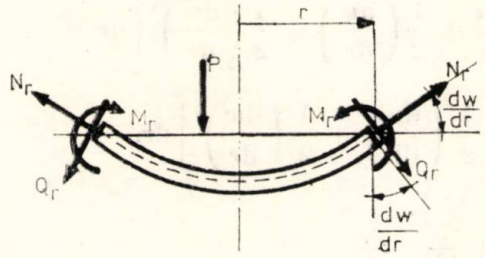


Fig. 2. — Studiul echilibrului pe forma deformată.

în care s-a ținut seama că momentele de încovoiere au expresiile cunoscute

$$M_r = -D\left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2} + \frac{\mu}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right),$$

$$M_t = -D\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r} + \mu\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2}\right), \tag{3}$$

unde w este săgeata unui punct din planul median, iar D rigiditatea cilindrică a plăcii.

Forța tăietoare Q_r se poate determina și din considerarea echilibrului pe forma deformată a unei porțiuni circulare interioare de rază r (fig. 2), rezultînd

$$Q_r = -N_r\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r} - \frac{pr}{2} \tag{4}$$

și mai departe,

$$D\left(\frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}r^3}+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}r^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right)=N_r\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}+\frac{pr}{2}. \tag{5}$$

Eforturile de membrană N_r și N_t se determină pe baza legii generalizate Hooke

$$N_r=\frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_r^0+\mu\varepsilon_t^0),$$
$$N_t=\frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_t^0+\mu\varepsilon_r^0), \tag{6}$$

deformațiile extensionale ale suprafeței mediane, ε_r^0 — radială și ε_t^0 — tangențială, urmînd să se determine în cele ce urmează. Pentru aceasta să considerăm elementul liniar AB din planul median al plăcii, avînd direcția radială (fig. 3). Datorită faptului că suprafața deformată a plăcii este axial-simetrică, deplasarea totală a unui punct din planul median va fi compusă dintr-o deplasare u în sens radial și alta w, transversală, iar cea a unui punct situat pe grosimea plăcii, la distanța z, din $\bar{u}$ și $\bar{w}\simeq w$. După deformație lungimea segmentului AB devine

$$A_1B_1=\sqrt{1+2\left[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}+\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right)^2\right]}\,\mathrm{d}r=$$
$$=\left[1+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}+\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right)^2\right]\mathrm{d}r, \tag{7}$$

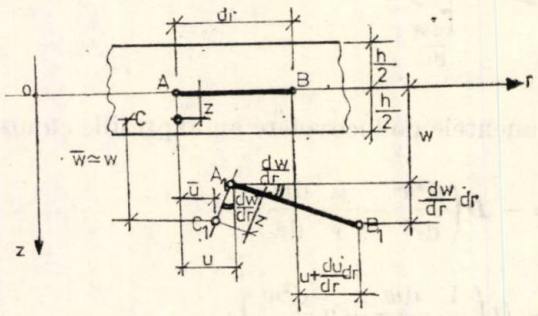


Fig. 3. — Componentele deplasărilor unui punct din planul median și ale unui punct oarecare de pe grosimea plăcii.

dacă în seria binomială

$$(1+x)^n=1+C_n^1x+C_n^2x^2+C_n^3x^3+\ldots,\quad |x|<1,$$

cu

$$x\to 2\left[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}+\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right)^2\right]=2\varepsilon_r^0,\quad |2\varepsilon_r^0|<1,$$

$$n\to\frac{1}{2},$$

se reținu numai primii doi termeni.

Deformația specifică radială va fi deci

$$\varepsilon_r^0 = \frac{A_1B_1 - AB}{AB} = \frac{du}{dr} + \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dr}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2, \tag{8}$$

primii doi termeni datorindu-se deplasării radiale u, iar ultimul deplasării transversale w. Deplasarea radială fiind mică comparativ cu săgeata plăcii, termenul al doilea se poate neglija și cum expresia deformației specifice tangențiale ε_t^0 este de aceeași formă cu cea din cazul stării plane de solicitare, se obțin în final relațiile geometrice neliniare

$$\varepsilon_r^0 = \frac{du}{dr} + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2,$$
$$\varepsilon_t^0 = \frac{u}{r}, \tag{9}$$

și mai departe, din (6), eforturile de membrană în funcție de deplasări:

$$N_r = \frac{Eh}{1-\mu^2}\left[\frac{du}{dr} + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2 + \mu\frac{u}{r}\right],$$
$$N_t = \frac{Eh}{1-\mu^2}\left[\frac{u}{r} + \mu\frac{du}{dr} + \frac{\mu}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2\right]. \tag{10}$$

Cu
$$\bar{u} = u - z\frac{dw}{dr}, \tag{11}$$

din (9) rezultă variația deformațiilor pe grosimea plăcii [3]

$$\varepsilon_r = \frac{d\bar{u}}{dr} + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2 = \varepsilon_r^0 - z\frac{d^2w}{dr^2},$$
$$\varepsilon_t = \frac{\bar{u}}{r} = \varepsilon_t^0 - z\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} \tag{12}$$

și tensiunile într-un punct sub forma

$$\sigma_r = \sigma_r^0 - \frac{E}{1-\mu^2}z\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \mu\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right),$$
$$\sigma_t = \sigma_t^0 - \frac{E}{1-\mu^2}z\left(\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + \mu\frac{d^2w}{dr^2}\right), \tag{13}$$

unde

$$N_r = h\sigma_r^0,\ N_t = h\sigma_t^0. \tag{14}$$

Înlocuind acum deplasarea radială u din cea de a doua ecuație a grupului (9) în prima, se obține o relație de legătură între deformațiile suprafeței mediane

$$\varepsilon_r^0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r\varepsilon_t^0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right)^2, \tag{15}$$

care, prin derivare, conduce la ecuația

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon_r^0}{\mathrm{d}r} - 2\frac{\mathrm{d}\varepsilon_t^0}{\mathrm{d}r} - r\frac{\mathrm{d}^2\varepsilon_t^0}{\mathrm{d}r^2} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\cdot\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}r^2},$$

identică cu relația de continuitate a deformațiilor exprimată în coordonate polare, cazul solicitării axial-simetrice

$$r\frac{\mathrm{d}\varepsilon_r^0}{\mathrm{d}r} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\varepsilon_t^0}{\mathrm{d}r}\right) = r\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\cdot\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}r^2}. \tag{16}$$

După explicitarea deformațiilor din (6) și ținînd seama de ecuația de echilibru (1), relația (15) se transformă în

$$r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(N_r + N_t) + \frac{Eh}{2}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right)^2 = 0, \tag{17}$$

iar introducînd funcția de eforturi $F(r)$ astfel încît

$$N_r = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r};\ N_t = \frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}r^2}, \tag{18}$$

ecuația (1) este identic satisfăcută, iar relația (17) devine

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(\nabla^2 F) = -\frac{Eh}{2r}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right)^2. \tag{19}$$

Relațiile (19) și (5) reprezintă ecuațiile plăcilor plane circulare cu deformații mari, care, împreună cu condițiile de contur, determină funcțiile F și w, recomandabil a fi utilizate în cazul marginilor deplasabile în planul median al plăcii.

Dacă expresiile (10) ale eforturilor de membrană se introduc în ecuația de echilibru (1) se obține după simplificări

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} - \frac{u}{r^2} = -\frac{1-\mu}{2}\frac{1}{r}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right)^2 - \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}r^2}, \tag{20}$$

relație care împreună cu (5) constituie ecuațiile plăcilor circulare cu deformații mari [4], [5], ușor de aplicat în cazul marginilor nedeplasabile în planul median.

2. PLACA CIRCULARĂ REZEMATĂ, ÎNCĂRCATĂ PE CONTUR CU UN MOMENT UNIFORM DISTRIBUIT

2.1. PLACA CIRCULARĂ REZEMATĂ ARTICULAT PE CONTUR

Fie placa circulară articulată pe contur, de rază a și încărcată cu momentul uniform distribuit M (fig. 4).

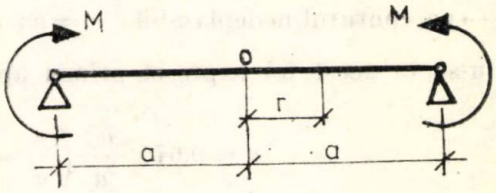


Fig. 4. — Placa circulară articulată, încărcată cu momentul pozitiv M, uniform distribuit pe contur.

În vederea găsirii unei soluții aproximative a problemei, vom admite pentru început că forma suprafeței mediane deformate a plăcii este dată de expresia (aceeași ca în cazul teoriei deformațiilor mici)

$$w = w_0\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right), \tag{21}$$

satisfăcînd condițiile la limită

$$r = a; \quad w = 0, \tag{22}$$

— în tot domeniul plăcii, $M_r = M_t = \text{const}$.

Introducînd funcția w în relația (20) se obține ecuația diferențială liniară de ordinul doi neomogenă, în u, de tip Euler (coeficientul lui Poisson $\mu = 0{,}3$)

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} - \frac{u}{r^2} = -5{,}4\frac{w_0^2}{a^4}r, \tag{23}$$

pentru care soluția generală a ecuației omogene se determină făcînd schimbarea de variabilă $r = e^t$,

$$u_1 = C_1 r + \frac{C_2}{r}. \tag{24}$$

O soluție particulară a ecuației neomogene este de forma

$$u_0 = a_3 r^3, \tag{25}$$

constanta a_3 determinîndu-se din condiția ca u_0 să satisfacă ecuația diferențială (23)

$$a_3 = -0{,}675\,\frac{w_0^2}{a^4}, \tag{26}$$

astfel că soluția generală a ecuației diferențiale este

$$u = -\,0{,}675\,\frac{w_0^2}{a}\cdot\frac{r^3}{a^3} + C_1 r + \frac{C_2}{r}\cdot \tag{27}$$

Constantele de integrare C_1 și C_2 se deduc din condițiile la limită:
— în centrul plăcii: $r = 0\,;\ u = 0 \to C_2 = 0,$
— pe conturul nedeplasabil: $r = a\,;\ u = 0 \to C_1 = 0{,}675\,\frac{w_0^2}{a^2},$ (28)
găsindu-se în acest fel expresia primei aproximații a deplasării radiale

$$u = 0{,}675\,\frac{w_0^2}{a}\left(\frac{r}{a} - \frac{r^3}{a^3}\right)\cdot \tag{29}$$

Dacă se introduc deplasările w și u date de relațiile (21) și respectiv (29) în membrul drept al expresiei (5), ținînd seama de (10) și luînd $p = 0$, rezultă ecuația diferențială liniară de ordinul trei neomogenă, de tip Euler, prin integrarea căreia găsim cea de a doua aproximație a săgeții plăcii

$$\frac{\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}r^3} + \frac{1}{r}\,\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2} - \frac{1}{r^2}\,\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r} = -\,\frac{h}{a^3}\left(\frac{w_0}{h}\right)^3\left(21{,}06\,\frac{r}{a} - 5{,}46\,\frac{r^3}{a^3}\right)\cdot \tag{30}$$

Cu substituția $r = e^t$ se obține soluția generală a ecuației diferențiale omogene

$$w_1 = A_1 + A_2 r^2 + A_3 \ln r, \tag{31}$$

iar o soluție particulară a ecuației neomogene este de forma

$$w_0 = a_4 r^4 + a_6 r^6, \tag{32}$$

în care coeficienții

$$a_4 = -\,0{,}658125\,\frac{h}{a^4}\left(\frac{w_0}{h^3}\right)^3,$$
$$a_6 = 0{,}037916\,\frac{h}{a^6}\left(\frac{w_0}{h}\right)^3, \tag{33}$$

s-au determinat astfel încît w_0 să satisfacă ecuația diferențială (30). Așadar, soluția generală a ecuației diferențiale va fi

$$w = A_1 + A_2 r^2 + A_3 \ln r + h\left(\frac{w_0}{h}\right)^3\left(-0{,}658125\,\frac{r^4}{a^4} + 0{,}037916\,\frac{r^6}{a^6}\right), \tag{34}$$

constantele de integrare determinîndu-se din condițiile la limită :

$$r = 0\,;\ w \text{ trebuie să fie finit } \rightarrow A_3 = 0, \qquad (35)$$
$$r = a\,;\ w = 0,\ M_r = M.$$

Ultimele două condiții definesc constantele A_1 și A_2

$$A_1 = -2{,}257299\, h\left(\frac{w_0}{h}\right)^3 + 0{,}384615\,\frac{Ma^2}{D},$$
$$A_2 = 2{,}877508\,\frac{h}{a^2}\left(\frac{w_0}{h}\right)^3 - 0{,}384615\,\frac{M}{D}, \qquad (36)$$

cu care se obține forma finală a expresiei săgeții plăcii

$$w = 0{,}384615\,\frac{Ma^2}{D}\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) + h\left(\frac{w_0}{h}\right)^3\left(-2{,}257299 + 2{,}877508\,\frac{r^2}{a^2} - \right.$$
$$\left. - 0{,}658125\,\frac{r^4}{a^4} + 0{,}037916\,\frac{r^6}{a^6}\right), \qquad (37)$$

iar cu relațiile (3) momentele de încovoiere

$$M_r = M - \frac{hD}{a^2}\left(\frac{w_0}{h}\right)^3\left(7{,}481521 - 8{,}68725\,\frac{r^2}{a^2} + 1{,}205729\,\frac{r^4}{a^4}\right),$$
$$M_t = M - \frac{hD}{a^2}\left(\frac{w_0}{h}\right)^3\left(7{,}481521 - 5{,}00175\,\frac{r^2}{a^2} + 0{,}56874\,\frac{r^4}{a^4}\right), \qquad (38)$$

primii doi termeni ai expresiilor săgeții și momentelor de încovoiere corespunzînd teoriei liniare a plăcilor circulare, în baza căreia $\left(\frac{w_0}{h}\right)^3$ se poate neglija ca fiind foarte mic.

Punînd acum condiția ca în centrul plăcii ($r = 0$) $w = w_0$, din (37), rezultă ecuația algebrică de gradul trei în $\left(\frac{w_0}{h}\right)$

$$\left(\frac{w_0}{h}\right)^3 + 3s\left(\frac{w_0}{h}\right) + 2q = 0, \qquad (39)$$

unde

$$s = 0{,}147669,$$
$$q = -0{,}0851935\,\frac{Ma^2}{hD}, \qquad (40)$$

cu soluția reală

$$\frac{w_0}{h} = \sqrt[3]{-q + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{\Delta}}, \tag{41}$$

deoarece realizantul $\Delta = s^3 + q^2 > 0$. În tabelul 1 sînt trecute valorile $\frac{w_0}{h}$ funcție de raportul $\frac{Ma^2}{hD}$.

Dacă neglijăm $\left(\frac{w_0}{h}\right)^3$ în ecuația (39), se găsește săgeata în centrul plăcii circulare determinată în ipoteza deformațiilor mici

$$\frac{w_0}{h} = -\frac{2q}{3s} = \frac{Ma^2}{2(1+\mu)hD} = 0{,}384615\,\frac{Ma^2}{hD}. \tag{42}$$

Din relațiile (10), cu expresiile deplasărilor u (29) și w(37) acum cunoscute, vor rezulta eforturile de membrană N_r și N_t; găsim astfel

— în centrul plăcii ($r = 0$):

$$N_r = N_t = 10{,}53\,\frac{D}{a^2}\left(\frac{w_0}{h}\right)^2,$$

— pe reazem ($r = a$): (43)

$$N_r = -16{,}2\,\frac{D}{a^2}\left(\frac{w_0}{h}\right)^2 + 6\,\frac{D}{a^2}\left[-0{,}76923\,\frac{Ma^2}{hD} + 3{,}350012\left(\frac{w_0}{h}\right)^3\right]^2,$$

$$N_t = -4{,}86\,\frac{D}{a^2}\left(\frac{w_0}{h}\right)^2 + 1{,}8\,\frac{D}{a^2}\left[-0{,}76923\,\frac{Ma^2}{hD} + 3{,}350012\left(\frac{w_0}{h}\right)^3\right]^2,$$

iar din relațiile (38) ce definesc momentele de încovoiere, prin particularizare, vom avea

— în centrul plăcii ($r = 0$):

$$M_r = M_t = M - 7{,}481521\,\frac{hD}{a^2}\left(\frac{w_0}{h}\right)^3, \tag{44}$$

— pe reazem ($r = a$):

$$M_r = M,$$

$$M_t = M - 3{,}048511\,\frac{hD}{a^2}\left(\frac{w_0}{h}\right)^3,$$

de unde deducem că în teoria neliniară momentele de încovoiere M_r și M_t sînt, evident, mai mici decît cele obținute acceptînd teoria deformațiilor

mici, diferențele depinzînd de $\frac{w_0}{h}$. În figura 5 sînt reprezentate diagramele de variație ale eforturilor de membrană (a) și ale momentelor de încovoiere (b), pentru $\frac{Ma^2}{hD} = 3\left(\frac{w_0}{h} = 0{,}618847\right)$.

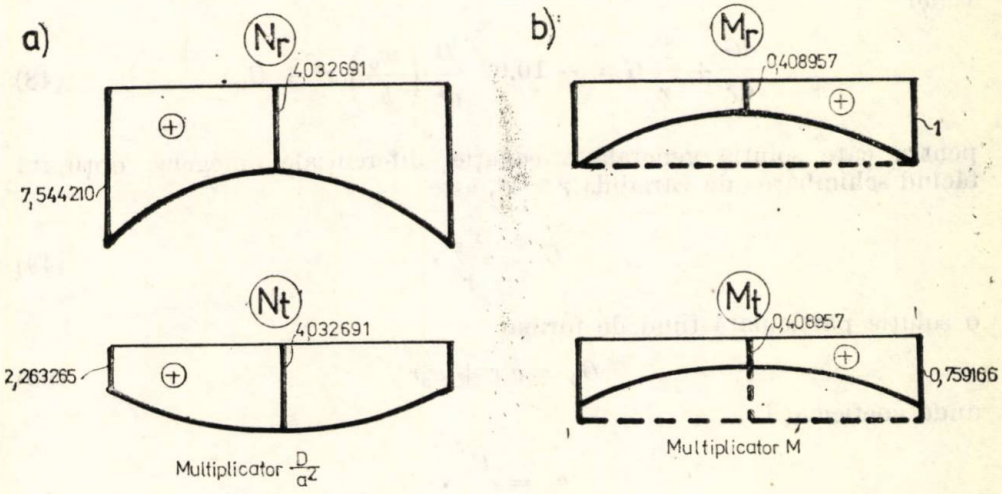


Fig. 5. — Solicitări în placa circulară cu deformații mari articulată pe contur : a — eforturi de membrană ; b momente de încovoiere.

2.2. PLACA CIRCULARĂ SIMPLU REZEMATĂ PE CONTUR

Trecînd la placa circulară simplu rezemată, încărcată pe contur cu momentul uniform distribuit M (fig. 6), vom alege iarăși pentru săgeata plăcii, într-o primă aproximație, funcția (21) satisfăcînd condițiile (22), care, introdusă în relația (19), conduce la ecuația diferențială

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(\nabla^2 F) = -21{,}84\,\frac{D}{a^4}\left(\frac{w_0}{h}\right)^2 r, \tag{45}$$

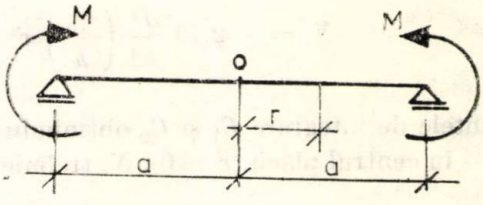


Fig. 6. — Placa circulară simplu rezemată, încărcată cu momentul pozitiv M, uniform distribuit pe contur.

iar prin integrare

$$\nabla^2 F = \frac{\mathrm{d}^2 F}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r} = -10{,}92\,\frac{D}{a^4}\left(\frac{w_0}{h}\right)^2 r^2 + C_1. \tag{46}$$

Cu schimbarea de funcție

$$\frac{dF}{dr} = G(r) \tag{47}$$

rezultă ecuația diferențială de ordinul întîi, liniară și neomogenă, de tip Euler

$$\frac{dG}{dr} + \frac{1}{r} G = -10{,}92 \frac{D}{a^4} \left(\frac{w_0}{h}\right)^2 r^2 + C_1, \tag{48}$$

pentru care soluția generală a ecuației diferențiale omogene, obținută făcînd schimbarea de variabilă $r = e^t$, este

$$G_1 = \frac{C_2}{r}, \tag{49}$$

o soluție particulară fiind de forma

$$G_0 = a_1 r + a_3 r^3, \tag{50}$$

unde coeficienții

$$a_1 = \frac{C_1}{2}, \qquad a_3 = -2{,}73 \frac{D}{a^4} \left(\frac{w_0}{h}\right)^2 \tag{51}$$

sînt astfel determinați încît (50) să satisfacă ecuația diferențială (48); soluția generală a acesteia va fi deci

$$\frac{dF}{dr} = G(r) = -2{,}73 \frac{D}{a^4} \left(\frac{w_0}{h}\right)^2 r^3 + \frac{C_1}{2} r + \frac{C_2}{r}. \tag{52}$$

Din prima relație (18) rezultă expresia efortului N_r

$$N_r = -2{,}73 \frac{D}{a^4} \left(\frac{w_0}{h}\right)^2 r^2 + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{r^2}, \tag{53}$$

constantele de integrare C_1 și C_2 obținîndu-se din condițiile la limită

— în centrul plăcii ($r = 0$), N_r trebuie să fie finit; $C_2 = 0$,

— pe conturul deplasabil al plăcii ($r = a$), $N_r = 0$; (54)

$$C_1 = 5{,}46 \frac{D}{a^2} \left(\frac{w_0}{h}\right)^2,$$

iar mai departe eforturile de membrană sub forma

$$N_r = \frac{1}{r}\frac{dF}{dr} = 2{,}73\frac{D}{a^2}\left(\frac{w_0}{h}\right)^2\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right),$$
$$N_t = \frac{d^2F}{dr^2} = 2{,}73\frac{D}{a^2}\left(\frac{w_0}{h}\right)^2\left(1-3\frac{r^2}{a^2}\right). \tag{55}$$

Din a doua relație constatăm că pentru $r = a$, pe conturul plăcii,

$$N_t = -5{,}46\frac{D}{a^2}\left(\frac{w_0}{h}\right)^2,$$

ceea ce face ca zona de margine a plăcii circulare să devină instabilă pentru o anumită valoare critică a momentului M, uniform distribuit în lungul conturului. Fenomenul este semnalat în lucrarea [6] dar în legătură cu o încărcare transversală uniform distribuită de intensitate p.

Dacă în membrul drept al relației (5) se introduce N_r acum cunoscut, expresia (21) a săgeții plăcii, și luînd $p = 0$, se obține ecuația diferențială de ordinul trei liniară și neomogenă, de tip Euler

$$\frac{d^3w}{dr^3}+\frac{1}{r}\frac{d^2w}{dr^2}-\frac{1}{r^2}\frac{dw}{dr} = -5{,}46\frac{h}{a^3}\left(\frac{w_0}{h}\right)^3\left(\frac{r}{a}-\frac{r^3}{a^3}\right), \tag{56}$$

prin integrarea căreia găsim a doua aproximație a săgeții plăcii w. Soluția generală a ecuației diferențiale omogene este de forma (31), iar o soluție particulară de forma (32), cu constantele

$$a_4 = -0{,}170625\frac{h}{a^4}\left(\frac{w_0}{h}\right)^3,$$
$$a_6 = 0{,}037916\frac{h}{a^6}\left(\frac{w_0}{h}\right)^3, \tag{57}$$

rezultînd astfel

$$w = A_1 + A_2r^2 + A_3\ln r + h\left(\frac{w_0}{h}\right)^3\left(-0{,}170625\frac{r^4}{a^4}+0{,}037916\frac{r^6}{a^6}\right), \tag{58}$$

constantele de integrare A_1, A_2 și A_3 determinîndu-se din aceleași condiții la limită (35)

$$A_1 = -0{,}269799\,h\left(\frac{w_0}{h}\right)^3 + 0{,}384615\frac{Ma^2}{D},$$
$$A_2 = 0{,}402508\frac{h}{a^2}\left(\frac{w_0}{h}\right)^3 - 0{,}384615\frac{M}{D}, \tag{59}$$
$$A_3 = 0.$$

Expresia finală a săgeții plăcii va fi atunci

$$w = 0{,}384615\,\frac{Ma^2}{D}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)+h\left(\frac{w_0}{h}\right)^3\left(-0{,}269799+0{,}402508\,\frac{r^2}{a^2}-\right.$$

$$\left.-\,0{,}170625\,\frac{r^4}{a^4}+0{,}037916\,\frac{r^6}{a^6}\right), \tag{60}$$

iar momentele de încovoiere (3)

$$M_r = M-\frac{hD}{a^2}\left(\frac{w_0}{h}\right)^3\left(1{,}046521-2{,}25225\,\frac{r^2}{a^2}+1{,}205729\,\frac{r^4}{a^4}\right),$$

$$M_t = M-\frac{hD}{a^2}\left(\frac{w_0}{h}\right)^3\left(1{,}046521-1{,}296750\,\frac{r^2}{a^2}+0{,}568740\,\frac{r^4}{a^4}\right), \tag{61}$$

primii termeni corespunzînd teoriei deformațiilor mici, aceiași în ambele situații de rezemare pe contur a plăcii circulare, iar ultimii reprezentînd efectul favorabil al extinderii suprafeței mediane.

Din condiția ca în centrul plăcii ($r = 0$) $w = w_0$, din (60) se găsește ecuația algebrică de gradul trei în $\left(\frac{w_0}{h}\right)$ de aceeași formă cu (39), în care coeficienții s și q sînt

$$s = 1{,}235487\,; \quad q = -\,0{,}712780\,\frac{Ma^2}{hD}, \tag{62}$$

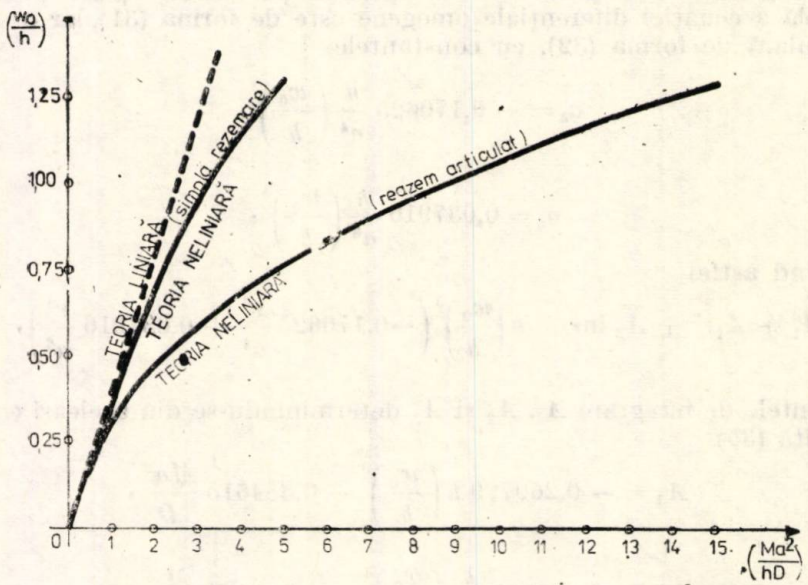


Fig. 7. — Variația raportului $\left(\frac{w_0}{h}\right)$ în centrul plăcii circulare rezemate pe contur.

cu soluția reală dată de (41), condiția $\Delta > 0$ fiind îndeplinită. Dacă se neglijează $\left(\frac{w_0}{h}\right)^3$, se obține aceeași valoare (42) $\frac{w_0}{h}$ în centrul plăcii circulare cu cea calculată în ipoteza deformațiilor mici.

Tabelul 1

Nr. crt.	$\frac{Ma^2}{hD}$	w_0/h		
		Teoria liniară	Teoria neliniară	
			Placă articulată	Placă simplu rezemată
0	1	2	3	4
1	0	0,000000	0,000000	0,000000
2	0,50	0,192307	0,179294	0,190443
3	0,55	0,211538	0,194840	0,209071
4	1	0,384615	0,314439	0,370853
5	2	0,769230	0,495169	0,683194
6	3	1,153845	0,618847	0,934009
7	4	1,538460	0,714632	1,139385
8	5	1,923075	0,793832	1,312733
9	10	3,846150	1,071240	
10	15	5,769225	1,259455	

Soluțiile $\left(\frac{w_0}{h}\right)$ ale ecuației (39) în cazul simplei rezemări sînt trecute în tabelul 1 comparativ cu cele date de teoria liniară și cazul de rezemare articulată a plăcii pe contur și reprezentate grafic în figura 7, funcție de $\frac{Ma^2}{hD}$. Pentru $\frac{Ma^2}{hD} = 3\left(\frac{w_0}{h} = 0{,}934009\right)$, în figura 8 sînt trasate diagramele eforturilor de membrană (a) și ale momentelor de încovoiere (b), pe baza relațiilor (55) și respectiv (61).

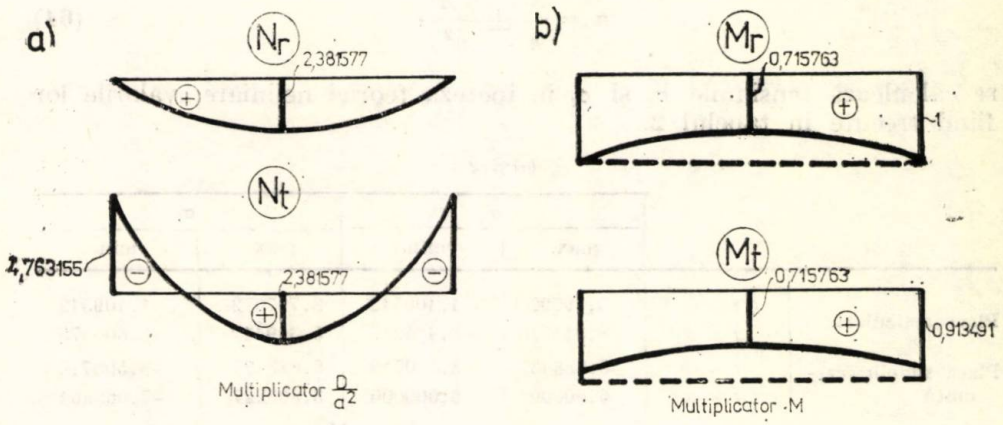


Fig. 8. — Solicitări în placa circulară simplu rezemată pe contur : a — eforturi de membrană; b — momente de încovoiere de membrană.

2.3. CONCLUZII

Din tabelul 1 și figura 7 se constată că pentru $\frac{w_0}{h} \leqslant \frac{1}{5}\left(\frac{Ma^2}{hD} \leqslant 0{,}55\right)$ este valabilă ipoteza deformațiilor mici [7], teoria liniară și neliniară conducînd la aceleași rezultate; curba și dreapta coincid. Dincolo de această limită, acceptarea teoriei liniare determină o subevaluare a rigidității plăcii ca urmare a neglijării extinderii suprafeței mediane, de exemplu pentru $\frac{Ma^2}{hD} = 3$, cu 46,36% în cazul plăcii rezemate articulat pe contur și numai cu 19,05% în cazul plăcii simplu rezemate. Rezultă necesitatea analizei comportării plăcilor circulare rezemate pe contur încărcate transversal printr-un calcul neliniar, eforturile de membrană datorate considerării deformațiilor extensionale ale suprafeței mediane diminuînd efectul încovoierii, acestea acționînd în sens contrar sarcinii exterioare. Este vorba de domeniul $\frac{1}{5} < \frac{w_0}{h} < 1{,}2$ [8] al deformațiilor mari în care deplasările transversale sînt comparabile cu grosimea plăcii. Pentru același raport $\frac{Ma^2}{hD} = 3$, în centrul plăcii momentele încovoietoare M_r și M_t scad cu 59,10% la placa articulată și cu 28,42% la placa simplu rezemată pe contur față de valorile determinate acceptînd teoria liniară, în timp ce pe contur M_r rămîne același, iar M_t scade cu 24,08%, respectiv cu 8,65%.

Este interesantă analiza tensiunilor σ_r și σ_t în centrul plăcii și în puncte situate pe contur. În ipoteza acceptării teoriei liniare, în toate punctele din domeniul plăcii avem, indiferent de natura rezemării,

$$\sigma_r = \sigma_t = \pm 6\frac{M}{h^2}, \tag{63}$$

iar cu ajutorul relației cunoscute,

$$\sigma = \frac{N}{h} \pm \frac{6M}{h^2}, \tag{64}$$

se calculează tensiunile σ_r și σ_t în ipoteza teoriei neliniare, valorile lor fiind trecute în tabelul 2.

Tabelul 2

		σ_r		σ_t	
		max.	min.	max.	min.
Placa articulată	$r = 0$	3,79792	−1,109512	3,797972	−1,109512
	$r = a$	8,514736	−3,485263	5,309417	−3,800575
Placa simplu rezemată	$r = 0$	5,088437	−3,500719	5,088437	−3,500719
	$r = a$	6,000000	−6,000000	3,893227	−7,068664
Multiplicator		$\frac{M}{h^2}$			

Cu excepția a două cazuri, tensiunile sînt mai mici, cel mult egale cu valorile obținute pe baza teoriei deformațiilor mici, concomitent cu extinderea zonei întinse pe grosimea plăcii, fapt ce atrage după sine utilizarea mai rațională a materialului din care este realizată placa.

Prin urmare, analiza neliniară a comportării plăcilor plane circulare rezemate, încărcate pe contur cu momentul uniform distribuit M, este mai riguroasă avînd drept consecință proiectarea mai economică a acestor elemente de construcții.

Primită la redacție la 18 martie 1982

BIBLIOGRAFIE

1. S. TIMOSHENKO, S. WOINOWSKY-KRIEGER, *Teoria plăcilor plane și curbe* (Trad. din lb. engleză), Edit. tehnică, București, 1968, p. 420.
2. I. MARȚIAN, *Placa circulară cu deformații mari rezemată pe contur*, Buletinul științific și tehnic al Inst. politehnic „Traian Vuia" Timișoara, Seria Construcții, **24** (**38**), 2, 20—27 (1979).
3. I. MARȚIAN, I. MAGYAROSY, *Modelarea plăcilor plane circulare metalice cu deformații mari rezemate pe contur*, A II-a Conf. de construcții metalice, Vol. I, Timișoara, 11—13 oct. 1979, p. 115—125.
4. A. NÁDAI, *Die elastischen Platten*, Berlin 1925, pag. 284—288.
5. S. P. TIMOSHENKO, D. H. YOUNG, *Vibration Problems in Engineering*, III, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N.I., 1955, pag. 452.
6. Д. ПАНОВ, Ю., В. Н. ФЕОДОСЬЕВ, *О равновесии и потере устойчивости пологих оболочек при больших прогибах*, Прикл. матем. и мех., **12**, 4, 389—406, 1948.
7. N. I. BEZUHOV, *Teoria elasticității și plasticității* (Trad. din lb. rusă), Edit. tehnică, București 1957, pag. 308.
8. AL. VASILESCU, GEORGETA, PRAISLER, *Similitudinea sistemelor elastice*, Edit. Academiei R. S. România, București 1974, p. 163.

CONSIDERAȚII ASUPRA ANALIZEI SEISMICE TRIDIMENSIONALE A PLATFORMELOR MARINE TEMPLATE

de ADRIAN POPOVICI

Institutul de construcții, București

Activitatea de prospectare și exploatare a resurselor de hidrocarburi din platformele continentale ale mărilor și oceanelor se află într-o continuă dezvoltare, în paralel cu cererea sporită de energie. R. S. România s-a aliniat acestei activități, și de mai mulți ani în platforma continentală românească a Mării Negre se desfășoară intense lucrări de prospectare cu platforme autoridicătoare. La sfîrșitul anului 1979 a fost descoperit primul zăcămînt de petrol și de gaze naturale. În etapa imediat următoare se prevede exploatarea zăcămîntului folosind platforme fixe de foraj și exploatare de tip template [1], [2].

Lucrarea cuprinde un studiu general privind comportarea seismică a platformelor marine fixe proiectate pentru platforma continentală românească a Mării Negre pentru adîncimi de apă de maximum 90 m. Se analizează succesiv o platformă de producție și o platformă ușoară pentru capetele de erupție.

Analiza se efectuează tridimensional după metoda analizei spectrale pentru structurile discretizate în elemente finite de tip BEAM. Comparativ, se prezintă și unele rezultate în analiza bidimensională obișnuită. Interacțiunea structură-fundație este considerată prin folosirea unor elemente finite speciale de tip BOUND, iar interacțiunea structură-lichid este considerată după principiul maselor adiționale.

Studiul scoate în evidență elementele noi care apar în analiza seismică tridimensională a acestor structuri, comparativ cu analiza seismică bidimensională folosită în mod obișnuit precum și capacitatea de rezistență la acțiunea cutremurelor a platformelor marine fixe pentru Marea Neagră.

1. MODEL DE CALCUL

În modelul de calcul utilizat, bazat pe metoda elementelor finite, se admite comportarea liniar-elastică a materialelor și ipoteza micilor deformații. Ecuațiile generale de mișcare pentru gradele de libertate nodale au forma [3], [4], [5]:

$$\begin{aligned} [M + M_h]\{\ddot{\delta}\} + [C]\{\dot{\delta}\} + [K]\{\delta\} &= \{P_{echiv}(t)\}, \\ \{P_{echiv}(t)\} &= -[M + M_h]\{r\}\,\ddot{u}, \end{aligned} \tag{1}$$

unde $[M]$, $[C]$, $[K]$ sînt caracteristicile de masă, amortizare și, respectiv, de rigiditate ale structurii; $[M_h]$ matricea maselor de apă adiționale atașate maselor structurii; $\{\ddot{\delta}\}$, $\{\dot{\delta}\}$ și $\{\delta\}$ vectorii accelerațiilor, ai vitezelor și, respectiv, ai deplasărilor nodale relative de răspuns al structurii; $\{r\}$ vectorul deplasărilor unitare seismice de transport pe direcția gradelor de libertate a structurii; $\ddot{u}$ accelerațiile seismice ale nodurilor din fundație.

St. Cerc. Mec. Apl., Tom 43, Nr. 1, 1984, P. 82–93

În evaluarea valorilor și vectorilor proprii ai sistemului structură-lichid-teren de fundare s-a neglijat influența amortizării. Pentru evaluarea lor și în calculele de analiză spectrală s-au utilizat programele de calcul SAP IV și NØNSAP, elaborate la Universitatea Berkeley din California [6], [7] și adaptate de autor pentru calculatoarele FELIX [4]. Vectorii proprii au fost ortonormalizați.

Formele proprii $[\Phi]$, pe lîngă proprietățile de ortogonalitate în raport cu $[M]$ și $[K]$, s-au admis că sînt ortogonale și în raport cu matricea de amortizare $[C]$:

$$\begin{aligned} &\{\Phi_i\}^T [M + M_h] \{\Phi_j\} = 0, \\ &\{\Phi_i\}^T [K] \{\Phi_j\} = 0, \qquad i \neq j, \\ &\{\Phi_i\}^T [C] \{\Phi_j\} = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

În baza relațiilor (2), prin aplicarea transformării în coordonate normale, sistemul (1) se decuplează în n ecuații independente, cîte una pentru fiecare mod propriu:

$$\ddot{Y}_i + 2\nu_i \omega_i \dot{Y}_i + \omega_i^2 Y_i = \frac{P_i(t)}{M_i}, \tag{3}$$

unde $\ddot{Y}_i$, $\dot{Y}_i$, Y_i sînt coordonatele generalizate (normale) ale modului propriu i, ν_i — fracțiunea din amortizarea critică în modul propriu i, și ω_i — frecvența circulară proprie i a sistemului:

$$\begin{aligned} &M_i = \{\Phi_i\}^T [M + M_h] \{\Phi_i\}; \quad C_i = \{\Phi_i\}^T [C] \{\Phi_i\} = 2\nu_i \omega_i M_i, \\ &K_i = \{\Phi_i\}^T [K] \{\Phi_i\} = \omega_i^2 M_i, \quad P_i(t) = \{\Phi_i\}^T \{P_{echiv}(t)\}. \end{aligned} \tag{4}$$

În analiza spectrală vectorul accelerațiilor seismice $\{\ddot{\delta}_s^f\}$ se consideră ca suma vectorială a componentelor accelerațiilor seismice după cele trei direcții $\{\ddot{\delta}_{sx}^f\}$, $\{\ddot{\delta}_{sy}^f\}$, $\{\ddot{\delta}_{sz}^f\}$, într-un sistem ortogonal tridimensional:

$$\{\ddot{\delta}_s^f\} = \{\ddot{\delta}_{sx}^f\} + \{\ddot{\delta}_{sy}^f\} + \{\ddot{\delta}_{sz}^f\}. \tag{5}$$

În modul propriu i, expresia forței generalizate are aspectul:

$$\begin{aligned} P_i(t) = &- \{\Phi_i\}^T [M + M_h] \{I_x\} \ddot{\delta}_{sx}^f - \{\Phi_i\}^T [M + M_h] \{I_y\} \ddot{\delta}_{sy}^f - \\ &- \{\Phi_i\}^T [M + M_h] \{I_z\} \ddot{\delta}_{sz}^f, \end{aligned} \tag{6}$$

unde vectorii coloană $\{I_x\}$, $\{I_y\}$, $\{I_z\}$ sînt nuli, cu excepția liniilor corespunzătoare gradelor de libertate de translație pe direcțiile x, y și, respectiv, z.

Răspunsul modal maxim se calculează prin sumarea vectorială a răspunsurilor spectrale maxime pe cele trei direcții. În modul i, de exemplu, deplasările spectrale maxime relative, $\{\overline{\delta}_i\}_{max}$ au expresia :

$$\{\overline{\delta}_i\}_{max} = \{\overline{\delta}_{ix}\}_{max} + \{\overline{\delta}_{iy}\}_{max} + \{\overline{\delta}_{iz}\}_{max}. \tag{7}$$

Răspunsul total, în deplasări sau eforturi rezultante, se evaluează ca rădăcina pătrată a sumei pătratelor răspunsurilor modale maxime :

$$\{\delta_{max}\}_{RMS} = \left\{\sum_{i=1}^{n} \{\delta_i\}^2_{max}\right\}^{\frac{1}{2}},$$
$$\{\sigma_{max}\}_{RMS} = \left\{\sum_{i=1}^{n} \{\sigma_i\}^2_{max}\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

În cazul analizei spectrale bidimensionale, din relațiile prezentate mai înainte se păstrează cei doi parametri care caracterizează comportarea plană a sistemului (grade de libertate de translație în plan).

2. SCHEME DE DISCRETIZARE. IPOTEZE DE CALCUL

În figura 1 sînt prezentate vederi în perspectivă ale structurilor platformei de producție și ale platformei ușoare pentru capetele de erupție, structuri aflate în studiu pentru Marea Neagră.

Platforma de producție (fig. 1 *b*) este de tipul template, avînd o înălțime totală, inclusiv înălțimea turlei de foraj, de 74 m peste nivelul liniștit al mării, 130 m peste cota fundului mării și 220 m de la cota de batere a piloților. Ancorarea ei în teren se face cu opt piloți cu diametrul interior $D_i = 1000$ mm și grosimea medie a pereților $\delta_m = 25$ mm, bătuți la o adîncime de circa 90 m sub nivelul mării. Jachetul este compus din elemente tubulare de trei tipuri : montanți ($D_i = 1200$ mm, $\delta = 25$ mm), diagonale ($D_i = 530$ mm, $\delta = 10$ mm), contravîntuiri orizontale ($D_i = 270$ mm, $\delta = 10$ mm). El cuprinde cinci etaje și tot atîtea planșee de contravîntuire.

Platforma ușoară pentru capetele de erupție (fig. 1 *a*) este tot de tipul template și se impune ca soluție probabilă pentru faza preliminară de exploatare. Greutatea jachetului platformei ușoare se limitează la maximum 300 t din condiția de folosire la lansarea lui a macaralei existente pe platforma autoridicătoare din zonă. Ancorarea ei în teren se face cu patru piloți cu diametrul interior $D_i = 800$ mm și grosimea medie a pereților $\delta_m = 20$ mm. Jacketul este compus din elemente tubulare de tip montanți, diagonale sau contravîntuiri cu diametre interioare cuprinse între 270... ...1 000 mm și grosimi ale pereților de 10...20 mm.

Discretizarea structurii s-a efectuat cu elemente de tip BEAM caracterizate prin 12 deplasări (translații, rotiri) la cele două capete (cîte 6 la fiecare nod) și în mod corespunzător prin 12 eforturi secționale tridimensionale la capete (forță axială N; forțe tăietoare T_1, T_2; momente

încovoietoare M_1, M_2; moment de torsiune M_t), determinate într-un sistem local de coordonate. Elementul are o formă prismatică și este de direcție arbitrară într-un sistem tridimensional.

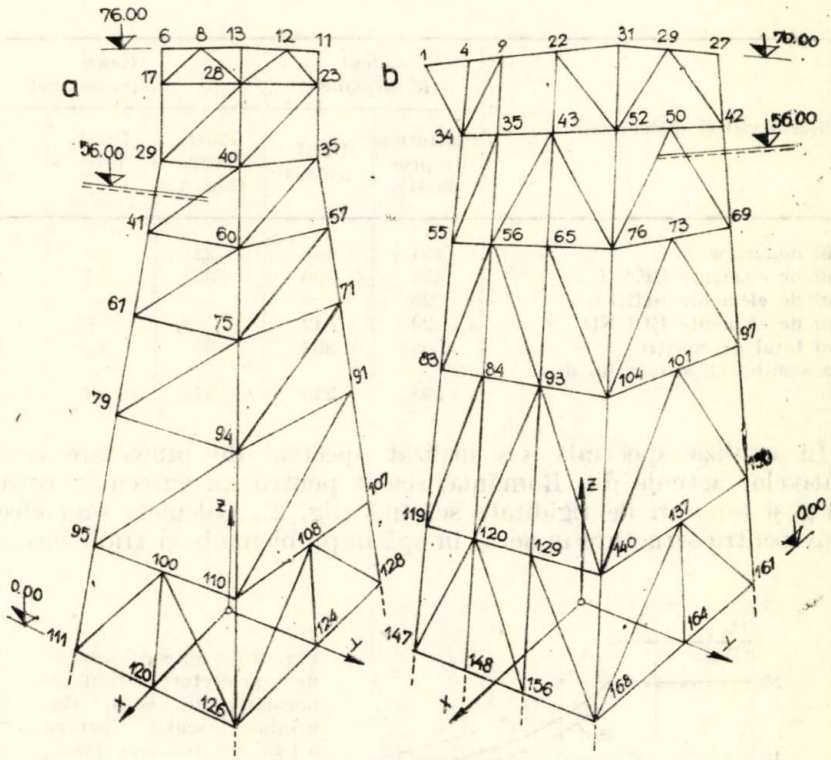


Fig. 1. — Vederi în perspectivă ale discretizărilor: *a* — platformă ușoară pentru capete de erupție, *b* — platformă de producție.

Discretizarea punții superioare a platformelor s-a efectuat cu elemente de tip placă subțire SHELL. Acest element imaginat de C. Fellipa și R. W. Clough are forma unui element spațial cvadrilateral de geometrie arbitrară obținut prin asamblarea a patru triunghiuri compatibile. Final, elementul are 20 grade de libertate, cîte cinci pe fiecare nod, definite în raport cu un sistem local de coordonate (se neglijează torsiunea în raport cu normala la suprafața elementului).

Interacțiunea structură-piloți-teren de fundare s-a modelat cu elemente de tip BOUND. Elementul este unidimensional, cu rigiditate axială sau de torsiune și are o orientare arbitrară în sistemul tridimensional. Coeficienții de rigiditate a elementului se adună direct la matricea de rigiditate a sistemului fără a introduce necunoscute suplimentare. Elementele BOUND s-au plasat la nivelul terenului, cîte trei în fiecare nod după direcțiile sistemului global de referință. Rigiditățile lor axiale s-au calculat funcție de rigiditatea pilotului și a terenului de fundare.

În tabelul 1 se prezintă cîteva date asupra discretizărilor de la cele două structuri menţionate mai înainte.

Caracteristicile elastice ale oţelului din structura platformei au fost următoarele : $E = 2\,100\,000$ daN/cm^2, $\mu = 0{,}14$.

Cacateristici discretizare	Calcul tridimensional		Calcul bidimensional		
	Platforma de producţie	Platf. uşoară	Platf. prod. faţa A	Platf. prod. faţa B	Platf. uşoară
Numărul nodurilor	194	146	22	33	25
Numărul de elemente BEAM	454	300	33	54	38
Numărul de elemente SHELL	26	4	—	—	—
Numărul de elemente BOUND	24	12	4	8	4
Numărul total de ecuaţii	1008	804	30	42	38
Lăţimea semibenzii sistemului de ecuaţii	288	210	14	24	16

În analiza spectrală s-a utilizat spectrul de proiectare conform normativelor actuale din România, scalat pentru un cutremur orizontal de 0,1 g şi terenuri de rigiditate scăzută (fig. 2). Calculele s-au efectuat succesiv pentru structura în aer şi în apă în problema bi şi tridimensională.

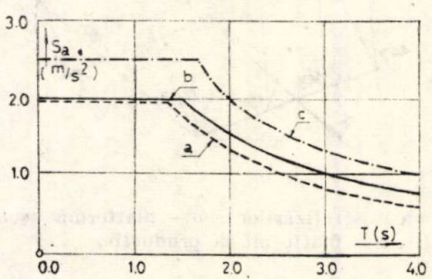


Fig. 2. — Spectru seismic de proiectare — conform normativ din R. S. România — scalat pentru 0,1 g : *a* — terenuri rigide ; *b* — terenuri de rigiditate mijlocie ; *c* — terenuri de rigiditate scăzută.

Analiza spectrală a necesitat într-o primă etapă calculul modurilor proprii de vibraţie (frecvenţe şi forme proprii) care s-au evaluat în aceleaşi ipoteze de calcul şi cu neglijarea amortizării.

3. CONSIDERAŢII ASUPRA REZULTATELOR

În figura 3 se prezintă primele patru moduri proprii tridimensionale de vibraţie ale structurii platformei marine de producţie avînd o încărcare utilă pe punte de 32 000 KN. Alura formelor proprii nu diferă între cazurile platformei în apă sau aer. În schimb perioadele proprii echivalente ale platformei în apă cresc de peste 2,0 ori faţă de cazul platformei în aer. Perioada fundamentală proprie de $T_f = 1{,}6$ secunde rezultate din calculul tridimensional în cazul platformei în apă o încadrează în domeniul structuri-

lor flexibile. În figura 4 se prezintă primele două moduri proprii bidimensionale de vibrație pe direcțiile transversală și longitudinală.

Analiza primelor două moduri proprii tridimensionale relevă un aspect interesant și mai greu de sesizat, acela că platforma are rigiditate relativă mai mare pe direcția ei transversală decît pe cea longitudinală.

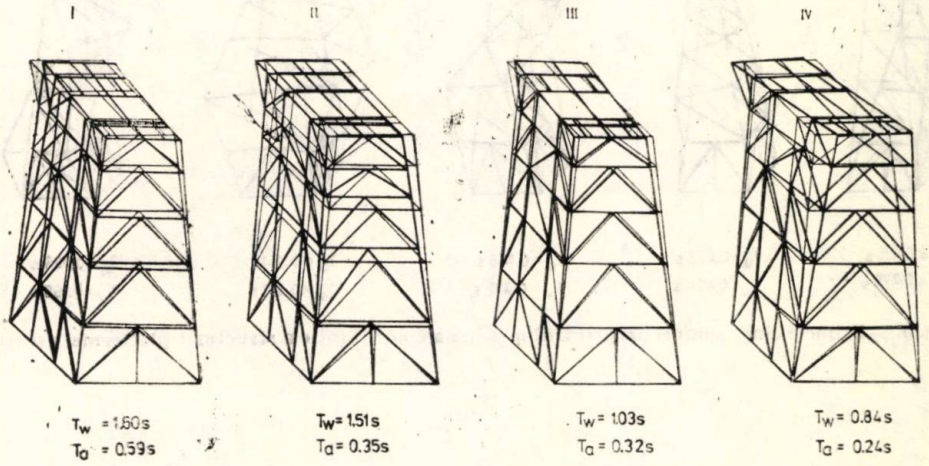


Fig. 3. — Primele patru moduri proprii tridimensionale de vibrație a structurii platformei de producție.

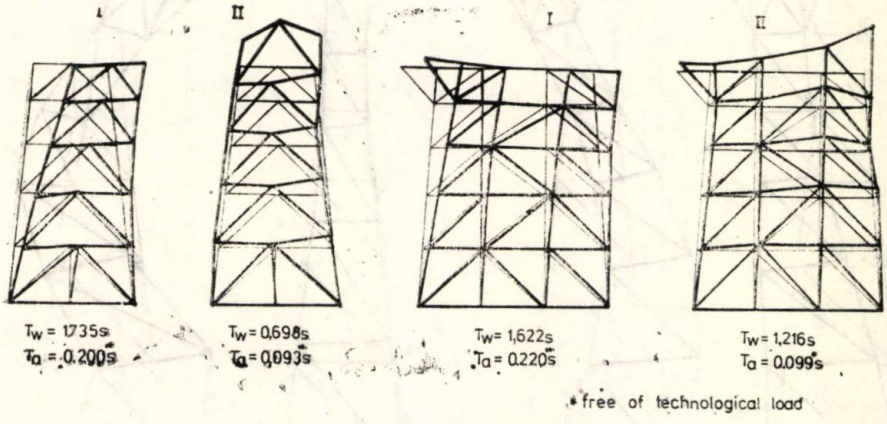


Fig. 4. — Primele două moduri proprii de vibrație a structurii platformei de producție rezultate în calculul bidimensional: *a* — direcție transversală; *b* — direcție longitudinală.

Această constatare se susține prin alura modului fundamental care se dezvoltă predominant pe direcția longitudinală a structurii. Și în calculul bidimensional acest aspect este pus în evidență în ipoteza de calcul a platformei în aer prin perioada fundamentală a cadrului transversal ($T_{1,t}$ = = 0,20 s) care rezultă comparativ mai scurtă decît perioada fundamentală a cadrului longitudinal ($T_{1,l}$ = 0,22 s). Explicația acestui fenomen ar putea

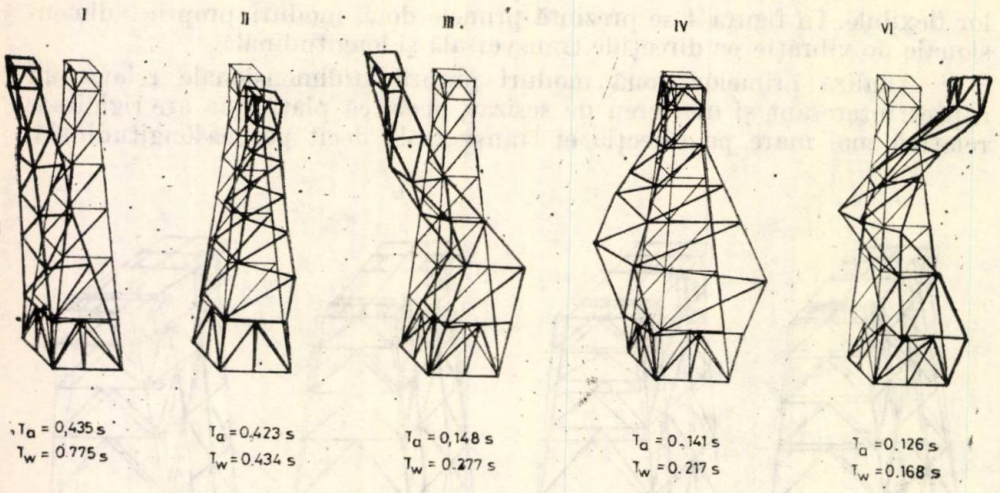


Fig. 5. —Primele cinci moduri proprii tridimensionale de vibrație a structurii platformei ușoare.

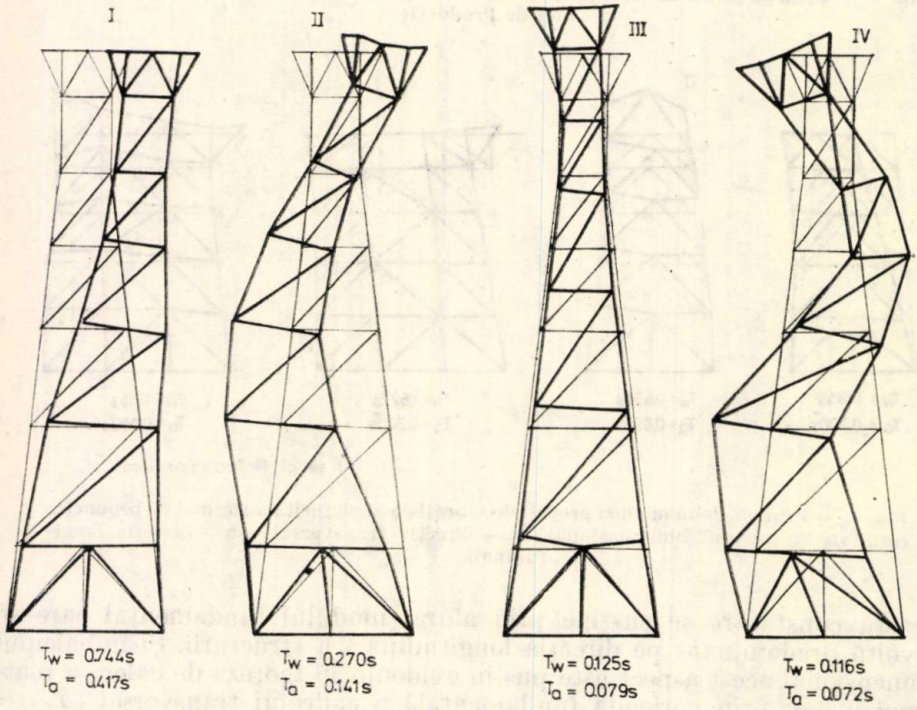


Fig. 6. — Primele patru moduri proprii bidimensionale de vibrație a structurii platformei ușoare.

fi dată de dimensiunile comparativ mai mari ale diagonalelor cadrului longitudinal față de cele ale cadrului transversal. Totuși, în ipoteza platformei în apă, primele perioade de vibrație pe cele două direcții sînt de valori apropiate (1,60 s și 1,51 s), reliefînd o distribuție rațională a rigidităților care asigură o preluare tridimensională armonioasă pe ambele direcții a solicitărilor seismice.

Analiza tridimensională, cum de altfel era de așteptat, pune în evidență moduri proprii suplimentare față de cea bidimensională. Astfel, modul propriu 3 este un mod specific de torsiune, iar modul 4 se dezvoltă aproximativ simetric în raport cu o axă verticală prin centrul platformei. De remarcat că într-un calcul bidimensional nu pot fi puse în evidență modurile proprii specifice de torsiune care pot avea influențe relativ însemnate în răspunsul spectral al structurii.

Concluziile asupra vibrațiilor libere ale structurilor marine de tip template prezentate mai înainte rezultă și din figurile 5 și 6 în care se prezintă primele moduri de vibrație bi și tridimensionale a structurii platformei ușoare pentru capetele de erupție. Această structură are rigidități practic identice față de axele orizontale x și y (fig. 1 *a*), aspect ce este reliefat și de primele două perioade proprii de vibrație a structurii în aer (0,43 s și 0,42 s). În cazul platformei în apă, prin efectul maselor adiționale de apă pe direcția cutremurului perioada fundamentală a structurii analizate crește la 0,77 s.

În figurile 7 și 8 se prezintă pentru cele două structuri analizate accelerațiile spectrale de răspuns la acțiunea unui cutremur orizontal de 0,1 g conform spectrului normativ românesc entru terenuri de rigiditate

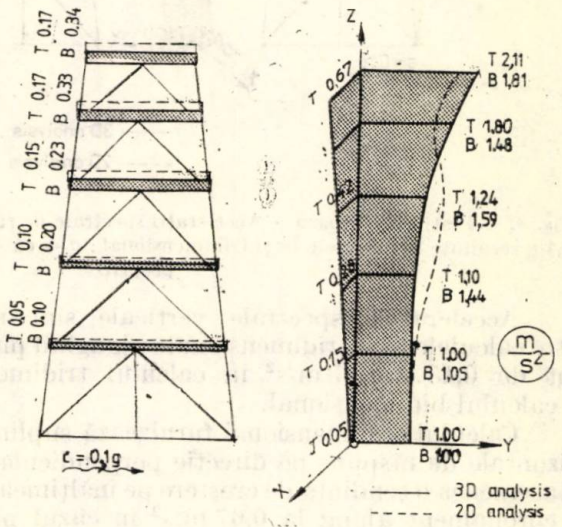


Fig. 7. — Platforma de producție — Accelerații spectrale de răspuns la un cutremur orizontal de 0,1 g rezultate în calculele bi și tridimensional cu 4 moduri proprii considerate.

scăzută (fig. 2). Se constată că pe direcția cutremurului, direcție pe care se dezvoltă accelerațiile spectrale de răspuns cele mai importante, calculele bi și tridimensionale conduc la rezultate apropiate. În cazul platformei ușoare rezultatele respective sînt practic identice. O contribuție foarte importantă în răspunsul spectral calculat cu relațiile Rosenblueth are modul fundamental de vibrație. În relațiile de calcul s-au considerat pri-

mele patru moduri proprii. Considerarea primelor opt moduri proprii în răspuns la platforma ușoară nu aduc modificări în rezultate (fig. 8 *b*). Accelerațiile spectrale de răspuns cresc pe înălțimea structurii, la coronament amplificările fiind de 2,1...2,8 ori față de bază.

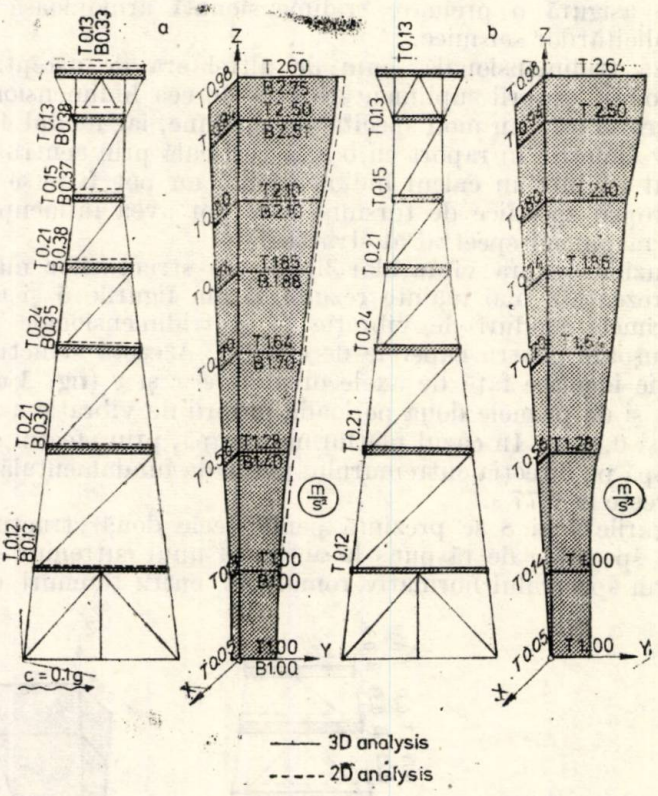


Fig. 8. — Platforma ușoară — Accelerații spectrale de răspuns la un cutremur orizontal de 0,1 g rezultate în calculele bi și tridimensional : *a* — cu 4 moduri proprii ; *b* — cu 8 moduri proprii.

Accelerațiile spectrale verticale sînt relativ modeste, diferențele între calculele bi și tridimensionale ajungînd pînă la 100 %. Valorile maxime sînt de 0,13...0,17 m/s² în calculul tridimensional și 0,34...0,38 m/s² în calculul bidimensional.

Calculul tridimensional furnizează suplimentar accelerațiile spectrale orizontale de răspuns pe direcție perpendiculară la cutremur. Ele prezintă de asemenea o tendință de creștere pe înălțimea structurilor, valorile maxime la coronament ajung la 0,67 m/s² în cazul platformei fixe și 0,98 m/s² în cazul platformei ușoare. Rezultă că amplificările orizontale pe direcția perpendiculară la cutremur sînt de circa 1/3 față de corespondentele lor de pe direcția cutremurului. Avînd valori relativ însemnate este recomandabil să nu fie neglijate în calcule.

Diferențe mai însemnate între rezultatele calculelor bi și tridimensional apar în cazul eforturilor seismice de răspuns. Pentru același cutremur

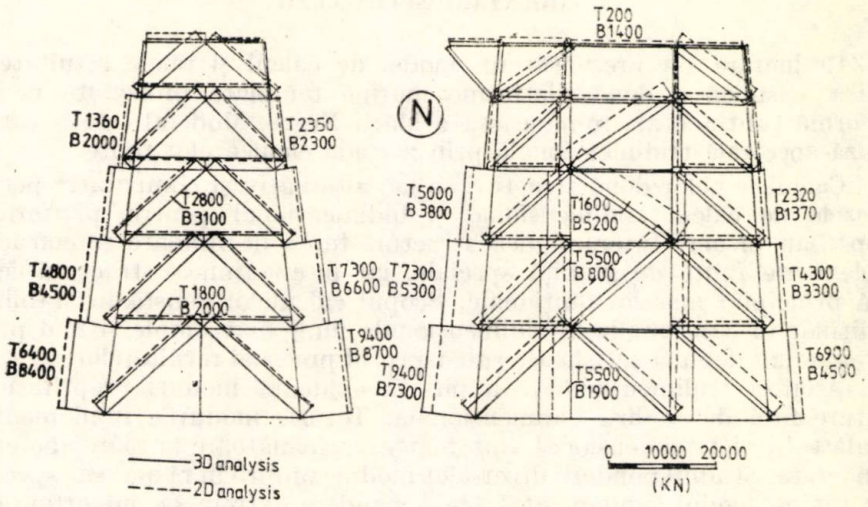


Fig. 9. — Platforma de producție. Forțe axiale de răspuns spectral la un cutremur orizontal de 0,1 g în calculele bi și tridimensional.

orizontal de 0,1 g în figurile 9 și 10 sînt reprezentate diagramele de forță axială de răspuns în cele două ipoteze de calcul pentru platforma de producție și, respectiv, platforma ușoară.

Structurile analizate preiau acțiunea seismică cu preponderență prin eforturi secționale axiale (N). Eforturile seismice sînt relativ importante, comparabile ca ordin de mărime cu cele din greutatea proprie sau încărcarea tehnologică în cazul platformei de producție. Cele mai importante solicitări apar în montanți (jacket + piloți) și cresc de la coronament spre bază.

În cazul platformei de producție, spre exemplu, efortul secțional axial maxim se produce într-un montant de la bază și are valoarea de 9400 KN în calculul tridimensional și 7300 KN sau 8700 KN în calculul bidimensional pentru cadrul longitudinal și respectiv transversal. În cazul platformei ușoare N maxim rezultă tot într-un montant de la bază fiind de 590 KN în calculul tridimensional și 390 KN în calculul bidimensional. Diferențe și mai mari între rezultate apar în cazul diagonalelor, care în general rezultă mult mai solicitate în calculul bidimensional. Rezultă că neglijarea conlucrării tridimensionale conduce la modificări importante în răspunsul seismic al structurilor analizate, îndepărtînd rezultatele de situația reală.

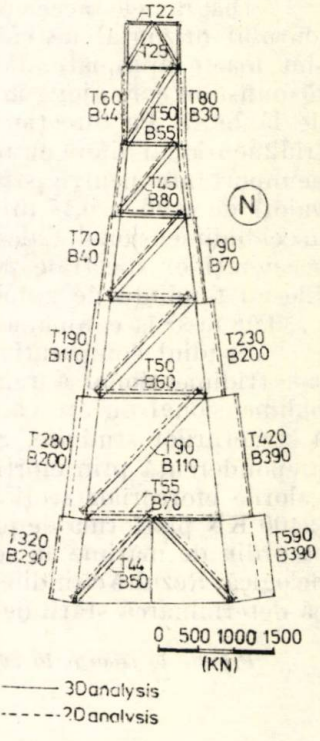


Fig. 10. — Platforma ușoară. Forțe axiale de răspuns spectral la un cutremur orizontal de 0,1 g în calculele bi și tridimensional.

4. COMENTARII ȘI CONCLUZII

În lucrare s-a prezentat un model de calcul și unele rezultate în analiza seismică a două platforme marine template proiectate pentru platforma continentală românească a Mării Negre. Modelul este bazat pe analiză spectrală tridimensională prin metoda elementelor finite.

Calculele celor două structuri se fac alternativ și comparativ pentru ipotezele de calcul tridimensional și bidimensional pentru platformele în apă sau în aer. Interacțiunea structură-teren de fundare se consideră cu elemente finite de graniță speciale, iar interacțiunea structură-lichid după principiul maselor adiționale. Scopul calculelor constă în stabilirea condițiilor în care analizele bidimensionale mult mai simple și mai puțin oneroase dau deplină satisfacție sub aspectul preciziei rezultatelor.

Analiza tridimensională a pus în evidență moduri proprii suplimentare față de analiza bidimensională. Totuși, modurile fundamentale calculate bi și tridimensional sînt foarte asemănătoare în toate ipotezele considerate. Studiul ponderii diverselor moduri proprii în răspunsul spectral a arătat că modul fundamental are o pondere extrem de importantă în răspuns, mai ales pe direcția cutremurului de calcul. S-a considerat conform uzanțelor un cutremur de calcul orizontal.

Diagramele accelerațiilor spectrale de răspuns pe direcția cutremurului orizontal de calcul furnizate de calculele bi și tridimensionale sînt foarte apropiate. Pe înălțimea structurilor se produc amplificări ale răspunsului care ajung în zona coronamentului la 2,1...2,8 ori accelerațiile de la bază. Pe direcție verticală accelerațiile spectrale calculate bi sau tridimensional diferă cu pînă la de 2,5 ori, dar au valori modeste, în general neimportante pentru structură. În cazurile analizate ele s-au situat la valori de 0,00...0,17 m/s^2 în calculul tridimensional și 0,00...0,38 m/s^2 în cel bidimensional. Calculul tridimensional furnizează suplimentar valorile accelerațiilor spectrale pe direcția orizontală perpendiculară la cutremur. Ele au tendință de amplificare pe înălțime, ajungînd la valori de 0,67 ...0,98 m/s^2 la coronament.

Studiul comparativ al eforturilor seismice de răspuns calculate bi sau tridimensional a reliefat unele diferențe esențiale. Ipoteza de calcul bidimensional nu are capacitatea de modelare corectă a comportării reale a structurilor studiate. Structurile analizate preiau acțiunea seismică cu preponderență prin eforturi secționale axiale (N). La cutremurul de 0,1 g valorile eforturilor secționale axiale de răspuns ating valori importante (9400 KN platforma de producție, 590 KN platforma ușoară), comparabile ca ordin de mărime cu solicitările din greutatea proprie sau sarcina tehnologică. Rezultă că indiferent de modelul de calcul seismic adoptat se impune ca determinarea stării de efort să se facă tridimensional pe structura reală.

Primită la redacție la 26 decembrie 1982

BIBLIOGRAFIE

1. A. MIHĂILESCU, E. NICOARĂ, *Platforme fixe de foraj și producție pentru hidrocarburi pe platforma continentală românească a Mării Negre*, Buletinul Științific I.C.B., *1—2* (1978).

2. A. CARACOSTEA, I. BUCĂ, O. OPRAN, *Probleme de concepție în alcătuirea structurii de rezistență a platformelor fixe de foraj de exploatare în condițiile litoralului românesc al Mării Negre*, Buletinul Științific I.C.B., *1—2* (1978).

3. R. W. CLOUGH, J. PENZIEN, *Dynamics of structures*, McGraw-Hill, Inc., 1975.

4. A. POPOVICI, *Dynamic analysis through numerical methods* (in rumanian), I.C.B., Bucharest, 1978.

5. A. POPOVICI, P. ȘUPROVICI, *Seismic analysis of offshore platforms* (in rumanian), Hidrotehnica, *9* (1978).

6. E. L. WILSON, K. J. BATHE, F. E. PETERSON, *SAP IV — A structural analysis program for static and dynamic response of linear systems*, University of California, Berkeley, 1973.

7. K. J. BATHE, E. L. WILSON, R. H. IDING, *NONSAP — A structural analysis program for static and dynamic response of nonlinear systems*, University of California, Berkeley, 1974.

8. I. BUCĂ, A. POPOVICI, V. FIERBINȚEANU, E. NICOARĂ, *Analiza statică și dinamică a structurii metalice a platformelor marine fixe*, Buletinul Științific I.C.B., *1—2* (1978).

EFORTURI ÎN SISTEME DE BARE CONCURENTE DATORATE INEXACTITĂȚILOR DE EXECUȚIE

de GEORGE PETRESCU, DAN ILINCIOIU

Universitatea din Craiova

În sistemele materiale formate din bare concurente într-un punct comun de articulație și legate, tot articulat, la o bază comună, pot lua naștere eforturi axiale inițiale, dacă lungimile reale ale barelor sînt diferite de cele proiectate. Eforturile apar în momentul montajului, ca urmare a forțării barelor să se articuleze în punctul comun de concurență. În lucrare se demonstrează formulele de calcul pentru deplasarea punctului comun de concurență și pentru eforturile axiale inițiale din bare.

1. INTRODUCERE

Se consideră sistemul de bare concurente în același punct, dispuse oricum în spațiu (fig. 1).

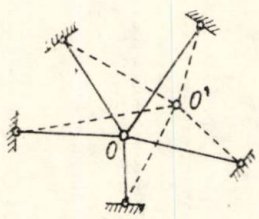


Fig. 1

Dacă barele au fost executate conform proiectului, ele se asamblează ușor și nu vor prezenta nici un fel de solicitări inițiale.

Dacă însă o parte din bare sau totalitatea acestora sînt executate cu diferențe de lungime față de cotele de proiectare, prin forțarea montajului, punctul comun de concurență se va deplasa din O în O' și în fiecare bară vor lua naștere eforturi axiale inițiale.

Rezolvarea unor asemenea probleme a fost făcută numai pentru cazuri foarte particulare [1—5].

În prezenta lucrare se arată determinarea deplasării punctului comun de concurență și a eforturilor din bare, pentru cazul cel mai general posibil.

2. IPOTEZE DE LUCRU

Toate barele componente ale sistemului se consideră articulate la ambele capete, astfel încît vor fi supuse numai la solicitări axiale.

Bara de ordinul i are rigiditatea axială E_iA_i, lungimea L_i și poziția în spațiu definită prin cosinușii directori l_i, m_i, n_i, față de un sistem cartezian de axe cu originea în punctul O.

Diferența dintre lungimea de proiect a barei de ordinul i și lungimea de execuție se notează cu δL_i.

St. Cerc. Mec. Apl., Tom 43, Nr. 1, 1984, P. 94—98

Deoarece δL_i este foarte mic, în calculele care urmează se va folosi numai lungimea de proiect L_i.

Toate diferenţele de lungimi, ca şi deformaţiile căpătate fiind foarte mici, geometria generală a sistemului nu va fi sensibil alterată, astfel că pentru poziţiile finale ale barelor se pot utiliza cosinuşii directori iniţiali.

Sistemul de bare nu este solicitat prin sarcini. Singurele solicitări provin numai din forţarea montajului.

Prin deformare forţată a sistemului, punctul teoretic de concurenţă va trece în poziţia O', avînd astfel o deplasare $OO' = \Delta$, de componente u, v, w.

3. CALCULUL EFORTURILOR DIN BARE

Se consideră bara oarecare II', mai scurtă decît lungimea de proiect cu cantitatea $I'O = L_i$ (fig. 2). Prin forţarea montajului, bara va ocupa poziţia IO', avînd o lungime finală $L_i + \Delta L_i$.

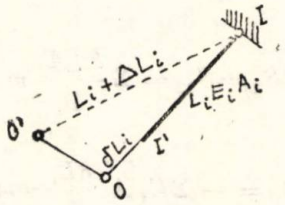


Fig. 2

Deformaţia totală a barei de ordinul i, după montaj, va fi:

$$\Delta L_i = \delta L_i + ul_i + vm_i + wn_i = \frac{N_i L_i}{E_i A_i}. \tag{1}$$

De aici rezultă eforturile axiale din bara de ordinul i:

$$N_i = \frac{E_i A_i}{L_i}(\delta L_i + ul_i + vm_i + wn_i). \tag{2}$$

Eforturile axiale din bare formează un sistem de forţe concurente pentru care se scriu condiţiile de echilibru de proiecţii pe axe:

$$\begin{aligned} \Sigma X &= \Sigma N_i l_i = \Sigma \frac{E_i A_i}{L_i}(\delta L_i + ul_i + vm_i + wn_i) l_i = 0, \\ \Sigma Y &= \Sigma N_i m_i = \Sigma \frac{E_i A_i}{L_i}(\delta L_i + ul_i + vm_i + wn_i) m_i = 0, \\ \Sigma Z &= \Sigma N_i n_i = \Sigma \frac{E_i A_i}{L_i}(\delta L_i + ul_i + vm_i + wn_i) n_i = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

De aici rezultă următorul sistem de ecuații :

$$u\Sigma\frac{E_i A_i}{L_i}l_i^2 + v\Sigma\frac{E_i A_i}{L_i}l_i m_i + w\Sigma\frac{E_i A_i}{L_i}l_i n_i = -\Sigma E_i A_i\frac{\delta L_i}{L_i}l_i,$$

$$u\Sigma\frac{E_i A_i}{L_i}m_i l_i + v\Sigma\frac{E_i A_i}{L_i}m_i^2 + w\Sigma\frac{E_i A_i}{L_i}m_i n_i = -\Sigma E_i A_i\frac{\delta L_i}{L_i}m_i, \quad (4)$$

$$u\Sigma\frac{E_i A_i}{L_i}n_i l_i + v\Sigma\frac{E_i A_i}{L_i}n_i m_i + w\Sigma\frac{E_i A_i}{L_i}n_i^2 = -\Sigma E_i A_i\frac{\delta L_i}{L_i}n_i.$$

Se fac următoarele notații :

$$S_{11} = \Sigma\frac{E_i A_i}{L_i}l_i^2; \quad S_{22} = \Sigma\frac{E_i A_i}{L_i}m_i^2; \quad S_{33} = \Sigma\frac{E_i A_i}{L_i}n_i^2, \quad (5)$$

$$S_{12}=S_{21} = \Sigma\frac{E_i A_i}{L_i}l_i m_i; \; S_{23}=S_{32} = \Sigma\frac{E_i A_i}{L_i}m_i n_i; \; S_{31}=S_{13}=\Sigma\frac{E_i A_i}{L_i}n_i l_i,$$

$$S_x = -\Sigma E_i A_i\frac{\delta L_i}{L_i}l_i; \; S_y = -\Sigma E_i A_i\frac{\delta L_i}{L_i}m_i; \; S_z=-\Sigma E_i A_i\frac{\delta L_i}{L_i}n_i. \quad (6)$$

Atunci sistemul de ecuații (4) devine :

$$\begin{aligned} uS_{11} + vS_{12} + wS_{13} &= S_x, \\ uS_{21} + vS_{22} + wS_{23} &= S_y, \\ uS_{31} + vS_{32} + wS_{33} &= S_z. \end{aligned} \quad (7)$$

Se notează determinanții :

$$D = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_x = \begin{vmatrix} S_x & S_{12} & S_{13} \\ S_y & S_{22} & S_{23} \\ S_z & S_{32} & S_{33} \end{vmatrix}, \quad (8)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} S_{11} & S_x & S_{13} \\ S_{21} & S_y & S_{23} \\ S_{31} & S_z & S_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_z = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_x \\ S_{21} & S_{22} & S_y \\ S_{31} & S_{32} & S_z \end{vmatrix}. \quad (9)$$

În acest fel, prin rezolvarea sistemului (7), rezultă componentele deplasării $OO' = \Delta$:

$$u = \frac{D_x}{D}; \quad v = \frac{D_y}{D}; \quad w = \frac{D_z}{D}; \tag{10}$$

și, respectiv, eforturile axiale din bara de ordinul i :

$$N_i = \frac{E_i A_i}{L_i}\left(\delta L_i + \frac{D_x l_i + D_y m_i + D_z n_i}{D}\right). \tag{11}$$

Pentru sisteme de bare concurente plane, făcînd $n_i = 0$, rezultă :

$$N_i = \frac{E_i A_i}{L_i}\left(\delta L_i + \frac{D_x l_i + D_y m_i}{D}\right). \tag{12}$$

4. APLICAȚIE PENTRU UN CAZ PARTICULAR

Se consideră cazul particular al unui sistem format din trei bare, prezentînd simetrie geometrică și fizică (fig. 3), în care barele laterale sînt executate corect, dar bara centrală este mai scurtă cu cantitatea δ, caz tratat și rezolvat în literatura de specialitate [1—5].

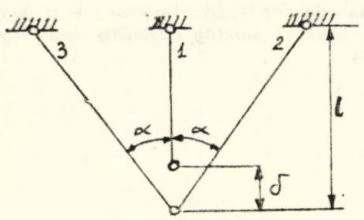


Fig. 3

În acest caz, particularitatea sistemului este redată prin următoarele elemente :

$$L_1 \cong l; \quad L_2 = L_3 = \frac{l}{\cos \alpha},$$

$$l_1 = 0; \quad l_2 = \sin \alpha; \quad l_3 = -\sin \alpha,$$

$$m_1 = 1; \quad m_2 = \cos \alpha; \quad m_3 = \cos \alpha, \tag{13}$$

$$n_1 = n_2 = n_3 = 0,$$

$$L_1 = \delta; \quad \delta L_2 = \delta L_3 = 0.$$

Prin înlocuirea acestora în formula generală (11), se obține:

$$N_1 = \frac{2\delta E_1 A_1 E_2 A_2 \cos^3 \alpha}{l(E_1 A_1 + 2E_2 A_2 \cos^3 \alpha)},$$

$$N_2 = N_3 = -\frac{\delta E_1 A_1 E_2 A_2 \cos^2 \alpha}{l(E_1 A_1 + 2E_2 A_2 \cos^3 \alpha)}. \tag{14}$$

5. CONCLUZII

Prin utilizarea formulelor (1), (10) și (11) se pot calcula: deplasarea punctului comun de concurență, eforturile axiale și deformațiile totale ale barelor componente, pentru orice sistem real. Valorile calculate rezultă și cu semnele care dau sensurile reale ale mărimilor respective. Se poate folosi cu ușurință calculul numeric automat.

Primită la redacție la 8 martie 1983

BIBLIOGRAFIE

1. N. M. BELEAEV, *Sbornik zadaci po soprotivleniu materialov*, Fizmatghiz, Moskva, 1962.
2. GH. BUZDUGAN, *Rezistența materialelor*, Edit. tehnică, București, 1970.
3. GH. BUZDUGAN, ș.a., *Culegere de probleme din rezistența materialelor*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1979.
4. I. DEUTSCH, *Rezistența materialelor*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1978.
5. I. N. MIROLYUBOV, ș.a., *Au Sid to Solving Problems in Strength of Materials*, Mir Publishers, Moscow, 1974.

RECENZII

R. A. HAEFER, Kryo-Vakuumtechnik. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg — New York, 1981, 313 p., 162 fig.

În ultimii ani, în domeniul tehnicii vidului, o importanță crescîndă au căpătat-o metodele criogenice de obținere a vidului, care pemit nu numai crearea unui vid înalt într-o perioadă scurtă de timp, dar și obținerea unui vid, „curat", liber de vapori de ulei sau alte substanțe organice. Cartea dr. René A. Haefer, edtată în 1981 de către Springer-Verlag, vine să confirme utilizările multiple și cu caracter special ale criotehnicii vidului, prezentînd într-un volum separat principiile de bază și variatele utilizări ale vidului obținut cu ajutorul tehnicii temperaturilor joase.

După o prezentare rezumativă a bazelor tehnicii vidului, cartea lui R. A. Haefer, a unuia din creatorii și inițiatorii acestui domeniu de perspectivă, tratează corespondența dintre criotehnică și tehnica vidului, oprindu-se asupra sistemelor de răcire și asupra mecanismelor pompelor criogenice. În mod detaliat autorul prezintă diversele mecanisme care stau la baza obținerii vidului prin metode de criogenie, indicînd și problematica măsurării vidului în cavități neizoterme. În această ordine de idei, capitole separate sînt consacrate condensării diverselor gaze, criosorbției pe solide poroase, pe straturi subțiri metalice etc.

O deosebită atenție este acordată în monografie pompelor criogenice și execuției practice ale acestora, cartea constituind prin aceasta un prețios îndreptar practic pentru ingineri și tehnicieni. Nu sînt uitate nici considerațiile economice legate de construcția și utilizarea pompelor criogenice, ceea ce conferă monografiei un plus de valoare.

Ultimul capitol, al zecelea, este consacrat în întregime aplicațiilor tehnicii criovidului. Astfel, ca un domeniu extrem de important, unde tehnica criovidului are aplicații esențiale, este indicat domeniul cercetărilor spațiale, unde prin esența lucrurilor trebuie să se asigure atît un vid înalt, cît și temperaturi joase (circa 2 K).

Un alt domeniu al aplicațiilor tehnicii criovidului îl constituie acceleratoarele de particule, microscopia electronică, difracția de electroni, spectroscopia de masă etc., unde existența unui vid „curat", liber de cele mai mici urme de substanțe organice, constituie o condiție sine qua non.

Fizica plasmei și fuziunea termonucleară, microelectronica bazată pe straturi subțiri, criotehnica și crioenergetica, chimia și metalurgia constituie alte sectoare ale științei și tehnicii care pot profita de pe urma tehnicilor criovidului.

Însoțită de 162 de figuri și o serie de tabele extrem de folositoare privind proprietățile fizice ale ale substanțelor de interes, scrisă fntr-un stil îngrijit și tipărită în condiții excelente, monografia lui R. A. Haefer constituie un îndreptar comod și foarte prețios pentru oricine care e interesat în producerea și utilizarea vidului.

E. Cruceanu

H. G. BAUMANN, *Proiectarea și construirea sistematică* (Systematisches Projektieren and Konstruiren), Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Verlag Stahleisen m.b.H. Düsseldorf, 1982, cu 195 figuri și 30 tabele.

Instalațiile complexe necesare diferitelor ramuri industriale devin din ce în ce mai complicate datorită cerințelor sporite impuse unor caracteristici tehnice a calității și gradului de automatizare a acestor instalații. Volumul mare de date și interacțiuni funcționale de care trebuie să se țină seama la proiectarea unor asemenea instalații complexe nu mai poate fi cuprins și prelucrat cu ajutorul unor metode inginerești clasice. Datorită prelucrării rapide a rezultatelor cercetărilor în producție scade durata de viață morală a instalațiilor industriale, iar durata afectată proiectării unor asemenea instalații trebuie să scadă pentru a face față cererilor de noi produse îmbunătățite. Această cerință nu poate fi realizată decît prin raționalizarea activității de proiectare, printr-o sistematizare a acesteia. Cartea pe care o recenzăm are ca obiect prezen-

tarea unei activități de proiectare sistematizată. Aceasta se realizează prin parcurgerea prin pași succesivi a întregii activități de proiectare pornind de la ansamblul obiectului și mergînd la detalii.

Întregul material este prezentat în opt capitole, urmărindu-se succesiv treptele principale care trebuie parcurse.

Capitolul 1 reprezintă o introducere în problema proiectării sistematice. Următoarele cinci capitole reprezintă chiar treptele principale ale proiectării sistematice și anume :

capitolul 2 — clasificarea problemei ; capitolul 3 — stabilirea interacțiunilor logice ; capitolul 4 — stabilirea interacțiunilor fizice ; capitolul 5 — stabilirea interacțiunilor constructive ; capitolul 6 — realizarea documentației de ofertă și de execuție.

Ultimele două capitole prezintă o serie de probleme de ordin economic, organizatoric și sînt prezentate sub denumirea : capitolul 7 — probleme auxiliare tehnic-organizatorice ale proiectării și construcției ; capitolul 8 — anexă, în care se prezintă și un exemplu pentru o instalație de zincare.

Cartea cuprinde exemple din diferite domenii ale construcției de mașini.

Aplicarea sistematizării propuse reprezintă un prim pas spre proiectarea asistată de calculator, o metodă modernă care permite o creștere substanțială a productivității muncii în proiectare.

G. Winter

H. G. BAUMANN, K. H. LOOSCHELDESS, *Proiectarea asistată de calculator* (Rechnerunterstütztes Projektieren und Konstruiren) Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Verlag Stahleisen m.b.H. Düsseldorf, 1982, cu 103 figuri, 42 tabele și 26 scheme logice de programare pe calculator.

Proiectarea, construcția instalațiilor și a sistemelor tehnice în general, devine din ce în ce mai complicată datorită diversității condițiilor impuse de beneficiari. Concomitent, datorită unor considerente economice, se urmărește scurtarea duratei procesului cercetare-proiectare-execuție. În aceste condiții se impune scurtarea timpului de proiectare prin mărirea productivității muncii și a flexibilității compartimentelor de proiectare prin introducerea unor metode sistematice, asistate de calculator. Autorii volumului „Proiectarea asistată de calculator" își propun să prezinte modul de lucru și conexiunile pentru utilizarea calculatoarelor numerice la proiectarea sistemelor tehnice complexe. În acest scop, se pornește de la structurile de bază a sistematicii proiectării asistate pe calculator. Procedeul se exemplifică pe baza unei instalații de zincare.

Metoda de lucru descrisă asigură :

— tratarea unui sistem tehnic care trebuie proiectat, pornind treptat, după nivele de complexitate, de la ansamblu la detalii ;

— existența unui sistem de programe care conduce pe proiectant spre luarea unor decizii pe baza cărora efectuează calculele ;

— desfășurarea întregului proces de proiectare asistată de calculator, avînd ca date de intrare condițiile tehnice impuse sistemului tehnic, executînd efectuarea calculelor necesare pînă la realizarea desenelor de execuție ;

— posibilitatea de extragere din desfășurarea programului a unor date care să permită refolosirea proiectelor executate sau unor părți din acestea.

Volumul cuprinde o parte din materialul prezentat de aceiași autori în lucrarea „Proiectarea și construirea sistematică" fiind completat cu capitole privind :

— configurațiile de calculatoare ;

— proiectarea și construirea sistematică asistată de calculator, în care sînt prezentate programul de bază și subrutinele utilizate ;

— schema logică a desfășurării programului și subrutinelor ;

Volumul cuprinde, de asemenea, o bibliografie bogată.

G. Winter

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică :

- Studii originale de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.
- Note (lucrări mai scurte cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni).
- Referate ştiinţifice şi tehnice, la care se expun stadiul actual al unei anumite probleme, subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.
- Recenzii asupra cărţilor şi studiilor române şi străine.

Domeniile de specialitate ale revistei sînt :

- Astrodinamica (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţii, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosfera rarefiată, în atmosfera densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).
- Aerodinamica (mecanica fluidelor, aerodinamica, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).
- Hidrodinamica (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).
- Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calcul al maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).
- Mecanica generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).
- Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, stabilitatea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).
- Tehnica măsurătorilor (aparate electrice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi izotopilor radioactivi în tehnică).

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

★

Manuscrisele se vor trimite la sediul Comitetului de redacţie, Bucureşti, 70701, str. Const. Mille, nr. 15, sectorul 1.

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

DRAGOŞ CIOCLOV, **Recipiente sub presiune. Analiza stării de tensiune şi deformaţie**, 1983, 354 p., 32 lei.
V. HANDRA-LUCA, **Funcţiile de transmitere în studiul mecanismelor**, 1983, 260 p., 20 lei.
IOAN I. MUNTEANU, **Structuri pentru construcţii. Teorie şi calcul**. Vol. I, 1983, 198 p., 18 lei.
ŞTEFAN BĂLAN, VALERIU CRISTESCU, ION CORNEA (sub redacţia), **Cutremurul de pământ din România de la 4 martie 1977**, 1982, 516 p., 10 lei.
ALEXE MARINESCU, **Probleme optimale în dinamica zborului spaţial**, 1982, 253 p., 20 lei.
GORUN MANOLESCU, **Abordarea ierarhic structurală şi informatică**, 1982, 192 p., 14,50 lei.
VOICU DOLOCAN, **Fizica joncţiunilor cu semiconductoare**, 1982, 320 p., 30 lei.
A. CARABULEA, I. GH. CARABOGDAN, **Modele de bilanţuri energetice reale şi optime**, 1982, 326 p., 39 lei.
DAN TEODORESCU, **Modele stohastice optimizate**, 1982, 246, p., 20 lei.
ELIE CARAFOLI, V. N. CONSTANTINESCU, **Dinamica fluidelor incompresibile**, 1981, 639 p., 44 lei.
VALERIU PETCU, GEORGETA STĂNCULESCU, UMBERTO PANCALDI, **Adaptabilitatea plastică a structurilor din beton armat**, 1981, 236, p., 12 lei.
GEORGE ŞT. ANDONIE, **Istoria ştiinţelor în România. Matematica, Mecanica, Astronomia**, 1981, 168 p., 9 lei.
LIVIU DUMITRAŞCU, IACHIM ALEXANDRU, **Tehnici de construire a programelor cu structuri alternative**, 1981, 295 p., 20,40 lei.
TITUS PETRILA, **Modele matematice în hidrodinamica plană. Cercetări asupra influenţei pereţilor nelimitaţi**, 1981, 239 p., 10,50 lei.
ION BOLDEA, **Vehicule pe pernă magnetică**, 1981, 283 p., 16 lei.
MIHAI FLORESCU, EDMOND NICOLAU, EUGENIU NICULESCU-MIZIL, **Istoria ştiinţelor în România. Cibernetica**, 1981, 229 p., 10,50 lei.
DAN MATEESCU, IOSIF APPELTAUER, EUGEN CUTEANU, **Stabilitatea la compresiune a structurilor din bare de oţel**, 1981, 327 p., 26 lei.
HRISTACHE POPESCU, VETURIA CHIROIU, **Calculul structurilor optimale**, 1981, 239 p. 20,50 lei.
MIHAI TERTIŞCO, PETRE STOICA, **Identificarea şi estimarea parametrilor sistemelor**, 1980, 292 p., 16 lei.
D. D. SANDU, **Probleme moderne de tehnica impulsurilor**, 1980, 29 p., 18 lei.
RADU PRIŞCU şi colab., **Ingineria seismică a marilor baraje**, 1980, 356 p., 34 lei.
SANDA HANGAN, L. CRAINIC, **Concepte şi metode energetice în dinamica construcţiilor**, 1980, 306 p., 27 lei.
ŞTEFAN BĂLAN, VALERIU PETCU, **Calculul structurilor în domeniul plastic. Optimizări**, 1979, 488 p., 36 lei.
GHEORGHE BUZDUGAN, ELENA MIHĂILESCU, MIRCEA RADEŞ, **Măsurarea vibraţiilor**, 1979, 275 p., 21 lei.
MIRCEA RADEŞ, **Metode dinamice pentru identificarea sistemelor mecanice**, 1979, 248 p., 15 lei.
MIRCEA MALIŢA (sub redacţia). **Sisteme în ştiinţele naturii**, 1979, 186 p., 7,50 lei.
GHEORGHE ADRIAN, **Ingineria sistemelor. Modele şi tehnici de calcul**, 1979, 207 p., 20 lei.

REVISTE PUBLICATE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
REVUE ROUMAINE DES SCIENCES TECHNIQUES
– SÉRIE DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE
– SÉRIE D'ÉLECTROTECHNIQUE ET D'ÉNERGÉTIQUE

RM ISSN 0039–4017

ST. CERC. MEC. APL., TOM 43, NR. 1, 1984, P. 1–100

c. 1892 I. P. „Informaţia"

Lei 55.

$ 62 pour un bonnement annuel

R
F2557

2
TOMUL 43
martie—aprilie
1984

STUDII ŞI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

Consiliul de conducere

Acad. I. ANTON, *redactor şef*

Membri:

Acad. ŞT. BĂLAN,
Acad. D. DUMITRESCU,
Acad. C. IACOB
Acad. D. MATEESCU
Acad. R. VOINEA,
Prof. C. AVRAM, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România
Prof. GH. BUZDUGAN, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România.
Dr. inf. N. PATRAULEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. R. C. BOGDAN,
Prof. R. PRIŞCU,
Dr. ing. C. TEODORESCU
Dr. ing. V. VISARION,
Dr. ing. D. PANTAZOPOL,
Dr. ing. I. CRIŞAN,
Prof. GR. PELECUDI,
Prof. TR. DEMIAN,
Prof. T. OROVEANU, *secretar de redacţie,*

Colegiul de redacţie

Acad. I. ANTON, *redactor şef*

Membri:
Acad. D. MATEESCU,
Dr. ing. C. TEODORESCU
Dr. ing. I. CRIŞAN,
Dr. ing. D. PANTAZOPOL,
Prof. TR. DEMIAN,
Prof. T. OROVEANU, *secretar de redacţie,*

Toate comenzile externe pentru lucrările apărute în Editura Academiei R. S. România se vor adresa: ILEXIM. Departamentul export-import carte, Departamentul export-import presă (pentru reviste), 70517, str. 13 Decembrie nr. 3, P.O. Box 136–137, telex 11226, Bucureşti, România. În ţară abonamentele se primesc la oficiile poştale, agenţiile poştale, factorii poştali difuzorii de presă din întreprinderi şi instituţii.

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice corespondenţă se trimit pe adresa Comitetului de redacţie al revistei, 70701, str. Const. Mille nr. 15

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
79717, Calea Victoriei nr. 125, sectorul 1, Bucureşti

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 43, nr. 2 **martie—aprilie 1984**

SUMAR

IN MEMORIAM 103

STUDII

E. CARAFOLI, ŞT. STAICU, Aripa dreptunghiulară cu discuri laterale delta în regim supersonic 106

V. N. CONSTANTINESCU, S. DĂNĂILĂ, A. SÂRBU, Simularea aproximativă a mişcării supersonice în jurul unui avion 117

MIRCEA CÂRDU, Cu privire la influenţa absorbţiei prin perete asupra stratului limită la curgerea turbulentă cu cvasidesprindere 129

ŞTEFAN GYÉRESI, Cilindrul elastic în cîmp gravitaţional. I. Formularea problemei la limită 141

GABRIELA NEAGU, F. POTERAŞU, D. VIERU, Sinteza optimală a unor mecanisme plane utilizate pentru transmiterea mişcării la sitele oscilante ale maşinilor de sortat seminţe 147

FLORIN IONESCU, Modelarea matematică şi simularea numerică structurată a supapelor de limitare a presiunii 167

PETRE GLADCOV, Determinarea comparativă a capacităţii de aşchiere a sculelor, prin calcul numeric 189

RECENZII 197

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 43, nr. 2 martie—aprilie 1984

SUMAR

IN MEMORIAM 103

STUDII

E. CARAFOLI, ST. STAICU, Aripa dreptunghiulară cu discuri laterale delta în regim supersonic 106

V. N. CONSTANTINESCU, S. DĂNĂILĂ, A. SÂRBU, Simularea aproximativă a mișcării supersonice în jurul unui avion 117

MIRCEA CÂRDU, Cu privire la influența absorbției prin perete asupra stratului limită la curgerea turbulentă cu cvasidesprindere 129

STEFAN GYÉRESI, Cilindrul elastic în cîmp gravitațional. I. Formularea problemei la limită 141

GABRIELA NEAGU, F. POTERASU, D. VIERU, Sinteza optimală a unor mecanisme plane utilizate pentru transmiterea mișcării la sitele oscilante ale mașinilor de sortat semințe 147

FLORIN IONESCU, Modelarea matematică și simularea numerică structurată a supapelor de limitare a presiunii 167

PETRE GLADCOV, Determinarea comparativă a capacității de așchiere a sculelor, prin calcul numeric 189

RECENZII 197

ELIE CARAFOLI

ELIE CARAFOLI

Profesorul Elie Carafoli, membru titular și președinte, timp de peste douăzeci de ani, al Secției de științe tehnice a Academiei Republicii Socialiste România, redactor șef al revistei noastre, a încetat din viață la 24 octombrie 1983.

Născut la 15 septembrie 1901 la Veria, în apropiere de Salonic, într-o familie care a contribuit prin mai mulți membri la dezvoltarea vieții culturale a comunității lor, Elie Carafoli a sosit la București la începutul anului 1916. După ce și-a terminat studiile secundare într-unul dintre cele mai bune licee din țară, a obținut în anul 1923 diploma de inginer la Școala politehnică din București. Pentru a-și pune în valoare strălucitele sale calități, și-a continuat educația științifică la Paris, unde a obținut mai întîi licența în științele fizico-matematice. Și-a pregătit apoi teza de doctorat, pe care a susținut-o cu succes în anul 1928, devenind astfel doctor în științele fizice.

În timpul șederii sale la Paris, Elie Carafoli și-a început activitatea științifică, fiind atașat, în calitate de asistent, la Catedra de mecanica fluidelor de la Sorbona. A lucrat de asemenea la Institutul aerotehnic de la Saint-Cyr unde a executat, singur sau în colaborare cu profesorul Albert Toussaint, numeroase lucrări științifice, teoretice sau experimentale.

Întors în țară la vîrsta de 27 ani, Elie Carafoli avea o reputație științifică formată și era în același timp unul dintre primii specialiști români în domeniul aerodinamicii.

În octombrie 1928 a inaugurat la Școala Politehnică din București, pentru prima dată în România, cursul de aerodinamică și mecanica avionului. Timp de 43 ani a avut, ca profesor, o activitate didactică prestigioasă, fără îndoială una dintre cele mai prodigioase pe care le-a cunoscut învățămîntul tehnic superior în România. Crearea și dezvoltarea secției de aviație, în prezent facultate la Institutul Politehnic din București, vor rămîne legate pentru totdeauna de numele său. Elie Carafoli a format numeroase generații de ingineri și printre foștii săi elevi se numără profesori universitari, cercetători și ingineri de mare valoare care au contribuit cu toții la dezvoltarea științei și a tehnicii în România, continuînd astfel opera profesorului lor.

Primul laborator de aerodinamică din țara noastră a fost întemeiat sub conducerea sa și sufleria acestuia, primă instalație de acest fel din sud-estul Europei, a servit la o activitate intensă de cercetări experimentale.

Elie Carafoli, inginer de mare valoare, a avut și o activitate tehnică în domeniul construcției de avioane. Sub conducerea sa și cu colaborarea unui grup de ingineri de înaltă calificare, au fost concepute și realizate, cu

St. cerc. mec. apl., tom 43, nr. 2, 1984, p. 103—105

începere din 1928, mai multe avioane cu performanțe remarcabile pe plan mondial.

După alegerea sa în 1948 ca membru titular al Academiei Republicii Socialiste România, profesorului Elie Carafoli i s-a încredințat înalta misiune de a organiza cercetarea științifică în domeniul mecanicii aplicate. Timp de peste două decenii, a desfășurat o activitate prodigioasă, grupînd în jurul său colaboratori tineri, dintre care mulți foști elevi ai săi, reușind să le transmită entuziasmul pentru cercetarea științifică. Elie Carafoli a format personal numeroși cercetători și a creat astfel o școală românească de aerodinamică, recunoscută și în străinătate. De asemenea, a știut să trezească interesul unor colaboratori ai săi pentru alte domenii ale mecanicii fluidelor, rezultatele obținute de aceștia reprezentînd contribuții de valoare la scară internațională.

Difuzarea acestor rezultate a fost asigurată prin periodicele „Studii și cercetări de mecanică aplicată" și „Revue Roumaine des Sciences Techniques, Série de Mécanique Appliquée" al căror redactor șef a fost de la întemeierea lor, în 1950, respectiv în 1956. Prin ținuta lor științifică, aceste periodice, care reprezintă o realizare foarte importantă, au atras numeroși colaboratori dintre specialiștii din întreaga lume.

În peste cincizeci de ani de activitate științifică, profesorul Elie Carafoli a elaborat un mare număr de lucrări în domeniul aerodinamicii și mecanicii fluidelor, aducînd astfel o contribuție importantă la progresul acestor discipline științifice. Tratatele și monografiile, în număr de 12, au fost publicate în limba română, în franceză sau în engleză și mai multe dintre ele au fost traduse în limba rusă, germană și chineză. Peste 140 studii, articole sau note, publicate în România sau în străinătate, conțin rezultatele originale obținute de Elie Carafoli în lunga și strălucita sa carieră științifică.

Nu putem decît să amintim cîteva dintre rezultatele sale mai importante referitoare la teoria profilelor aerodinamice și în particular la aceea a profilelor cu vîrf rotunjit, cunoscute astăzi sub numele de „profile Carafoli". Citățm de asemenea lucrările teoretice și experimentale referitoare la aripile de anvergură finită, elaborarea unei teorii a suprafețelor portante permeabile și studiile sale teoretice și experimentale asupra efectului jeturilor fluide plane laterale asupra caracteristicilor aripilor de alungire mică.

În aerodinamica vitezelor mari, Elie Carafoli a obținut rezultate remarcabile stabilind o metodă unitară bazată pe mișcările conice de ordin superior. În afară de soluțiile referitoare la aripile dreptunghiulare, trapezoidale și triunghiulare (delta), această metodă este utilizabilă și la studiul unor probleme mai complicate.

Împreună cu colaboratorii săi, a studiat și mișcarea supersonică în jurul unei aripi prevăzute cu fuzelaj conic, separația la bordurile de atac subsonic ale aripilor delta și undele de combustie în mișcare supersonică. În sfîrșit, a dat o formulă unitară a coeficientului de presiune pentru mișcările supersonice și hipersonice.

Opera științifică bogată și variată a profesorului Elie Carafoli reflectă preocuparea sa constantă de a orienta știința pură spre aplicațiile practice.

Prin opera sa științifică ca și prin participarea sa la numeroase manifestări științifice internaționale, a contribuit în mod strălucit la cooperarea științifică internațională și la creșterea prestigiului științei românești.

Prin ansamblul activității sale, științifică, tehnică și didactică, academicianul Elie Carafoli ocupă un loc important printre aceia care au contribuit la dezvoltarea științelor aeronautice în lume.

Numeroasele distincții române și străine care i-au fost atribuite, ca și alegerea sa în comitetele de conducere ale mai multor societăți științifice internaționale de mare prestigiu, au constituit tot atîtea recunoașteri ale meritelor sale.

Printr-o putere de muncă excepțională și prin remarcabilele sale realizări, profesorul și savantul Elie Carafoli a reprezentat și va reprezenta totdeauna un viu exemplu de înalt patriotism, de abnegație și de devotament, puse fără rezerve în slujba patriei și a poporului român.

Dispariția academicianului Elie Carafoli constituie o mare pierdere pentru știință, pentru colaboratorii și foștii săi elevi care au învățat atît de mult nu numai de la profesorul ci și de la omul de înaltă valoare morală care a fost.

Demn fiu al poporului său, pe care l-a iubit atît de mult, Elie Carafoli lasă, părăsindu-ne pentru totdeauna, o amintire neașteasră.

TEODOR OROVEANU

ARIPA DREPTUNGHIULARĂ CU DISCURI LATERALE DELTA ÎN REGIM SUPERSONIC

E. CARAFOLI și ȘT. STAICU

Institutul politehnic București

Lucrarea studiază curgerea supersonică în jurul aripii dreptunghiulare prevăzută cu discuri laterale delta, în ipoteza vitezelor finite la bordurile subsonice ale discurilor. Astfel, deformînd bordurile de atac ale celor două plăci prin voleți plani sau curbați, se evită separația curentului la borduri. În continuare, se determină distribuțiile de presiuni pe aripă și pe discurile laterale.

1. NOTAȚII

U_∞ reprezintă viteza curentului supersonic,

M_∞ — numărul Mach ,

$Ax_1x_2x_3$ — sistem triortogonal, avînd axa Ax_1 paralelă cu viteza curentului neperturbat U_∞, și Ax_3 situată în planul plăcii,

α — incidența aripii dreptunghiulare,

β — incidența discului superior,

$2l$ — anvergura aripii dreptunghiulare,

u, v, w — vitezele de perturbație după axele de referință,

C_p — coeficient de presiune,

$y(x_1,x_3)$ — ordonata suprafeței discului față de planul Ax_1x_3.

2. INTRODUCERE

În această lucrare se studiază curgerea supersonică în jurul unei aripi dreptunghiulare prevăzută cu discuri marginale delta, urmărind realizarea unor viteze finite la bordurile de atac subsonice ale discurilor (fig. 1). Problema propusă urmărește aceeași linie stabilită în lucrările anterioare [1], [2] și [3] care tratează subiecte similare.

Vom considera ansamblul raportat la un sistem de axe trirectangulare $Ax_1x_2x_3$ (fig. 2) cu originea în vîrful său și avînd axa Ax_1 orientată după direcția curentului neperturbat U_∞. Vom nota cu α incidența aripii, cu $+\beta$ incidența pentru partea superioară a plăcii și cu $-\beta$ incidența părții inferioare a aceleiași plăci. În mod convențional vom considera că unghiurile α și β sînt pozitive atunci cînd aripa și placa laterală ar provoca fiecare o depresiune în primul cadran al triedrului $Ax_1x_2x_3$.

St. cerc. mec. apl., tom. 43, nr. 2, 1984, p. 106—116

În secțiunea dată de planul $x_1 = 1$, placa laterală are semianvergura

$$h = \operatorname{tg}\gamma, \tag{1}$$

unde γ este semiunghiul la vîrf.

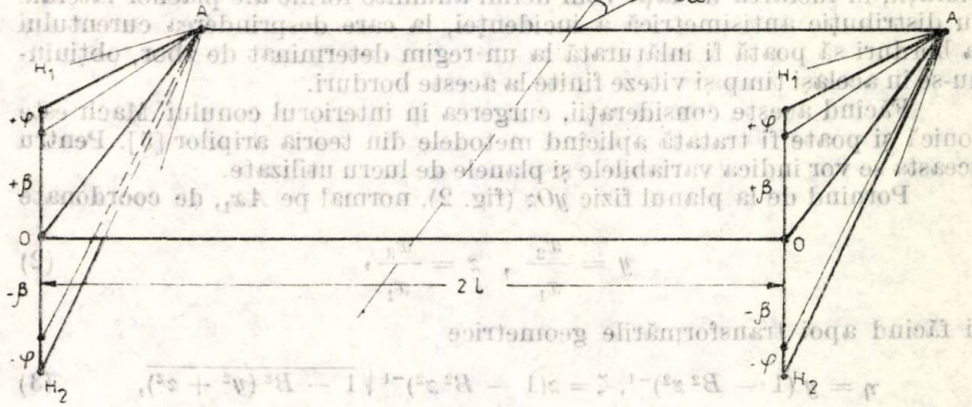


Fig. 1

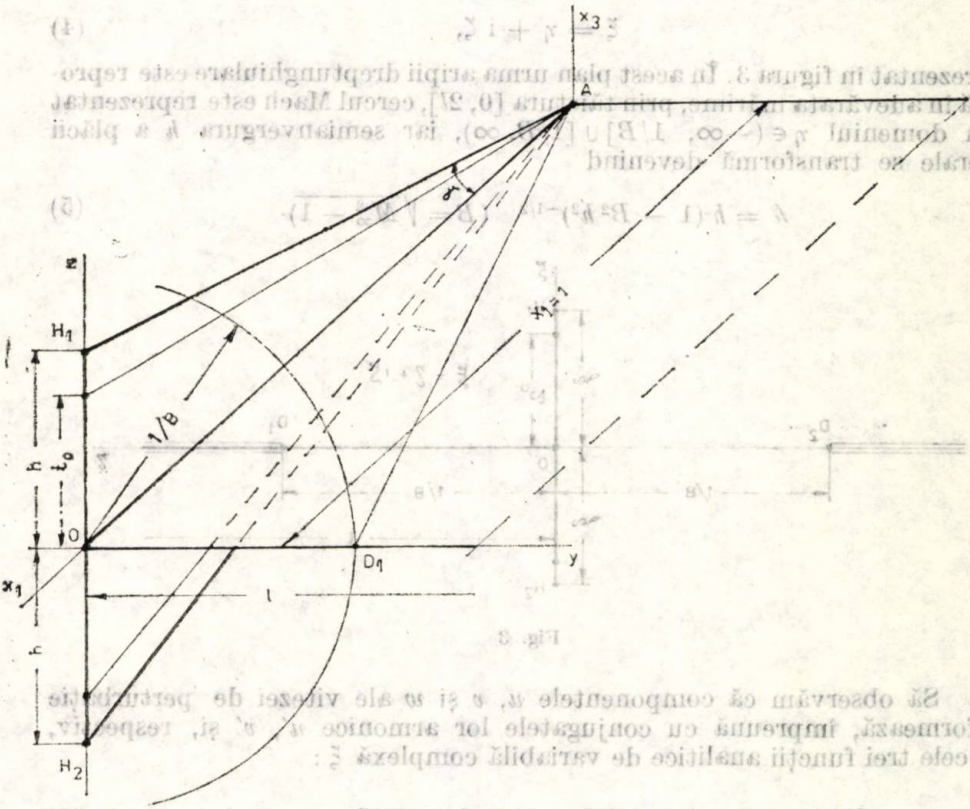


Fig. 2

Ca şi în cazul aripii delta simple [6], curentul se separă la bordurile de atac subsonice ale plăcii, dînd naştere unor cornete de vîrtejuri producînd o mişcare antisimetrică.

Deoarece separaţia curentului creează mari inconveniente pentru zborul supersonic, ca creşterea rezistenţei la înaintare sau fenomene de vibraţii, în lucrarea de faţă vom defini anumite forme ale plăcilor laterale cu distribuţie antisimetrică a incidenţei, la care desprinderea curentului la borduri să poată fi înlăturată la un regim determinat de zbor, obţinîndu-se în acelaşi timp şi viteze finite la aceste borduri.

Făcînd aceste consideraţii, curgerea în interiorul conului Mach este conică şi poate fi tratată aplicînd metodele din teoria aripilor [5]. Pentru aceasta se vor indica variabilele şi planele de lucru utilizate.

Pornind de la planul fizic yOz (fig. 2), normal pe Ax_1, de coordonate

$$y = \frac{x_2}{x_1}, \quad z = \frac{x_3}{x_1}, \tag{2}$$

şi făcînd apoi transformările geometrice

$$\eta = y\,(1 - B^2 z^2)^{-1},\ \zeta = z(1 - B^2 z^2)^{-1}\sqrt{1 - B^2 (y^2 + z^2)}, \tag{3}$$

se obţine planul complex

$$\xi = \eta + \mathrm{i}\,\zeta, \tag{4}$$

reprezentat în figura 3. În acest plan urma aripii dreptunghiulare este reprodusă în adevărata mărime, prin tăietura $[0, 2l]$, cercul Mach este reprezentat prin domeniul $\eta \in (-\infty,\ 1/B] \cup [1/B, \infty)$, iar semianvergura h a plăcii laterale se transformă devenind

$$\hbar = h\,(1 - B^2 h^2)^{-1/2} \quad (B = \sqrt{M_\infty^2 - 1}). \tag{5}$$

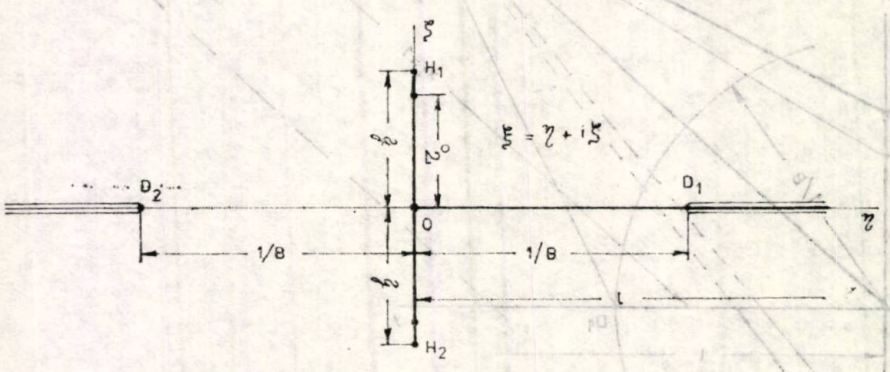


Fig. 3

Să observăm că componentele u, v şi w ale vitezei de perturbaţie $\mathbf{V}$ formează, împreună cu conjugatele lor armonice u', v' şi, respectiv, w', cele trei funcţii analitice de variabilă complexă ξ:

$$\mathcal{U}(\xi) = u + \mathrm{i}u',\ \mathcal{V}(\xi) = v + \mathrm{i}v',\ \mathcal{W}(\xi) = w + \mathrm{i}w', \tag{6}$$

numite funcții de viteză. Acestea din urmă sînt legate prin relațiile de compatibilitate,

$$\mathrm{d}\mathcal{U} = -\xi \mathrm{d}\mathcal{V} = \mathrm{i}\xi(1 - B^2\xi^2)^{-1/2}\mathrm{d}\mathcal{W}, \tag{7}$$

care provin din relația de irotaționalitate a vectorului **V** :

$$\nabla \wedge \mathbf{V} = \mathbf{0}. \tag{8}$$

Mai departe, vom trece din planul auxiliar în planul complex (fig. 4)

$$X = Y + \mathrm{i}Z \tag{9}$$

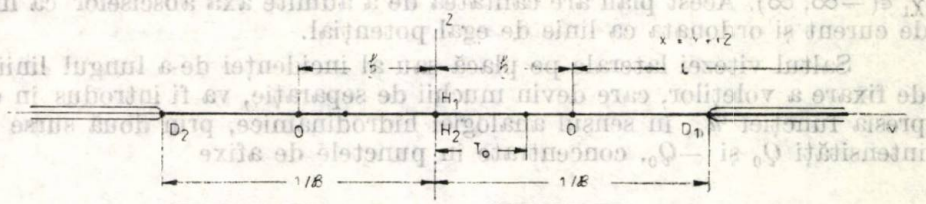


Fig. 4

prin intermediul transformării conforme

$$X^2 = h^2 + \xi^2, \tag{10}$$

care situează urma sistemului aripă-placă pe axa absciselor în domeniul $Y \in [-h, L]$, unde

$$L = \sqrt{h^2 + l^2}. \tag{11}$$

3. REALIZAREA VITEZELOR FINITE LA BORDURILE PLĂCILOR LATERALE

Pentru a evita apariția vîrtejurilor, vom deforma plăcile în regiunea bordurilor de atac, astfel încît vitezele curentului să fie finite pe linia acestor borduri.

a) *Deformarea bordurilor de atac ale plăcilor prin voleți plani antisimetrici.* Să considerăm că una din cele două plăci laterale capătă incidența $+\beta$ în partea de sus a aripii și $-\beta$ în partea opusă, după convenția stabilită mai înainte. Vom observa că presiunile pe placă, în apropierea bordurilor de atac, pot deveni finite, dacă se modifică placa prin introducerea în punctele $z = \pm t_0$ a doi voleți de bord bracați antisimetric sub incidențele $+\varphi$ și, respectiv, $-\varphi$.

Pentru determinarea distribuției de presiuni pe suprafața sistemului creat se urmărește mai întîi determinarea funcției analitice $\mathcal{U}_a$, utilizînd metoda analogiei hidrodinamice expusă detaliat în lucrarea [4]. Această metodă realizează o analogie hidrodinamică între funcția vitezei axiale

$\mathcal{U}_a$ şi potenţialul unei mişcări fictive din regimul incompresibil care satisface aceleaşi condiţii la limită.

Vom aplica acest model teoretic în planul complex

$$\chi = \chi_1 + i\,\chi_2\,, \tag{12}$$

dat de transformarea conformă

$$\chi^2 = \frac{\mathcal{B}\,(h + X)}{1 - \mathcal{B}X} \quad (\mathcal{B} = B\sqrt{1 - B^2h^2})\,, \tag{13}$$

care situează urma sistemului cruciform pe axa absciselor în domeniul $\chi_1 \in (-\infty, \infty)$. Acest plan are calitatea de a admite axa absciselor ca linie de curent şi ordonata ca linie de egal potenţial.

Saltul vitezei laterale pe placă sau al incidenţei de-a lungul liniilor de fixare a voleţilor, care devin muchii de separaţie, va fi introdus în expresia funcţiei $\mathcal{U}_a$, în sensul analogiei hidrodinamice, prin două surse de intensităţi Q_0 şi $-Q_0$, concentrate în punctele de afixe

$$\chi_0' = \pm\sqrt{\frac{\mathcal{B}\,(h + T_0)}{1 - \mathcal{B}\,T_0}}\,,\quad \chi_0'' = \pm\sqrt{\frac{\mathcal{B}\,(h - T_0)}{1 + \mathcal{B}\,T_0}}\,,$$

$$\left(T_0 = \sqrt{h^2 - \tau_0^2}\,,\quad \tau_0 = \frac{t_0}{\sqrt{1 - B^2 t_0^2}}\right) \tag{14}$$

din planul complex χ.

Însumînd contribuţiile celor două muchii situate simetric (corespunzător celor doi voleţi de bord de atac, bracaţi antisimetric) cu contribuţia bordului supersonic al planului orizontal, funcţia de viteză axială de perturbaţie are următoarea expresie

$$\mathcal{U}_a = \frac{2\alpha\,U_\infty}{\pi B}\cos^{-1}\sqrt{\frac{1 - \mathcal{B}X}{1 + \mathcal{B}h}} + \tag{15}$$

$$+\frac{2}{\pi}\,Q_0\left[\cosh^{-1}\sqrt{\frac{(X + h)\,(1 - \mathcal{B}\,T_0)}{(X - T_0)\,(1 + \mathcal{B}\,h)}} - \cosh^{-1}\sqrt{\frac{(X + h)\,(1 + \mathcal{B}\,T_0)}{(X + T_0)\,(1 + \mathcal{B}\,h)}}\right],$$

care este finită pe linia bordurilor de atac ale plăcii.

Constanta Q_0 se determină utilizînd condiţiile la limită pentru vitezele de perturbaţie pe suprafaţa plăcii. Astfel, pornind de la relaţiile de compatibilitate (7), rezultă

$$\mathrm{Re}\int_{\text{placă}}^{\text{cercul Mach}} (X^2 - h^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}\,\mathcal{U}_a = \beta U_\infty. \tag{16}$$

Efectuînd integrala între limitele $(h, 1/\mathscr{B})$, se obține

$$\frac{Q_0}{U_\infty} = C_1(\beta + C_0\alpha), \tag{17}$$

unde s-a notat

$$C_0 = \sqrt{\frac{1 - \mathscr{B}h}{2\,\mathscr{B}h}}, \tag{18 a}$$

$$C_1 = \sqrt{2h(1 + \mathscr{B}h)}\left(\sqrt{\frac{1 + \mathscr{B}T_0}{h - T_0}} - \sqrt{\frac{1 - \mathscr{B}T_0}{h + T_0}}\right)^{-1}. \tag{18 b}$$

Saltul de incidență pe placă, în vecinătatea muchiei, este legat de intensitatea sursei prin relația

$$\beta - \varphi = -\frac{Q_0}{\tau_0 U_\infty}, \tag{19}$$

care dă tocmai incidența voletului de bord de atac.

b) *Deformarea bordurilor de atac ale plăcii prin voleți curbați.* Pentru a elimina vîrfurile de presiune și de viteze care apar de-a lungul șarnierei voleților (fig. 5), se vor curba acești voleți respectînd condițiile de continuitate pe suprafața plăcii laterale.

Astfel, vom construi o placă la care incidența să fie variabilă pe o anumită porțiune în vecinătatea bordurilor de atac, la un regim de zbor considerat la care se urmărește evitarea desprinderii curentului la borduri.

Fie $\pm\,\beta$ incidența părții mediane a plăcii și $\pm\,\psi$ incidența bordului de atac. Variația incidenței între cele două valori poate fi realizată, în sensul analogiei hidrodinamice [4], cu ajutorul unei distribuții de surse q, repartizate pe urma plăcii din planul complex χ dat de transformarea conformă (13). Pentru a obține rezultate cît mai simple vom adopta o distribuție uniformă a surselor în planul de lucru X:

$$q(T) = q_0 = \text{const.}, \quad T \in (-T_0, T_0). \tag{20}$$

Pornind de aici și aplicînd formulele stabilite de teoria mișcărilor conice în regim supersonic [5], vom deduce funcția de viteză axială de perturbație:

$$\mathscr{U}_b = \frac{2\alpha\, U_\infty}{\pi B}\cos^{-1}\sqrt{\frac{1 - \mathscr{B}X}{1 + \mathscr{B}h}} + \tag{21}$$

$$+\frac{2}{\pi}\,q_0\int_0^{T_0}\left[\cosh^{-1}\sqrt{\frac{(X+h)(1-\mathscr{B}T)}{(X-T)(1+\mathscr{B}h)}} - \cosh^{-1}\sqrt{\frac{(X+h)(1+\mathscr{B}T)}{(X+T)(1+\mathscr{B}h)}}\right]\mathrm{d}T,$$

care, în urma efectuării calculelor, devine

$$\mathcal{U}_b = \frac{2\alpha U_\infty}{\pi B}\cos^{-1}\sqrt{\frac{1-\mathcal{B}X}{1+\mathcal{B}h}} +$$

$$+\frac{2}{\pi}q_0\left[(T_0-X)\cosh^{-1}\sqrt{\frac{(X+h)(1-\mathcal{B}T_0)}{(X-T_0)(1+\mathcal{B}h)}}-\right. \tag{22}$$

$$-(T_0+X)\cosh^{-1}\sqrt{\frac{(X+h)(1+\mathcal{B}T_0)}{(X+T_0)(1+\mathcal{B}h)}}+2X\cosh^{-1}\sqrt{\frac{X+h}{X(1+\mathcal{B}h)}}+$$

$$+\frac{\sqrt{(X+h)(1-\mathcal{B}X)}}{\sqrt{\mathcal{B}}}\left(\cos^{-1}\sqrt{\frac{1-\mathcal{B}T_0}{1+\mathcal{B}h}}+\cos^{-1}\sqrt{\frac{1+\mathcal{B}T_0}{1+\mathcal{B}h}}-\right.$$

$$\left.\left.-\cos^{-1}\frac{1-\mathcal{B}h}{1+\mathcal{B}h}\right)\right].$$

Constanta q_0 care apare în expresia (22) se calculează utilizînd relaţia (16) în care funcţia analitică $\mathcal{U}_a$ este determinată în ipoteza înlocuirii surselor distribuite prin două surse concentrate, de intensitate Q_0', situate în punctele de abscise $Y = \pm T_0'$:

$$Q_0' = q_0 T_0,\quad T_0' = \frac{1}{2}T_0\,; \tag{23}$$

rezultă

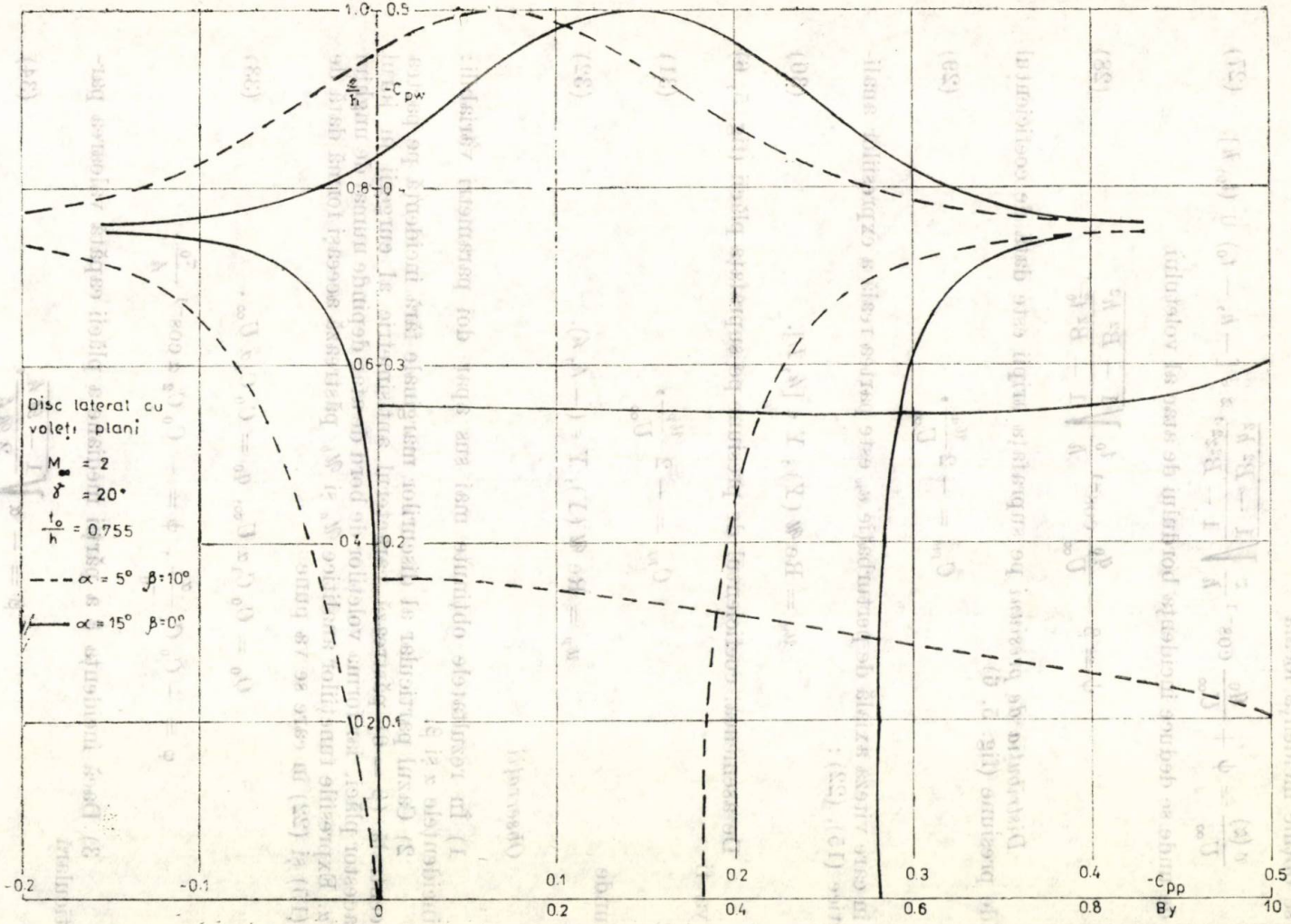
$$\frac{q_0}{U_\infty} = C_2(\beta + C_0\alpha), \tag{24}$$

unde s-a notat

$$C_2 = \frac{\sqrt{2h(1+\mathcal{B}h)}}{T_0}\left(\sqrt{\frac{2+\mathcal{B}T_0}{2h-T_0}}-\sqrt{\frac{2-\mathcal{B}T_0}{2h+T_0}}\right)^{-1}. \tag{25}$$

Pornind de la relaţia între intensitatea sursei distribuite şi viteza laterală v, adică

$$q(t) = \frac{t}{\sqrt{1-B^2t^2}}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, \tag{26}$$



Disc lateral cu voleți plani
$M_\infty = 2$
$\gamma = 20°$
$\frac{t_0}{h} = 0.755$
$\alpha = 5°$ $\beta = 10°$
$\alpha = 15°$ $\beta = 0°$
$\frac{e}{h}$
$-C_{pw}$
$-C_{pp}$
By

Fig. 5

se obține incidența locală

$$\frac{v(z)}{U_\infty} = \psi + \frac{q_0}{U_\infty} \cos^{-1} \frac{z}{h} \sqrt{\frac{1 - B^2 h^2}{1 - B^2 z^2}}, \; z \in [-h, -t_0) \cup (t_0, h], \tag{27}$$

de unde se deduce incidența bordului de atac al voletului

$$\psi = \beta - \frac{q_0}{U_\infty} \cos^{-1} \frac{t_0}{h} \sqrt{\frac{1 - B^2 h^2}{1 - B^2 t_0^2}}. \tag{28}$$

Distribuția de presiuni pe suprafața aripii este dată de coeficientul de presiune (fig. 5, 6)

$$C_{pw} = -2 \frac{u_w}{U_\infty}, \tag{29}$$

în care viteza axială de perturbație u_w este partea reală a expresiilor analitice (15), (22):

$$u_w = \operatorname{Re} \mathcal{U}(Y), \; Y \in [h, L]. \tag{30}$$

De asemenea, coeficientul de presiune pe suprafața plăcii (fig. 5, 6) va fi

$$C_{pp} = -2 \frac{u_p}{U_\infty}, \tag{31}$$

unde

$$u_p = \operatorname{Re} \mathcal{U}(Y), \; Y \in (-h, h). \tag{32}$$

Observații

1) În rezultatele obținute mai sus apar doi parametri variabili: incidențele α și β.

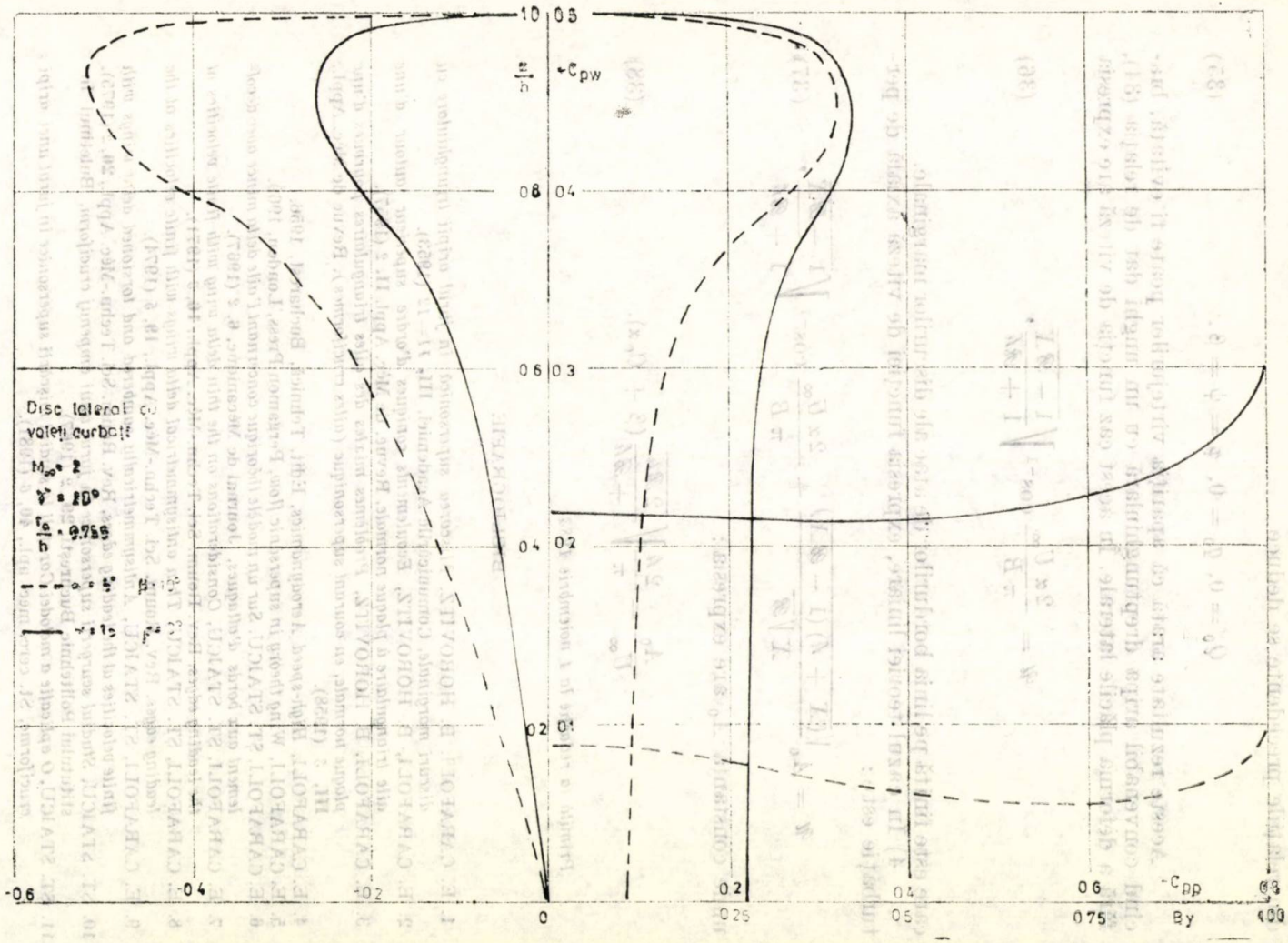
2) Cazul particular al discurilor marginale fără incidență pe partea centrală ($\beta = 0$) păstrează caracterul antisimetric al curgerii în jurul acestor plăci, iar forma voleților de bord de atac depinde numai de unghiul α. Expresiile funcțiilor analitice $\mathcal{U}_a$ și $\mathcal{U}_b$ păstrează aceeași formă dată de (15) și (22) în care se va pune

$$Q_0 = C_0 C_1 \alpha U_\infty, \; q_0 = C_0 C_2 \alpha U_\infty, \tag{33}$$

$$\varphi = -C_0 C_1 \frac{\alpha}{\tau_0}, \; \Phi = -C_0 C_2 \alpha \cos^{-1} \frac{\tau_0}{h}.$$

3) Dacă incidența β a părții mediane a plăcii capătă valoarea particulară

$$\beta = -\alpha \sqrt{\frac{1 - \mathcal{B} h}{2 \mathcal{B} h}}, \tag{34}$$



Disc lateral cu voleți curbați
$M_\infty = 2$
$\gamma = 20°$
$\frac{r_0}{h} = 0.755$
$\frac{z}{h}$
$-C_{pw}$
$-C_{pp}$
By

Fig. 6

din relațiile precedente se deduce

$$Q_0 = 0,\ q_0 = 0,\ \varphi = \psi = \beta. \tag{35}$$

Aceste rezultate arată că apariția vîrtejurilor poate fi evitată, bracînd convenabil aripa dreptunghiulară cu un unghi dat de relația (34), fără a deforma plăcile laterale. În acest caz funcția de viteză are expresia

$$\mathcal{U} = \frac{2\alpha U_\infty}{\pi B} \cos^{-1} \sqrt{\frac{1 - \mathcal{B}X}{1 + \mathcal{R}h}}, \tag{36}$$

care este finită pe linia bordurilor de atac ale discurilor marginale.

4) În cazul teoriei liniare, expresia funcției de viteză axială de perturbație este:

$$\mathcal{U} = A_0 \frac{\sqrt{(X + h)(1 - \mathcal{B}X)}}{X\sqrt{\mathcal{B}}} + \frac{2\alpha U_\infty}{\pi B} \cos^{-1} \sqrt{\frac{1 - \mathcal{B}X}{1 + \mathcal{B}h}}, \tag{37}$$

unde constanta A_0 are expresia:

$$\frac{A_0}{U_\infty} = \frac{2h}{\pi} \sqrt{\frac{2\mathcal{B}h}{1 + \mathcal{B}h}} (\beta + C_0 \alpha). \tag{38}$$

Primită la redacție la 4 noiembrie 1983

BIBLIOGRAFIE

1. E. CARAFOLI, B. HOROVITZ, *Mișcarea supersonică în jurul aripii triunghiulare cu discuri marginale*, Comunicările Academiei, **III**, *11–12* (1953).
2. E. CARAFOLI, B. HOROVITZ, *Ecoulements coniques d'ordre superieur autour d'une aile triangulaire à plaque normale*, Revue. de Méc. Appl. **II**, *2* (1957).
3. E. CARAFOLI, B. HOROVITZ, *Problèmes mixtes des ailes triangulaires pourvues d'une plaque normale, en courant supersonique (ailes cruciformes)*, Revue de Méc. Appl., **III**, *3* (1958).
4. E. CARAFOLI, *High-speed Aerodynamics*, Edit. Tehnică, Bucharest, 1956.
5. E. CARAFOLI, *Wing theory in supersonic flow*, Pergamon Press, London, 1969.
6. E. CARAFOLI, ȘT. STAICU, *Sur un modèle théorique concernant l'aile delta mince avec décollement aux bords d'attaques*, Journal de Mécanique, **6**, *2* (1967).
7. E. CARAFOLI, ȘT. STAICU, *Considerations on the thin delta wing with finite velocities at the leading edges*, Rev. Roum. Sci. Techn.-Méc. Appl., **16**, *3* (1971).
8. E. CARAFOLI, ȘT. STAICU, *Thin antisymmetrical delta wings with finite velocities at the leading edges*, Rev. Roum. Sci. Techn.-Méc. Appl., **19**, *5* (1974).
9. E. CARAFOLI, ȘT. STAICU, *Antisymmetrically cambered and torsioned delta wings with finite velocities at the leading edges*, Rev. Roum. Sci. Techn.-Méc. Appl., **20**, *2* (1975).
10. ȘT. STAICU, *Studiul scurgerii supersonice în jurul unui ampenaj cruciform*, Buletinul Institutului Politehnic București, **29**, *2* (1967).
11. ȘT. STAICU, *O aplicație a metodei Carafoli la studiul mișcării supersonice în jurul unei aripi cruciforme*, St. cerc. mec. apl., **40**, *6* (1981).

SIMULAREA APROXIMATIVĂ A MIȘCĂRII SUPERSONICE ÎN JURUL UNUI AVION

de V. N. CONSTANTINESCU, S. DĂNĂILĂ, A. SÂRBU
Institutul Politehnic, București

Se prezintă o metodă de calcul a unei configurații aripă-fuzelaj-ampenaj în regim supersonic, bazată pe metoda singularităților, adaptată pentru a fi implementată pe calculatoare de capacitate redusă și pentru minicalculatoare cu posibilități de extindere virtuală a memoriei.
Timpul total de calcul este redus cu circa un ordin de mărime printr-o partiționare multiplă a matricei coeficienților de influență aerodinamici.

După cum este cunoscut există în prezent numeroase coduri sau programe de calcul care permit simularea mișcării supersonice staționare a unui fluid perfect în jurul aripilor sau sistemelor aripă-fuzelaj. Un exemplu în acest sens este programul elaborat de către F. A. Woodward [1]. Asemenea programe au la bază metoda singularităților în ipoteza perturbațiilor mici, impunînd discretizarea suprafeței corpului într-un număr suficient de mare de panouri (adesea denumite „boxe"), pe care se distribuie singularități elementare de tip sursă, dublet, vîrtej etc. Precizia de calcul depinde de numărul de elemente de discretizare, conducînd la necesitatea utilizării unor calculatoare cu capacitate mare de memorie și la un volum de calcule, de asemenea important.

Aceste limitări pot deveni prohibitive într-o serie de situații, ca în cazul cînd configurația geometrică este complexă (număr mare de elemente de discretizare) și mai ales pentru cazul unor studii preliminarii și anteproiecte, cînd este util să se compare mai multe variante de geometrii de ansamblu pentru un avion.

Lucrarea de față caută să vină în întîmpinarea unor asemenea cerințe, urmărind dezvoltarea unei metode și unui program de calcul care să poată fi utilizat pe calculatoare cu capacitate redusă sau medie și care să conducă la un volum de calcule acceptabil. În acest mod un asemenea program ar putea fi rulat chiar pe un minicalculator, de exemplu CORAL 4011 , fabricat în R.S.România.

În acest scop, considerațiile care urmează se vor concentra pe două direcții și anume discretizarea pe un număr cît mai mic de panouri, cu limitarea eventuală la cazul mișcărilor simetrice față de planul median al avionului (pentru reducerea memoriei necesare) și la analizarea atentă a metodei de inversare a matricei necunoscutelor (pentru reducerea timpului de calcul).

1. METODA DE CALCUL

Conform celor arătate, vom considera un avion complet, respectiv o configurație complexă de tipul aripă-fuzelaj-ampenaj orizontal în curent cu incidență dar fără derivă laterală.

Aripa, fuzelajul și ampenajul vor fi împărțite automat în panouri (patrulatere), denumite generic boxe. Numărul de panouri pe fuzelaj

St. cerc. mec. apl., tom. 43, nr. 2, 1984, p. 117–128

poate fi redus, dacă acesta se înlocuiește aproximativ cu o geometrie relativ simplă de tipul con-cilindru-trunchi de con sau cel puțin cu un corp de revoluție echivalent.

Tipurile de singularități utilizate pentru simularea mișcării sînt :

— surse distribuite pe suprafețele portante, pentru simularea efectelor de grosime ale acestora,

— dublete de accelerații (de presiune), echivalentul unor potcoave infinitezimale de vîrtej, distribuite pe suprafețele portante (ca și pe fuzelaj în dreptul lor) pentru simularea efectelor de curbură a scheletului, de incidență și de interferență.

— surse și dublete distribuite pe axa fuzelajului pentru simularea mișcării în jurul acestuia (echivalent conform celor arătate cu un corp de revoluție).

Evaluarea analitică a diferitelor tipuri de singularități menționate se poate face folosind observațiile și rezultatele cunoscute [2] cu privire la soluțiile de tip Volterra pentru ecuația undelor.

Astfel, fie un sistem cartezian $Oxyz$ orientat astfel încît viteza curentului U_∞ să fie paralelă cu axa Ox. În aceste condiții, ecuația liniarizată a potențialului vitezelor de perturbație φ (raportat la viteza generală a curentului),

$$-B^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=0,\quad B=\sqrt{M_\infty^2-1}, \tag{1}$$

admite o soluție de forma

$$\varphi(x,y,z)=-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\iint_{S'}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}+\frac{\partial\varphi'}{\partial\nu'}\right)\sigma\,\mathrm{d}S+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\iint_{S'}(\varphi-\varphi')\,\mathrm{d}S, \tag{2}$$

unde $\mathrm{d}S$ este un element al suprafeței corpului, iar ν este versorul conormalei la supafața S. În soluția (2) valorile φ, ν fără prim corespund feței pe care se află punctul P, iar cele cu prim, φ', ν', feței opuse.

De asemenea, în soluția (2), σ este o soluție particulară a ecuației (1), avînd proprietățile următoare : (a) limita lui σ pe conul Mach din punctul P spre amonte este nulă ; derivata sa pe direcția vectorului conormal este nulă, pe același con Mach. O astfel de funcție este dată de relația

$$\sigma=\operatorname{argch}\frac{x-x'}{B\sqrt{(y-y')^2+(z-z')^2}}, \tag{3}$$

unde x', y', z' sînt variabilele de integrare. Este de remarcat că σ reprezintă potențialul unitar al unei surse punctiforme în regim supersonic.

Proprietățile menționate pot fi ușor verificate de forma (3) a funcției σ, pe conul Mach cu vîrful în $P(x, y, z)$ de ecuație

$$(x - x')^2 = B^2 (y - y')^2 + B^2 (z - z')^2. \tag{4}$$

Integralele (2) se calculează pe zona din suprafața S care constituie domeniul de dependență S' al punctului P, respectiv regiunea din S interceptată de conul Mach cu vîrful în P, dirijat către amonte.

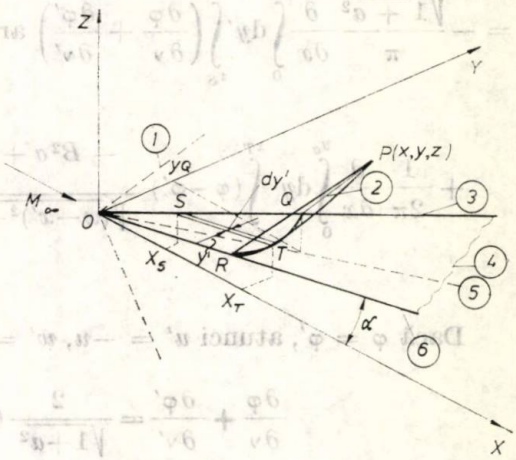


Fig. 1. — Fișie unghiulară plană : *1* — conul Mach cu vîrful în origine ; *2* — conul Mach cu vîrful în $P(x, y, z)$, dirijat către amonte ; *3* — bord de atac în planul $y = mx$; *4* — planul suprafeței unghiulare ($z = ax$) ; *5* — proiecția bordului de atac în planul $z = 0$; *6* — bord lateral în planul $y = 0$.

Să considerăm (fig. 1) un domeniu unghiular situat într-un plan de ecuație $z = ax$ ce trece prin axa Oy. Acest domeniu este mărginit de două borduri : bordul lateral OR, situat pe planul Oxz și celălalt bord, de atac OQ, a cărui proiecție pe planul Oxy este dreapta $y = mx$. În aceste condiții, potențialul φ poate fi exprimat, relativ simplu, analitic.

Astfel, domeniul de dependență pentru punctul P este dat de regiunea ORQ din planul $z = ax$, limitat de bordul lateral, de bordul de atac și de curba QR de ecuație

$$(x - x')^2 = B^2 (y - y')^2 + (z - ax')^2, \tag{5}$$

respectiv intersecția conului (4) cu planul $z = ax$.

Limitele de integrare vor fi deci :

— pe direcția x', între $x_s = y'/m$ și

$$x_T = \frac{x - B^2 az}{1 - B^2 a^2}\left(1 - \frac{\sqrt{(1 - B^2 a^2)\ [x^2 - B^2 (y - y')^2 - B^2 z^2]}}{x - B^2 az}\right), \tag{6}$$

— pe direcţia y' între 0 şi

$$y_Q = \frac{m[x - B^2(my + az)]}{1 - B^2(a^2 + m^2)}\left[1 - \frac{\sqrt{[1 - B^2(a^2 + m^2)][x^2 - B^2(y^2 + z^2)]}}{x - B^2(my + az)}\right]. \tag{7}$$

Ecuaţia (2) devine

$$\varphi(x,y,z) =$$

$$= -\frac{\sqrt{1+a^2}}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{y_Q} dy' \int_{x_S}^{x_T}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} + \frac{\partial\varphi'}{\partial\nu'}\right) \operatorname{argch}\frac{x - x'}{B\sqrt{(y-y')^2+(zax')^2}}\,dx' +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{y_a} dy' \int_{x_S}^{x_T}(\varphi - \varphi')\frac{-B^2a + \dfrac{(x-x')(z-ax')}{(y-y')^2+(z-ax')^2}}{\sqrt{(x-x')^2 - B^2(y-y')^2 - B^2(z-ax')^2}}\,dx'. \tag{8}$$

Dacă $\varphi = \varphi'$, atunci $u' = -u$, $w' = -w$ pe S. Se deduce

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} + \frac{\partial\varphi'}{\partial\nu'} = \frac{2}{\sqrt{1+a^2}}(\bar{w} + B^2 a\,\bar{u}), \tag{9}$$

unde $\bar{u}$, $\bar{w}$, sînt componentele vitezei de perturbaţie pe S, raportate la viteza generală a curentului.

Se obţine astfel expresia potenţialului pentru o distribuţie plană de surse

$$\varphi(x,y,z) = -\frac{\bar{w} + B^2 a\bar{u}}{\pi}\int_0^{y_Q} dy' \int_{x_S}^{x_T}\frac{dx'}{\sqrt{(x-x')^2 - B^2(y-y')^2 - B^2(z-ax')^2}} \tag{10}$$

deoarece $\bar{w} + B^2a\bar{u}$ este acum o constantă.

Pentru determinarea expresiei potenţialului de acceleraţie, u sau $p' = p - p_\infty$, vom înlocui în (1) φ cu u. Considerînd apoi că pe S există un salt de viteză $\Delta u = u - u' =$ const. (corespunzător unei distribuţii uniforme de vîrtejuri, respectiv de dublete de acceleraţie), prima integrală (8) se anulează, obţinînd în final

$$\varphi(x,y,z) = \tag{11}$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\frac{p'}{q_\infty}\int_0^{y_Q} dy' \int_{x_S}^{x_T}\frac{-B^2a + \dfrac{(x-x')(z-ax')}{(y-y')^2+(z-ax')^2}}{\sqrt{(x-x')^2 - B^2(y-y')^2 - B^2(z-ax')^2}},$$

unde $q_\infty = \frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2$, $\Delta u = -\frac{p'}{q_\infty}$.

În sfîrșit, pentru a exprima potențialul datorit unei linii de surse și, respectiv, de dublete, vom considera sistemul de coordonate cilindric x, r, ω

$$x = x'\,;\; y = r\cos\omega\,;\; z = r\sin\omega, \tag{12}$$

în care ecuația (1) se scrie sub forma

$$B^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2}. \tag{13}$$

Vom descompune mișcarea într-una axial simetrică (φ_a) și una transversală (φ_t). Rezultă atunci soluțiile cunoscute :

— O linie de surse pe axa Ox

$$\varphi_a(x, r) = -\int_0^{x-Br} \frac{f(x')\,\mathrm{d}x'}{\sqrt{(x-x')^2 - B^2 r^2}}, \tag{14}$$

unde $f(x')$ este proporțională cu intensitatea distribuției de surse.

— O linie de dublete (cu axa verticală) pe linia Ox

$$\varphi_t(x, r, \omega) = \frac{\sin\omega}{r}\int_0^{x-Br} \frac{m(x')(x-x')\,\mathrm{d}x'}{\sqrt{(x-x')^2 - B^2 r^2}}, \tag{15}$$

unde $m(x')$ este proporțională cu intensitatea distribuției de dublete.

Fie, pentru problema pusă, distribuții constante de surse și dublete

$$f(x') = k_S\,;\; m(x') = k_D, \tag{16}$$

caz în care integralele (14), (15) se pot rezolva fără dificultăți, rezultînd expresii, de asemenea cunoscute.

Este în continuare posibil să se determine componentele vitezelor de perturbație, derivînd expresiile (10), (11), (14), (15). Calculele sînt laborioase, dar pot fi efectuate analitic. Pentru o expunere relativ simplă și unitară vom introduce funcțiile $F_1, F_2, \ldots, F_7$ propuse în [1]. Rezultatele pot fi sintetizate în modul următor :

— Distribuție plană constantă de surse în planul $z = 0$ ($a = 0$) :

$$u_1 = -\frac{\bar{w}}{\pi} m F_2\,;\; v_1 = \frac{\bar{w}}{\pi}(F_2 - F_5)\,;\; w_1 = \frac{\bar{w}}{\pi} F_1. \tag{17}$$

— Distribuţie plană de vîrtejuri, în planul $z = ax$

$$u_3 = -\frac{p'}{4\pi q_\infty} F_1, \tag{18 a}$$

$$v_3 = \frac{p'}{4\pi q_\infty} \frac{1}{a^2 + m^2} \{a\,[1 - B^2\,(a^2 + m^2)]\,F_2 + m\,(F_3 + F_7)\}, \tag{18 b}$$

$$w_3 = \frac{p'}{4\pi q_\infty} \frac{1}{a^2 + m^2} \{[1 - B^2\,(a^2 + m^2)]\,F_2 - F_5 + F_4\}. \tag{18 c}$$

— Distribuţie constantă de surse pe axa Ox

$$u_a = -k_s \operatorname{argch} \frac{x}{Br}\,;\; v_{ra} = \frac{k_s}{r}\sqrt{x^2 - B^2 r^2}\,;\; v_{\omega a} = 0. \tag{19}$$

— Distribuţie de dublete pe axa Ox:

$$u_t = k_D\, B \sin\omega \sqrt{\frac{x^2}{B^2 r^2} - 1}, \tag{20 a}$$

$$v_{rt} = -k_D \frac{B^2 \sin\omega}{2} \left(\operatorname{argch} \frac{x}{Br} + \frac{x}{Br}\sqrt{\frac{x^2}{B^2 r^2} - 1}\right), \tag{20 b}$$

$$v_{\omega t} = -k_D \frac{B^2 \sin\omega}{2} \left(\operatorname{arg\,ch} \frac{x}{Br} - \frac{x}{Br}\sqrt{\frac{x^2}{B^2 r^2} - 1}\right). \tag{20 c}$$

Funcţiile $F_1, F_2, \ldots, F_7$ sînt date în anexă.

Din analizarea expresiilor acestora se constată că în planul $z = ax$, funcţia F_1 ia valoarea $+\pi$ pe faţa superioară şi $-\pi$ pe cea inferioară, pentru toate punctele din avalul bordului de atac; în amontele bordului de atac şi în afara bordului lateral funcţia F_1 se anulează în acelaşi plan. Similar, funcţia F_3 prezintă un salt egal cu 2π în planul $z = \frac{a}{m} y$ pentru $0 < y < mx$ şi este continuă şi nulă în restul planului.

Situaţia din figura 1 poate fi utilizată pentru construirea soluţiei în cazul unor mişcări mai complexe, în particular pentru cazul unei boxe plane oarecare. Într-adevăr, mişcarea datorită unor singularităţi distribuite pe boxa 1234 (fig. 2) poate fi privită ca rezultînd din însumarea unor mişcări de tipul celei din figura 1, respectiv fişii unghiulare cu vîrfurile în cele patru colţuri ale boxei. Astfel, scăzînd din zona triunghiulară corespunzătoare colţului *1* sau *3* pe cea corespunzătoare colţului *2*, respectiv *4*, se obţine o

fișie de lățime egală cu aceea a boxei. Condiția este ca ambele zone să aibă același bord de atac, iar singularitățile aceeași intensitate. Apoi se scade din fișia corespunzătoare colțurilor *1—2* cea corespunzătoare colțurilor *3—4*.

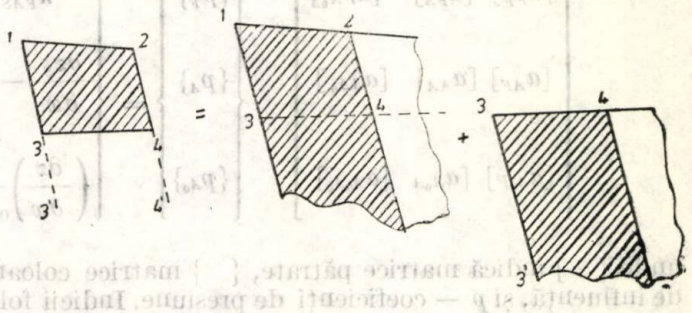


Fig. 2. — Înlocuirea unei boxe.

În sfîrșit, putem defini coeficienții de influență aerodinamici sub forma valorii componentelor normale a vitezelor induse în punctul de control colocație i, de către singularitatea unitară plasată pe elementul (boxa) j (fig. 3)

$$a_{ij} = w''_{ij} = w'_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j) - v'_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j), \tag{21}$$

$$u''_{ij} = u'_{ij},$$

$$v''_{ij} = v'_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j) + w'_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j).$$

În acest mod intensitățile necunoscute ale singularităților pot fi deduse din condiția la limită ca viteza să fie tangentă la suprafața corpului. Astfel, pentru un element (boxă) i vom avea:

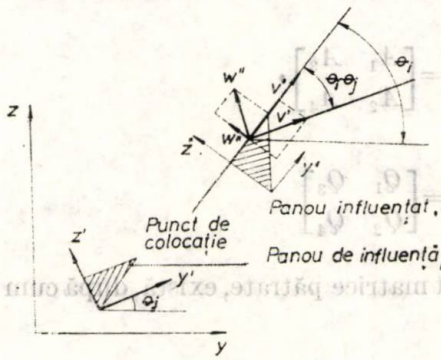


Fig. 3 — Definirea coeficientului de influență a_{ij}.

$$n_i = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_i \qquad \text{pe aripă și ampenaj,} \tag{22 a}$$

$$\frac{n_i}{1 + n_i} = \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_i \text{ pe fuzelaj,} \tag{22 b}$$

unde n_i este componenta normală a vitezei raportată la viteza generală a curentului.

Impunînd condiţiile (21) pe toate boxele, rezultă un sistem algebric care poate fi scris matriceal sub forma

$$\begin{bmatrix} [a_{FF}] & [a_{FA}] & [a_{FA_0}] \\ [a_{AF}] & [a_{AA}] & [a_{AA_0}] \\ [a_{A_0F}] & [a_{A_0A}] & [a_{A_0A_0}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{p_F\} \\ \{p_A\} \\ \{p_{A_0}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -n_{FAS} - n_{FA_0S} \\ \dfrac{\partial z_S}{\partial x} - \alpha - n_{AF} \\ \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)_0 - \alpha_0 - n_{A_0F} \end{Bmatrix}, \tag{23}$$

unde [ ] indică matrice pătrate, { } matrice coloană iar : a — coeficienţi de influenţă, şi p — coeficienţi de presiune. Indicii folosiţi sînt : A — pentru aripă, A_0 — pentru ampenaj şi F — pentru fuzelaj.

Sub forma (23) sistemul permite determinarea directă a distribuţiei presiunilor, iar apoi, prin integrare, se pot calcula forţele pe diferite organe şi pe avionul întreg.

2. ASUPRA INVERSĂRII UNOR MATRICE MARI

Pentru reducerea timpului de calcul, la inversarea matricei coeficienţilor de influenţă aerodinamici se propune în cele ce urmează o metodă de partiţionare multiplă, în corelaţie cu structura matricei. De exemplu, printr-o partiţionare dublă sîntem conduşi la inversarea a patru matrice, schimbînd timpul total de calcul cu un ordin de mărime.

Astfel, în cazul unei partiţionări simple, dacă matricea pătrată $[A]$ are forma

$$[A] = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ A_2 & A_4 \end{bmatrix}, \tag{24}$$

iar inversa ei $[Q]$ are forma

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_3 \\ Q_2 & Q_4 \end{bmatrix}, \tag{25}$$

unde $A_1 \ldots A_4, Q_1 \ldots Q_4$ sînt tot matrice pătrate, există, după cum se poate verifica, relaţiile :

$$Q_4 = P, \quad Q_2 = -PA_2A_1^{-1}, \tag{26}$$

$$Q_3 = -A_1^{-1}A_3P, \quad Q_1 = A_1^{-1} + A_1^{-1}A_3PA_2A_1^{-1},$$

unde

$$P = (A_4 - A_2A_1^{-1}A_3)^{-1}. \tag{27}$$

Se observă că se inversează numai matricele A_1 şi P care, evident trebuie să fie nesingulare.

Pentru o matrice mare, se poate aplica acest procedeu de mai multe ori. Pentru matricea sistemului (22) s-a aplicat cîte o partiționare matricei $[a_{FF}]$ și matricei

$$\begin{bmatrix} [a_{AA}] & [a_{AA_0}] \\ [a_{A_0A}] & [a_{A_0A_0}] \end{bmatrix}. \tag{28}$$

3. REZULTATE

Programul de calcul întocmit pe baza metodei expusă mai sus cuprinde trei părți:

a) secțiunea geometrică, în care se efectuează împărțirea în boxe (panouri), calculîndu-se atît coordonatele colțurilor și ale punctelor de colocație, cît și a versorilor conormalei la suprafața corpului.

b) Secțiunea aerodinamică, în care se calculează matricea $[A]$, apoi intensitățile singularităților, componentele vitezei, presiunile, precum și forțele și momentele aerodinamice.

c) Secțiunea de calcul, în care se realizează partiționarea, inversarea și substituirea matricei $[A]$, cu inversa sa $[Q]$.

Numărul total de panouri (boxe) a fost limitat la 120, pentru a putea utiliza un calculator de capacitate redusă sau un minicalculator (cu posibilități de extindere virtuală a memoriei). Ținînd seama că în dreptul aripii și ampenajului boxele de pe fuzelaj trebuie să corespundă secțiunilor de pe aripă, respectiv ampenaj, s-a ales următoarea distribuție; 35 boxe pe aripă, 25 boxe pe ampenaj și 60 boxe pe fuzelaj.

Evident, dacă se includ și suprafețe de comandă bracate sau fuzelajul are o formă mai complicată, numărul de boxe va trebui mărit pentru a obține o precizie de calcul satisfăcătoare. După cum s-a mai menționat, numărul total de boxe poate fi limitat la valori acceptabile (în cazul unor studii preliminarii) dacă se aproximează geometria reală cu una echivalentă mai simplă.

În condițiile menționate, matricea $[A]$ a fost partiționată în două matrice 30×30 (pentru boxele de pe fuzelaj), una de 35×35 (pentru aripă) și una de 25×25 (pentru ampenaj).

Durata calculului unei configurații la un număr Mach este de circa 150 minute pe un minicalculator de tip CORAL 4011, respectiv circa 3 minute pe un calculator CDC 3500.

În figura 4 se prezintă o configurație relativ simplă similară cu macheta pentru care în referința [3] sînt prezentate date experimentale.

Fuzelajul s-a considerat ca fiind alcătuit dintr-un con continuat cu un cilindru. Aripa și ampenajul orizontal sînt plăci plane cu unghi de calaj nul. Aripa este plasată median față de fuzelaj, în timp ce ampenajul este plasat pe meridianul de 45° în partea inferioară.

Unele rezultate ale calculului cu programul menționat sînt prezentate în figura 5 pentru $M_\infty = 2$ și un unghi de incidență de 1° față de axa fuzelajului.

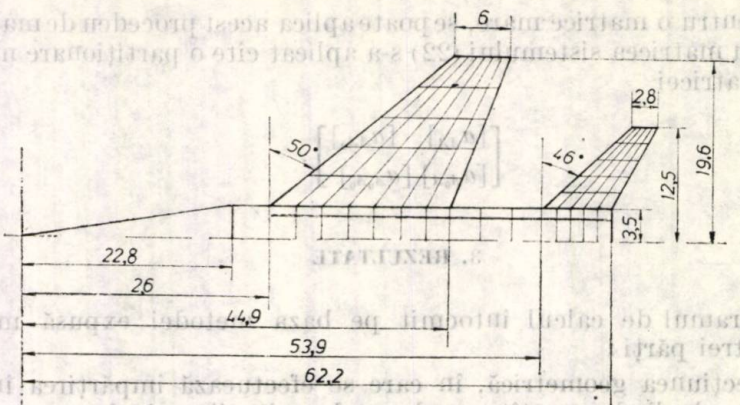


Fig. 4. — Configuraţia de control [3].

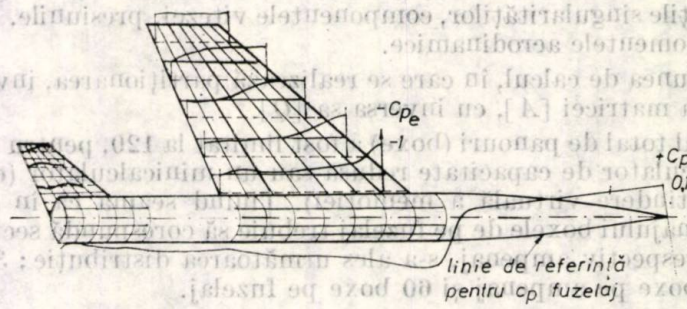


Fig. 5. — Distribuţia presiunilor pe configuraţia din figura 4 la $M_\infty = 2$ şi $\alpha = 1°$.

În sfîrşit, în figura 6 sînt prezentate comparativ datele de calcul şi cele experimentale [3] pentru $\frac{dC_z}{d\alpha}$ la diferite numere Mach. Se observă concordanţa foarte bună ce există pentru $M_\infty \geqslant 2$

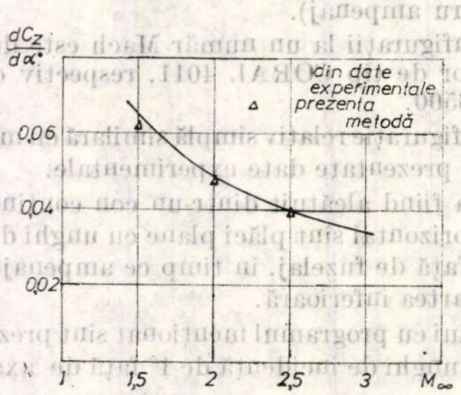


Fig. 6. — Panta curbei $C_z(\alpha)$ în funcţie de numărul Mach pentru configuraţia din figura 4.

De o manieră similară se pot adapta și alte procedee, de exemplu de optimizare a scheletului suprafețelor portante [4], ca și a formei fuzelajului.

ANEXĂ

Pentru configurația din figura 1 cu bord de atac subsonic, $B^2(a^2+m^2)<1$, funcțiile $F_1, \ldots, F_4$ au expresiile analitice [1]:

$$F_1 = \frac{z-ax}{|z-ax|}\arccos\frac{y[(y-mx)-B^2a(ay-mz)]+(z-ax)^2}{\sqrt{[(z-ax)^2+(1-B^2a^2)y^2][(y-mx)^2+(z-ax)^2-B^2(ay-mz)^2]}}. \tag{A1}$$

$$F_2 = \frac{1}{\sqrt{1-B^2(a^2+m^2)}}\operatorname{arg ch}\frac{x-B^2(my+az)}{B\sqrt{(y-mx)^2+(z-ax)^2-B^2(ay-mz)^2}}, \tag{A2}$$

$$F_3 = \frac{mz-ay}{|mz-ay|}\arccos\frac{-x(my+az)+y^2+z^2}{\sqrt{(y^2+z^2)\,[(y-mx)^2+(z-ax)^2-B^2(ay-mz)^2}}, \tag{A3}$$

$$F_4 = \left[F_3-\left(1+\frac{a^2}{m^2}\right)F_1\right]\frac{m}{a}, \tag{A4}$$

$$F_5 = \operatorname{arg ch}\frac{x}{B\sqrt{x^2+z^2}}, \tag{A5}$$

$$F_6 = \sqrt{1-B^2a^2}\ \operatorname{arg ch}\frac{x-B^2az}{B\sqrt{(z-ax)^2+(1-B^2a^2)y^2}}, \tag{A6}$$

$$F_7 = \left[F_5-\left(1+\frac{a^2}{m^2}\right)F_6\right]\frac{m}{a}. \tag{A7}$$

În cazul $a=0$, expresiile (A4) și A7) se vor înlocui cu

$$F_4 = \frac{-my}{y^2+z^2}\sqrt{x^2-B^2(y^2+z^2)}, \tag{A8}$$

$$F_7 = \frac{-mz}{y^2+z^2}\sqrt{(x^2-B^2)(y^2+z^2)}\,, \tag{A9}$$

În cazul configuraţiei din figura 1, cu bordul de atac supersonic, funcţiile precedente păstrează expresii similare pentru punctele din interiorul conului Mach cu vîrful în origine, cu excepţia funcţiei F_2 care devine

$$F_2 = \frac{\sqrt{x^2-B^2(y^2+z^2)}}{x-By}\,,\quad B^2(a^2+m^2)=1, \tag{A10}$$

respectiv

$$F_2 = \frac{1}{\sqrt{B^2(a^2+m^2)+1}}\arccos\frac{x^2-B^2(my+ax)}{B\sqrt{(y-mx)^2+(z-ax)^2-B^2(ay-mz)^2}} \tag{A11}$$

pentru $B^2(a^2+m^2)>1$.

În figura A1 este ilustrată comportarea funcţiilor F_1 şi F_3 într-o secţiune la $x = \text{const}$.

În interiorul înfăşurătorii conurilor Mach ale bordului de atac supersonic F_4 şi F_7 rămîn neschimbate, iar F_5 şi F_4 tind către zero.

Primită la redacţie la 25 octombrie 1983

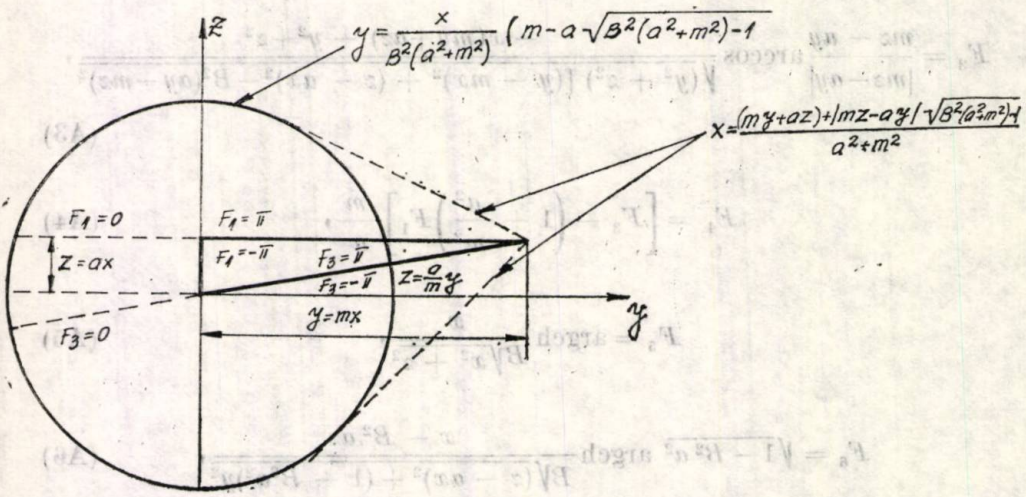


Fig. A1. — Comportarea funcţiilor F_1 şi F_3 într-o secţiune.

BIBLIOGRAFIE

1. F. A. WOODWARD, *Analysis and design of wing-body combinations at subsonic and supersonic speeds*, Journ. of Aircraft, **5**, 6 (1968).
2. M. A. HEASLET, L. LOMAX, A. L. JONES, *Volterra's solution of the wave equation as applied to three-dimensional supersonic airfoil problems*, NACA Rep. No. 889 (1947).
3. REBUFFET, *Aérodynamique expérimentale*, vol. II, Dunod, Paris, 1968.
4. J. A. WOODWARD, J. W. LARSEN, *A method of optimizing camber surfaces for wing-body combinations at supersonic speeds. Part. I. Theory and Applications*, Boeing Rep. D6—10741, pars. I, NAS2—2282 (1965).

CU PRIVIRE LA INFLUENȚA ABSORBȚIEI PRIN PERETE ASUPRA STRATULUI LIMITĂ LA CURGEREA TURBULENTĂ CU CVASIDESPRINDERE

de MIRCEA CÂRDU

Institutul de cercetare științifică și inginerie tehnologică pentru echipamente energetice, București

În lucrare se face o analiză teoretică a influenței absorbției prin perete asupra stratului limită la curgerea turbulentă cu cvasidesprindere, pe baza ecuațiilor diferențiale ale curgerii în stratul limită.
Se stabilește și influența variației parametrilor care determină curgerea asupra efectului absorbției prin perete.

1. GENERALITĂȚI

Este cunoscut faptul că la curgerea unui fluid în condiții în care gradientul de presiune este pozitiv în sensul vitezei de deplasare , în particular la difuzoare, se pot obține pierderi minime în cazul creării condițiilor de cvasidesprindere a fluidului, cînd frecarea la perete este nulă [4] [8].

Pe de altă parte, se cunoaște că absorbția prin perete constituie unul din mijloacele prin care se poate obține o imbunătățire a caracteristicilor stratului limită sub aspectul stabilității acestuia și evitării desprinderii, în condiții în care acest lucru nu ar fi posibil la curgerea obișnuită (fără absorbție). Acest lucru a fost constatat pe cale experimentală și constituie subiectul unei serii întregi de lucrări de specialitate [1] [3] [6] [9] [12] [13].

În lucrarea de față ne propunem să determinăm pe cale teoretică influența absorbției prin perete asupra stratului limită pentru cazul curgerii turbulente cu cvasidesprindere, pornind de la ecuațiile diferențiale ale curgerii în stratul limită și folosind metoda lui Ghinevskii și Solodkin de dezvoltare în serie Maclaurin a produsului $(r.\tau)$, unde r este raza curentă în raport cu axa de simetrie la curgerea axial-simetrică, iar τ este tensiunea de frecare în stratul limită în apropierea peretelui [7] [8].

În lucrările amintite această metodă este aplicată la curgerea turbulentă obișnuită (fără absorbție).

2. RELAȚII MATEMATICE APLICABILE LA CURGEREA ÎN STRATUL LIMITĂ TURBULENT CU CVASIDESPRINDERE

Se studiază cazul general al curgerii în vecinătatea unor pereți cilindrici (corp cilindric sau tub circular *), curgerea plană fiind tratată ca un caz particular al cerlorlalte două (fig. 1).

*) Prin corp cilindric înțelegem un corp axial simetric situat în curentul de fluid, iar prin tub circular înțelegem un tub axial simetric prin care curge fluidul considerat.

St. cerc. mec. apl., tom 43, nr. 2, 1984, p. 129–140

Se menţionează că în figura 1 profilul vitezelor în stratul limită a fost reprezentat pentru situaţia de cvasidesprindere (deci cu $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ pentru $y = 0$) pe care o analizăm în cele ce urmează.

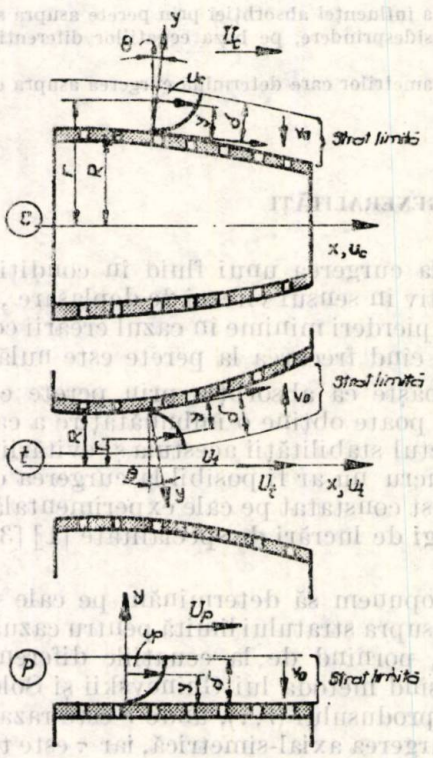


Fig. 1. — Stratul limită pe pereţii cilindrici şi în curgerea plană : c — corp cilindric, t — tub circular, p — curgere plană, r — raza curentă, R — raza peretelui, u — viteza la distanţa y de la perete, U — viteza de la infinit, δ — grosimea stratului limită, v_0 — viteza de absorbţie.

Legea curgerii în stratul limită format la un perete cilindric este exprimată prin următoarele ecuaţii diferenţiale :

$$ru\frac{\partial u}{\partial x} + rv\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{r}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial(r.\tau)}{\partial y}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} = 0, \tag{2}$$

unde simbolurile care nu sînt explicate pe figura 1 au următoarele semnificaţii : ρ — densitatea fluidului; $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$ —gradientul de presiune în raport cu axa în lungul căreia are loc curgerea fluidului; τ — tensiunea forţei de frecare.

Din figura 1 rezultă

$$r = R \pm y\cos\theta \cong R \pm y, \tag{3}$$

deoarece θ fiind în mod obișnuit foarte mic, avem $\cos\theta \cong 1$.

În imediata apropiere a peretelui, produsul $(r.\tau)$ se dezvoltă în serie Maclaurin astfel:

$$r.\tau = (r\tau)_0 + \left[\frac{\partial(r\tau)}{\partial y}\right]_{y=0} y + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2(r\tau)}{\partial y^2}\right]_{y=0} y^2 + \ldots . \tag{4}$$

unde indicele zero reprezintă situația la perete.

Dacă considerăm o curgere cu cvasidesprindere (cazul difuzorului ideal), avem $\tau_0 = 0$, deci $(r\,\tau)_0 = 0$ și limitîndu-ne la primii doi termeni din seria Maclaurin vom avea:

$$r\tau = \left[\frac{\partial(r\tau)}{\partial y}\right]_{y=0} y. \tag{5}$$

Pe de altă parte, din (1) pentru imediata apropiere a peretelui, deci $y \cong 0$ și prin urmare $u \cong 0$ și $r \cong R$, avem:

$$\left[\frac{\partial(r\tau)}{\partial y}\right]_{y=0} = \rho R v_0 \frac{\partial u}{\partial y} + R\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}. \tag{6}$$

Din (3), (5) și (6) obținem:

$$(R \pm y)\,\tau = \left(\rho R v_0 \frac{\partial u}{\partial y} + R\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right) y. \tag{7}$$

După Prandtl, la curgerea turbulentă avem:

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2, \tag{8}$$

unde l este lungimea de amestec, care caracterizează mișcarea turbulentă a unui fluid real și reprezintă distanța parcursă de o particulă fluidă sub influența vitezei de pulsație [5]. Lungimea de amestec este dată de relația:

$$l = k.y, \tag{9}$$

în care k este o constantă cu valori indicate în diverse lucrări de specialitate astfel: $k = 0{,}264 - 0{,}325$ [8]; $k = 0{,}392$ [14].

Din relațiile (7), (8) și (9), notînd $Z = \dfrac{\partial u}{\partial y}$, obținem expresia

$$\rho k^2 (R \pm y)\, yZ^2 - \rho R v_0 Z - R\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0, \tag{10}$$

care reprezintă o ecuație de gradul al doilea de variabilă Z.

Pentru ca ecuația (10) să aibă rădăcini reale este necesar să se îndeplinească condiția :

$$\rho^2 R^2 v_0^2 + 4\rho k^2 R \frac{dp}{dx}(R \pm y)\, y > 0. \tag{11}$$

Această condiție este întotdeauna îndeplinită dacă ținem seama că $\frac{dp}{dx} > 0$ și $(R \pm y) \geqslant 0$.

Rădăcinile ecuației (10) sînt :

$$Z_{1,2} = \frac{\rho\, R v_0 \pm \sqrt{\rho^2 R^2 v^2 + 4\rho k^2 R \frac{dp}{dx}(R \pm y) y}}{2\rho\, k^2 (R \pm y)\, y}. \tag{12}$$

În relația (12) semnele plus și minus din paranteza $(R \pm y)$ se referă la corpul cilindric (semnul plus), respectiv la tubul circular (semnul minus), pe cînd semnele plus și minus din fața radicalului de la numărător corespund celor două rădăcini (Z_1 și, respectiv, Z_2) ale ecuației (10).

Pentru a se satisface condiția $\frac{\partial u}{\partial y} \geqslant 0$ așa cum rezultă și din figura 1, trebuie să se aleagă semnul plus între cei doi termeni de la numărător în membrul din dreapta al expresiei (12).

Vom avea deci :

$$Z_{c,t} = \frac{\rho R\, v_0 + \sqrt{\rho^2 R^2 v_0^2 + 4\rho\, k^2\, R \frac{dp}{dx}\,(R \pm y) y}}{2\rho\, k^2 (R \pm y)\, y}, \tag{13}$$

unde indicele c se referă la corpul cilindric, iar indicele t se referă la tubul circular.

Pentru facilitarea integrării [10], relația (13) se pune sub o formă convenabilă, obținîndu-se două relații astfel :

— pentru corpul cilindric :

$$Z_c = \frac{A}{(R + y) y} + \frac{AB}{(y^2 + Ry)\sqrt{X}} + 2R \frac{dp}{dx} \cdot \frac{1}{\sqrt{X}}, \tag{14}$$

— pentru tubul circular :

$$Z_t = \frac{A}{(R - y)\, y} + \frac{AB}{(-y^2 + Ry)\sqrt{Y}} + 2R \frac{dp}{dx} \cdot \frac{1}{\sqrt{Y}}, \tag{15}$$

unde

$$A = \frac{Rv_0}{2k^2}, \tag{16}$$

$$B = \rho B v_0, \tag{17}$$

$$X = Dy^2 + DRy + B^2, \tag{18}$$

$$Y = -Dy^2 + DRy + B^2, \tag{19}$$

$$D = 4\rho k^2 R \frac{dp}{dx}. \tag{20}$$

Introducînd în relația (14) $R = \infty$, după o prealabilă aranjare a acesteia pentru ca în acest fel anumiți termeni să se anuleze, se obține expresia lui Z pentru cazul curgerii plane și anume:

$$Z_p = \frac{v_0}{2ky} + \frac{\rho v_0^2}{2ky\sqrt{ay+b}} + 2\frac{dp}{dx}\cdot\frac{1}{\sqrt{ay+b}}, \tag{21}$$

unde

$$a = 4\rho k^2 \frac{dp}{dx}, \tag{22}$$

$$b = \rho^2 v_0^2. \tag{23}$$

Efectuînd integrarea expresiei (14) se obține:

$$u_c = \frac{v_0}{2k^2} \ln \left| \frac{y^2[2B(B+\sqrt{X}) - DR(R+y)]}{2B(R+y)^2[2B(B+\sqrt{X}) + DRy]} \right| +$$

$$+ \frac{1}{k}\sqrt{\frac{R}{\rho}\cdot\frac{dp}{dx}} \ln \left| \frac{\sqrt{D}(R+2y)}{2} + \sqrt{X} \right| + C_c. \tag{24}$$

Constanta de integrare C_c se determină punînd în relația (24) condiția la limită: $u_c = U_c$ pentru $y = \delta$.

Introducînd pe C_c astfel obținut în relația (24) și notînd $\eta = \frac{y}{\delta}$ și $\varepsilon = \frac{\delta}{R}$, se obține

$$u_c = U_c + \frac{v_0}{2k^2} \ln \left| \frac{\eta^2(1+\varepsilon)^2 E(\eta)\cdot F(\varepsilon)}{(1+\eta\varepsilon)^2 E(\varepsilon)\cdot F(\eta)} \right| +$$

$$+ \frac{1}{k}\sqrt{\frac{R}{\rho}\cdot\frac{dp}{dx}} \ln \left| \frac{G(\eta)}{G(\varepsilon)} \right|, \tag{25}$$

unde

$$E(\eta) = 2B(B + \sqrt{X_\eta}) - DR^2(1 + \eta\varepsilon), \tag{26}$$

$$E(\varepsilon) = 2B(B + \sqrt{X_\varepsilon}) - DR^2(1 + \varepsilon), \tag{27}$$

$$F(\eta) = 2B(B + \sqrt{X_\eta}) + DR^2\eta\varepsilon, \tag{28}$$

$$F(\varepsilon) = 2B(B + \sqrt{X_\varepsilon}) + DR^2\varepsilon, \tag{29}$$

$$G(\eta) = \sqrt{D}\,R(1 + 2\eta\,\varepsilon) + 2\sqrt{X_\eta}, \tag{30}$$

$$G(\varepsilon) = \sqrt{D}\,R(1 + 2\varepsilon) + 2\sqrt{X_\varepsilon}, \tag{31}$$

$$X_\eta = DR^2\eta\,\varepsilon(1 + \eta\varepsilon) + B^2, \tag{32}$$

$$X_\varepsilon = DR^2\,\varepsilon(1 + \varepsilon) + B^2. \tag{33}$$

Pentru determinarea caracteristicilor stratului limită (grosimea de deplasare, grosimea de pierdere a cantității de mișcare, parametrii de formă etc.) este important să se cunoască raportul $\varphi_c = \dfrac{u_c}{U_c}$.

Împărțind cu U_c în relația (25), se obține

$$\varphi_c = 1 + \frac{v_0}{2k^2\,U_c}\ln\left|\frac{\eta^2\cdot(1+\varepsilon)^2\cdot E(\eta)\cdot F(\varepsilon)}{(1+\eta\varepsilon)^2\cdot E(\varepsilon)\cdot F(\eta)}\right| + \\ + \frac{1}{kU_c}\sqrt{\frac{R}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}}\ln\left|\frac{G(\eta)}{G(\varepsilon)}\right|. \tag{34}$$

Pentru compararea profilului vitezelor în stratul limită la curgerea cu absorbție, cu profilul respectiv în cazul curgerii fără absorbție, se introduce $v_0 = 0$ în relația (34) și în celelalte legate de aceasta, și se obține:

$$\varphi_{c0} = (\varphi_c)_{v_0=0} = 1 + \frac{1}{kU_c}\sqrt{\frac{R}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}}\ln\frac{1+2\eta\varepsilon+2\sqrt{\eta\varepsilon+(n\varepsilon)^2}}{1+2\varepsilon+2\sqrt{\varepsilon+\varepsilon^2}}. \tag{35}$$

Notăm

$$\Phi_c = \frac{\varphi_c}{\varphi_{c0}}. \tag{36}$$

Procedînd în mod similar cu cele arătate mai sus pentru corpul cilindric, pornindu-se de la integrarea expresiei (15), pentru tubul circular,

se obține următoarea expresie pentru raportul φ_t:

$$\varphi_t = \frac{u_t}{U_t} = 1 + \frac{v_0}{2k^2 U_t} \ln \left| \frac{\eta^2(1-\varepsilon)^2\, M(\eta)\cdot N(\varepsilon)}{(1-\eta\varepsilon)^2\, M(\varepsilon)\cdot N(\eta)} \right| +$$

$$+ \frac{1}{kU_t} \sqrt{\frac{R}{\rho} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}}\, [\arcsin P(\varepsilon) - \arcsin P(\eta)], \tag{37}$$

unde

$$M(\eta) = 2B\,(B + \sqrt{Y_\eta}) + DR^2\,(1-\eta\varepsilon), \tag{38}$$

$$M(\varepsilon) = 2B\,(B + \sqrt{Y_\varepsilon}) + DR^2\,(1-\varepsilon), \tag{39}$$

$$N(\eta) = 2B(B + \sqrt{Y_\eta}) + DR^2\,\eta\varepsilon, \tag{40}$$

$$N(\varepsilon) = 2B\,(B + \sqrt{Y_\varepsilon}) + DR^2\varepsilon, \tag{41}$$

$$P(\eta) = \frac{\sqrt{D}\,R(1-2\eta\varepsilon)}{\sqrt{4B^2 + DR^2}}, \tag{42}$$

$$P(\varepsilon) = \frac{\sqrt{D}R\,(1-2\varepsilon)}{\sqrt{4B^2 + DR^2}}, \tag{43}$$

$$Y_\eta = DR^2\,\eta\,\varepsilon\,(1-\eta\varepsilon) + B^2, \tag{44}$$

$$Y_\varepsilon = DR^2\,\varepsilon\,(1-\varepsilon) + B^2. \tag{45}$$

Introducînd $v_0 = 0$ în relația (37) și următoarele, obținem:

$$\varphi_{t0} = (\varphi_t)_{v_0=0} = 1 + \frac{1}{kU_t} \sqrt{\frac{R}{\rho} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}}\, [\arcsin (1-2\eta\varepsilon) - \arcsin (1-2\eta\varepsilon)]. \tag{46}$$

Notăm

$$\Phi_t = \frac{\varphi_t}{\varphi_{t0}}. \tag{47}$$

Pentru curgerea plană, din integrarea expresiei (21) se obține:

$$\varphi_p = 1 + \frac{v_0}{2k^2 U_p} \ln \left| \frac{\eta\,(\sqrt{a\eta\delta + b} - \rho v_0)(\sqrt{a\delta + b} + \rho v_0)}{(\sqrt{a\eta\delta + b} + \rho v_0)\,(\sqrt{a\delta + b} - \rho v_0)} \right| +$$

$$+ \frac{1}{\rho k^2 U_p} (\sqrt{a\eta\delta + b} - \sqrt{a\delta + b}), \tag{48}$$

unde a și b sînt dați de relațiile (22) și (23).

Similar, vom avea:

$$\varphi_{p0} = (\varphi_p)_{\bar{v}_0=0} = 1 + \frac{\sqrt{a\delta}}{\rho k^2 U_p}(\sqrt{\eta} - 1). \tag{49}$$

Notăm

$$\Phi_p = \frac{\varphi_p}{\varphi_{p0}}. \tag{50}$$

Este de menționat că pentru curgerea plană se poate ajunge la aceleași rezultate pornindu-se de la ecuația diferențială a curgerii în stratul limită pentru curgerea plană, similară cu ecuația (1) în care nu mai apare raza r.

3. EXEMPLU DE CALCUL

Pentru a analiza modul în care diverse elemente caracteristice ale fluidului și ale curgerii influențează asupra rapoartelor φ_c, φ_t și φ_p s-a luat ca exemplu de bază cazul curgerii aburului prin difuzoarele ventilelor de reglare a admisiei, cu diametrul la scaun de 50 mm, utilizate în mod

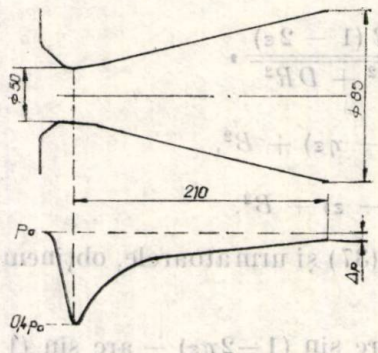


Fig. 2. — Tubul circular confuzor-difuzor al unui ventil de admisie și variația presiunii de-a lungul acestuia.

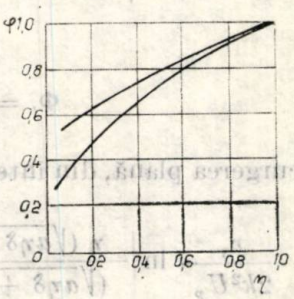


Fig. 3. — Variația raportului φ_t în funcție de η.

frecvent la turbinele cu parametri la intrare 90 ata., 535°C fabricate la Intreprinderea de mașini grele București după proiectele Institutului de cercetare științifică și inginerie tehnologică pentru echipamente energetice.

În figura 2 este reprezentat schematic tubul circular confuzor-difuzor al unui asemenea ventil, precum și curba de variație a presiunii de-a lungul unui ventil de același tip, determinată pe cale experimentală [2].

Calculele, fiind laborioase, au fost efectuate pe un calculator, admițîndu-se pentru η valori între 0,05 și 1,0, iar pentru ε valori între 0,2 și 0,8 (în cazul tubului circular $\varepsilon_{max} = 1$)*).

În figura 3 sînt reprezentate rapoartele φ_t și φ_{t0} în funcție de η pentru unul din cazurile studiate, rapoarte din a căror variație se observă că absorbția are o influență pozitivă asupra profilului vitezelor în stratul limită,

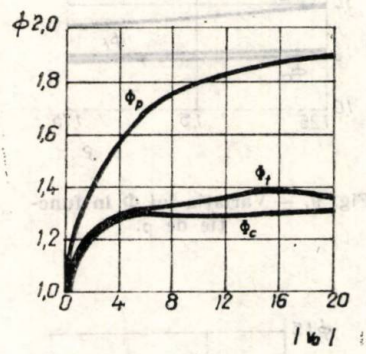


Fig. 4. — Variația lui Φ în funcție de v_0.

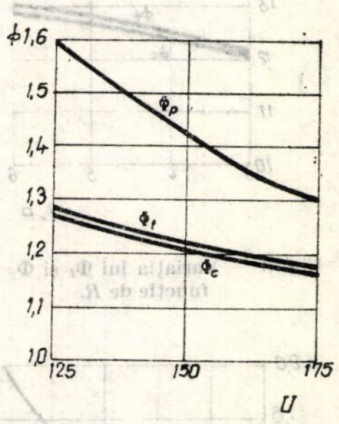


Fig. 5. — Variația lui Φ în funcție de U.

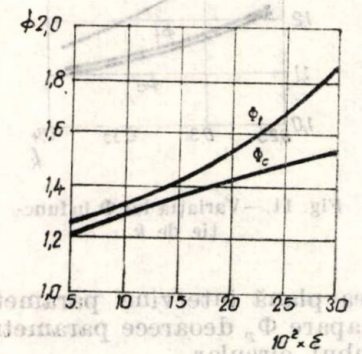


Fig. 6. — Variația lui Φ_t și Φ_c în funcție de ε.

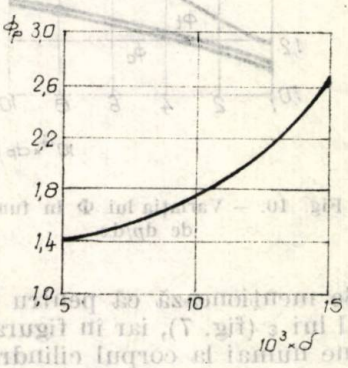


Fig. 7. — Variația lui Φ_p în funcție de δ.

în sensul că acesta este mai „plin" decît la curgerea fără absorbție și deci aplicarea absorbției conduce la o curgere mai stabilă sub aspectul desprinderii stratului limită de pe peretele pe care se formează.

*) Pentru curgerea plană s-au admis pentru δ valori între 0,005 și 0,015 (măsurat în metri).

Rezultatele similare se obțin și pentru rapoartele φ_c și φ_p.

În figurile 4...11 sînt reprezentate curbele de variație a rapoartelor Φ_c, Φ_t și Φ_p în funcție de parametrii curgerii care intervin în relațiile stabilite mai sus și anume : v_0, U, ε, R, ρ, dp/dx și k.

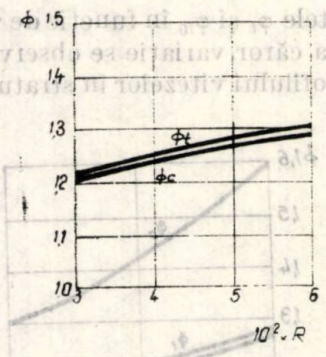


Fig. 8. — Variația lui Φ_t și Φ_c în funcție de R.

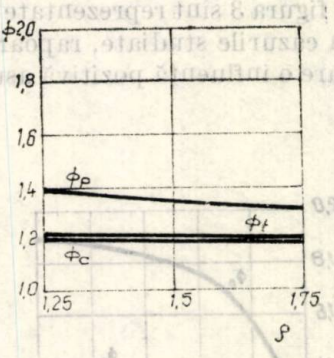


Fig. 9. — Variația lui Φ în funcție de ρ.

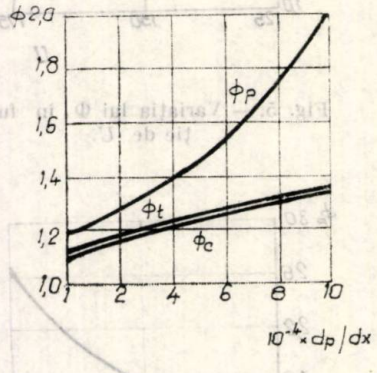


Fig. 10. — Variația lui Φ în funcție de dp/dx.

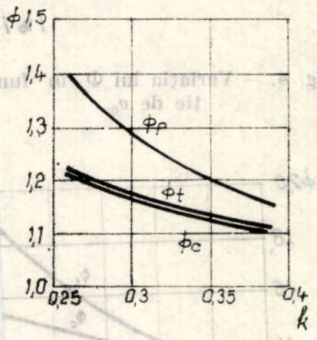


Fig. 11. — Variația lui Φ în funcție de k.

Se menționează că pentru curgerea plană intervine parametrul δ în locul lui ε (fig. 7), iar în figura 8 nu apare Φ_p deoarece parametrul R intervine numai la corpul cilindric și tubul circular.

4. CONSIDERAȚII CALITATIVE

Observația de ordin general care se poate deduce din analizarea tuturor figurilor de mai sus este aceea că cel mai important efect al absorbției se manifestă la curgerea plană, raportul Φ_p avînd în toate cazurile (funcție de oricare din parametrii amintiți) valori mai mari decît Φ_c și

Φ_t. Aceste ultime două rapoarte au în general valori apropiate, de fiecare dată Φ_t fiind ușor superior lui Φ_c.

Din figura 4 se observă că rapoartele Φ cresc odată cu creșterea vitezei de absorbție v_0. Această creștere este destul de bruscă pînă la o anumită valoare a lui v_0, după care curbele de variație respective practic se aplatizează, în unele cazuri luînd o alură scăzătoare sau oscilantă în jurul unei anumite valori.

Creșterea vitezei v_0 rezultă deci că este utilă pînă la o anumită valoare, după care nu se mai justifică o creștere în continuare, cu atît mai mult cu cît orice astfel de creștere se face pe seama unui consum suplimentar de energie și după caz, pe seama măririi instalației cu ajutorul căreia se produce absorbția (pompe, exhaustoare, rezervoare tampon, armături, conducte etc.).

Astfel, în cazul nostru, la care diagrama din figura 4 corespunde unei viteze la infinit $U = 150$ m/s, se observă că vitezele de absorbție optime ar fi $v_0 \cong 5$ m/s (circa 3,5 % din U) pentru cazul corpului cilindric și pentru tubul circular și v_0 15 m/s (circa 10 % din U) pentru curgerea plană. Desigur că această optimizare trebuie făcută și în funcție de consumul de energie amintit mai sus; în legătură cu aceasta, în literatura de specialitate se recomandă ca în cazul difuzoarelor, de exemplu debitul de fluid absorbit să reprezinte 1 % ... 4 % din debitul care trece prin difuzor.

Din figurile următoare (5...11) se observă că rapoartele Φ scad odată cu creșterea parametrilor U, ρ și k și cresc odată cu creșterea parametrilor ε (respectiv δ) R și dp/dx. Este de menționat că rapoartele Φ variază foarte puțin în funcție de densitatea ρ, mai ales rapoartele Φ_c și Φ_t care practic rămîn constante.

Rezultatele calculelor ilustrate în diagramele de mai sus sînt cu referire la valoarea cea mai mică admisă de noi pentru raportul $\eta = \frac{y}{\delta}$ și anume $\eta = 0{,}05$, deoarece pentru asemenea valoare rapoartele Φ au, la rîndul lor, valorile cele mai mari, reprezentative pentru caracterizarea formei profilului vitezelor în stratul limită; pentru valori ale lui η tinzînd spre unitate, rapoartele Φ tind de asemenea spre unitate.

Așa cum s-a arătat și cu ocazia determinării constantei de integrare C_c în vederea stabilirii relației (25), pentru valori foarte mici ale lui η, la limită pentru $\eta = 0$, vitezele u_c, u_t și u_p tind spre $-\infty$, ceea ce nu corespunde fenomenului fizic; pentru a se pune reprezentarea matematică de acord cu realitatea, curbele vitezelor, respectiv rapoartele φ_c, φ_t și φ_p, la valori foarte mici (tinzînd spre zero) ale lui η trebuie corectate în conformitate cu condiția de limită; $u = 0$ pentru $y = 0$, respectiv $\varphi = 0$ pentru $\eta = 0$*).

Pe baza celor analizate se pot desprinde următoarele:

*) În figura 3 nu s-a făcut acest lucru, curbele φ_t și φ_{t_0} reprezentînd în mod fidel rezultatele calculelor efectuate pe baza relațiilor stabilite în această lucrare.

5. CONCLUZII

5.1. Este posibilă studierea influenței absorbției prin perete asupra stratului limită la curgerea turbulentă cu cvasidesprindere pornindu-se de la ecuațiile diferențiale ale stratului limită; în literatura de specialitate sînt dezvoltate metode de analiză a acestei influențe pe baza ecuațiilor impulsului (Von Kármán) și a energiei (Wieghardt).

5.2. Efectul maxim al absorbției în sensul îmbunătățirii modului de variație a vitezelor în stratul limită, sub aspectul stabilității curgerii, se manifestă în cazul curgerii plane. Efectul absorbției la corpul cilindric și tubul circular este aproximativ același (mai redus decît la curgerea plană), dar rămîne totuși ușor superior în cazul tubului circular.

5.3. Din punct de vedere al efectului asupra stabilității curgerii, viteza de absorbție prin perete are o valoare optimă pentru fiecare caz în parte.

Influența celorlalți parametri ai curgerii asupra stratului limită se manifestă astfel:

— profilul vitezelor în stratul limită se îmbunătățește odată cu creșterea raportului $\varepsilon = \frac{\delta}{R}$ (respectiv a grosimii δ a stratului limită, la curgerea plană), a razei R a corpului cilindric sau tubului circular și a variației presiunii în direcția de curgere, dp/dx;

— profilul vitezelor în stratul limită se îmbunătățește odată cu scăderea vitezei de la infinit U, a densității fluidului ρ și a coeficientului k, constantă ce intervine în expresia lungimii de amestec.

Primită la redacție la 7 iulie 1983

BIBLIOGRAFIE

1. A. A. BASOVSKAIA, A. P. STEPANENKO, *Vlianie şcelevovo otsosa pogranicinovo sloia na effektivnosti vihodnih diffuzorov turbomaşin*, Energhetika, *1* (1978).
2. N. BOBOESCU, G. CREȚA, GH. BOZAN, V. NEGREA, *Studii și încercări asupra repartiției presiunilor în ventilele de reglare la turbinele cu abur*, Energetica *12* (1965).
3. A. S. DORFMAN, P. P. PILISKII, M. I. SAIKOVSKII, *Ob otsose pogranicinovo sloia v koliţevih diffuzorah*, OTN, Energhetika i avtomatika, *6*, (1964).
4. H. N. FERNHOLZ, *Theoretische Untersuchung zur optimalen Druckumsetzung in Untershalldiffusoren*, Dissertation, Karlsruhe, 1961.
5. J. FLOREA, V. PANAITESCU, *Mecanica fluidelor*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1979.
6. M. O. FRANKFURT, *Experimentalinoe issledovanie diffuzorov s şcelevim otsasivaniem vozduha iz pogranicinovo sloia*, TAGHI, Promişlennaia aerodinamika, vîpusk 30, Maşinostroenie, Moscova, 1973.
7. A. S. GHINEVSKII, E. E. SOLODKIN, *Vlianie poperecinoi krivizni harakteristiki osesimetricinovo turbulentnovo pogranicinovo sloia*, PMM, **XXII**, *6* (1958).
8. A. S. GHINEVSKII, *Teoria turbulentnîh strui i sledov*, Izd. Maşinostroenie, Moscova, 1969.
9. I. G. GOGOLEV, R. I. DIACONOV, A. M. DROKONOV, V. E. LUKAŞEVICI, A. V. OSIPOV, *Issledovanie sposobov povîşenia effektivnosti koniceskih diffuzorov*, Energomaşinostroenie *5* (1979).
10. A. P. PRUDNIKOV, IU. A. BRÎCIKOV, O. I. MARICEV, *Integrali i readi*, Nauka, Moscova, 1981.
11. H. SCLICHTING, *Teoria pogranicinovo sloia*, Izd. Energhia, Moscova, 1974.
12. I. S. VERIGHIN, *Vlianie poristovo vduva i otsosa na rabotu otrivnovo koniceskovo diffuzora*, IFJ, **XXX**, *4* (1976).
13. A. E. ZAREANKIN, A. A. EFREMOV, V. V. ETT, *Ob ispolizovanii diffuzorov v reguliruiuşcih klapanah parovîh turbin*, Teploenerghetika, *9*, 1977.
14. * * * *Teplo i massoperenos*, tom I, Nauka i tehnika, Minsk, 1965.

CILINDRUL ELASTIC ÎN CÎMP GRAVITAȚIONAL. I. FORMULAREA PROBLEMEI LA LIMITĂ

de ȘTEFAN GYÉRESI
Institutul Agronomic „N. Bălcescu", București

În lucrare se dă structura spațiotemporală a cîmpului gravitațional, produs de mișcarea de rotație uniformă a unui sistem de referință neinerțial față de un reper inerțial. Se postulează o lege constitutivă de tip Hooke și se utilizează legea de bilanț al energiei și impulsului pentru formularea problemei la limită. Se presupune că suprafața laterală a cilindrului este liberă de tensiuni mecanice.

1. INTRODUCERE

Se studiază, în cadrul mecanicii clasice și în cel al mecanicii relativiste, comportarea cilindrului elastic în rotație uniformă față de un reper inerțial. Problema este echivalentă cu cea a cilindrului în repaus într-un cîmp gravitațional, produs de mișcarea de rotație uniformă a unui sistem de referință neinerțial față de un reper inerțial. Se presupune că densitatea proprie a masei gravitaționale proprii a cilindrului este constantă și că deformația cilindrului într-un punct depinde numai de distanța punctului față de axa de rotație și constă numai în modificarea acestei distanțe. Ca lege constitutivă se folosește una de tip Hooke. Legea de bilanț al energiei și impulsului și faptul că suprafața laterală este liberă de tensiuni conduc la formularea problemei la limită. Problema cilindrului elastic în rotație uniformă, atît în cadrul mecanicii clasice, cît și în cel al mecanicii relativiste, a fost studiată și de A. Suresh [1]. Compararea rezultatelor și concluziile se vor prezenta în partea a doua a acestei lucrări în care se va expune rezolvarea numerică a problemei la limită.

2. STRUCTURA SPAȚIOTEMPORALĂ

Structura spațiotemporală, în coordonate cilindrice [2], a unui cîmp gravitațional, creat de rotația uniformă a unui reper neinerțial față de unul inerțial este considerat din punctul de vedere al unui observator în repaus în reperul neinerțial.

În sistemul de referință inerțial introducem un sistem de coordonate cilindrice

$$y^1 = \overset{\circ}{r}\,;\quad y^2 = \overset{\circ}{\theta}\,;\quad y^3 = \overset{\circ}{z}\,;\quad y^4 = c\overset{\circ}{t}, \tag{1}$$

cerculeț indicînd raportarea la reperul inerțial, iar c este viteza de propagare a luminii în vid în raport cu un reper inerțial.

Pătratul invariantului fundamental, $\mathrm{d}\overset{\circ}{s}$, se definește astfel [3]

$$\mathrm{d}\overset{\circ}{s}^2 = -\overset{\circ}{g}_{\alpha\beta}\mathrm{d}y^\alpha \mathrm{d}y^\beta = -(\mathrm{d}\overset{\circ}{r}^2 + \overset{\circ}{r}^2\mathrm{d}\overset{\circ}{\theta}^2 + \mathrm{d}\overset{\circ}{z}^2 - c^2\,\mathrm{d}\overset{\circ}{t}^2), \tag{2}$$

unde indicii greceși iau valori de la 1 la 4, aplicîndu-se convenția de însumare a indicilor muți. Se vede că tensorul metric $\mathbf{g}$ are componentele

St. cerc. mec. apl., tom. 43, nr. 2, 1984, p. 141–146

covariante nenule

$$\mathring{g}_{11} = \mathring{g}_{33} = 1\,; \quad \mathring{g}_{22} = \mathring{r}^2\,; \quad \mathring{g}_{44} = -c^2, \tag{3}$$

componentele sale contravariante fiind elementele matricei inverse $||\mathring{g}_{\alpha\beta}||^{-1}$; cele nenule sînt

$$\mathring{g}^{11} = \mathring{g}^{33} = 1\,; \quad \mathring{g}^{22} = \frac{1}{\mathring{r}^2}\,; \quad \mathring{g}^{44} = -\frac{1}{c^2}. \tag{4}$$

În sistemul de referinţă neinerţial introducem coordonatele cilindrice

$$x^1 = r\,; \; x^2 = \theta\,; \; x^3 = z\,; \; x^4 = ct. \tag{5}$$

Ecuaţiile de mişcare [3]

$$x^\alpha = x^\alpha(y^\beta) \tag{6}$$

ale reperului neinerţial faţă de cel inerţial se scriu

$$r = \mathring{r}\,; \quad \theta = \mathring{\theta} - \omega\mathring{t}\,; \quad z = \mathring{z}\,; \quad t = \mathring{t}, \tag{7}$$

unde ω este viteza unghiulară constantă cu care reperul neinerţial se roteşte în jurul axei z în raport cu reperul inerţial.

Invariantul ds^2, în reperul neinerţial, se exprimă astfel

$$ds^2 = -g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = -[dr^2 + r^2 d\theta^2 + 2r^2\omega d\theta dt + dz^2 - (c^2 - r^2\omega^2)dt^2)]. \tag{8}$$

Se deduc de aici componentele covariante ale tensorului metric; cele nenule sînt:

$$g_{11} = g_{33} = 1\,; \; g_{22} = r^2\,; \; g_{44} = -(c^2 - r^2\omega^2)\,; \; g_{24} = g_{42} = r^2\theta. \tag{9}$$

Componentele contravariante se determină analog ca în cazul reperului inerţial, obţinîndu-se următoarele componente nenule:

$$g^{11} = g^{33} = 1\,; \; g^{22} = \frac{c^2 - r^2\omega^2}{c^2 r^2}\,; \; g^{44} = -\frac{1}{c^2}\,; \; g^{24} = g^{42} = \frac{\omega}{c^2}. \tag{10}$$

Componentele contravariante [3]

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds} \tag{11}$$

ale cvadrivitezei sînt

$$u^1 = u^2 = u^3 = 0, \; u^4 = \frac{1}{\sqrt{c^2 - r^2\omega^2}}. \tag{12}$$

Cele covariante,

$$u_\alpha = g_{\alpha\beta} u^\beta, \tag{13}$$

vor fi

$$u_1 = u_3 = 0\,;\; u_2 = \frac{r^2\omega}{\sqrt{c^2 - r^2\omega^2}}\,;\quad u_4 = -\sqrt{c^2 - r^2\omega^2}. \tag{14}$$

Calculînd componentele co- și contravariante ale proiectorului spațial [3]

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta \tag{15}$$

în cele două repere, găsim că nenule sînt:

$$\overset{\circ}{\bar{g}}_{11} = \overset{\circ}{\bar{g}}_{33} = 1\,;\; \overset{\circ}{\bar{g}}_{22} = \overset{\circ}{r}^2\,;\; \overset{\circ}{\bar{g}}^{11} = \overset{\circ}{\bar{g}}^{33} = 1\,;\; \overset{\circ}{\bar{g}}^{22} = \frac{1}{\overset{\circ}{r}^2} \tag{16}$$

și, respectiv,

$$\bar{g}_{11} = \bar{g}_{33} = 1\,;\; \bar{g}_{22} = \frac{c^2 r^2}{c^2 - r^2\omega^2}\,;\quad \bar{g}^{11} = \bar{g}^{33} = 1\,;\; \bar{g}^{22} = \frac{c^2 - r^2\omega^2}{c^2 r^2}\,;$$

$$\bar{g}^{24} = \bar{g}^{42} = \frac{\omega}{c^2}\,,\quad \bar{g}^{44} = \frac{r^2\omega^2}{c^2(c^2 - r^2\omega^2)}\,. \tag{17}$$

Determinăm simbolurile lui Christoffel [3]

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g_{\beta\rho,\alpha} + g_{\rho\alpha,\beta} - g_{\alpha\beta,\rho})g^{\gamma\rho}, \tag{18}$$

cele nenule exprimîndu-se astfel

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}\,;\quad \Gamma^2_{14} = \Gamma^2_{41} = \frac{\omega}{r}\,;\quad \Gamma^1_{24} = \Gamma^1_{42} = -r\omega\,;$$

$$\Gamma^1_{22} = -r\,;\; \Gamma^1_{44} = -r\omega^2. \tag{19}$$

3. DEDUCEREA ECUAȚIEI DIFERENȚIALE A BILANȚULUI ENERGIEI ȘI IMPULSULUI

Deducerea ecuației diferențiale a bilanțului energiei și a impulsului pentru cilindrul elastic, circular, infinit în rotație uniformă o vom face în deplasări [4].

Plasăm cilindrul în repaus în reperul neinerțial introdus mai înainte, axa cilindrului coincizînd cu axa oz. Configurația la momentul $t = \overset{\circ}{t} = 0$ cînd reperul neinerțial coincide cu cel inerțial, o considerăm configurație de referință.

Presupunem că densitatea proprie ρ a masei gravitaţionale proprii a cilindrului este constantă.

Admitem, că deformaţia cilindrului, în fiecare punct, depinde numai de distanţa punctului pînă la axa de rotaţie şi constă numai în modificarea acestei distanţe. În consecinţă, ecuaţiile de mişcare

$$x^\alpha = x^\alpha(y^\beta) \tag{20}$$

ale rotaţiei cilindrului deformabil se scriu

$$r = r(\overset{\circ}{r}); \ \theta = \overset{\circ}{\theta} - \omega \overset{\circ}{t}; \ z = \overset{\circ}{z}; \ t = \overset{\circ}{t}; \ \overset{\circ}{r} \leqslant a, \tag{21}$$

unde a este raza cilindrului. Inversînd funcţiile (20), obţinem

$$y^\alpha = y^\alpha(x^\beta). \tag{22}$$

În cazul concret al rotaţiei cilindrului elastic, reprezentată de funcţiile (21), avem :

$$\overset{\circ}{r} = \overset{\circ}{r}(r); \ \overset{\circ}{\theta} = \theta + \omega t; \ \overset{\circ}{z} = z; \ \overset{\circ}{t} = t. \tag{23}$$

În relaţiile (16) componentele tensorului metric spaţial $\overset{\circ}{g}$ sînt determinate în sistemul de referinţă inerţial în funcţie de coordonatele $(\overset{\circ}{r}, \overset{\circ}{\theta}, \overset{\circ}{z}, \overset{\circ}{t})$. Ne propunem ca pe baza relaţiilor (23) să le exprimăm în funcţie de coordonatele (r, θ, z, t). Avem, în general, ţinînd seama de relaţiile (22),

$$\mathrm{d}\overset{\circ}{s}^2 = -\overset{\circ}{g}_{\alpha\beta}(y^\gamma)\,\mathrm{d}y^\alpha \mathrm{d}y^\beta = -\overset{\circ}{g}_{\alpha\beta}(y^\gamma(x^\delta)) y^\alpha_{,\rho} y^\beta_{,\sigma}\,\mathrm{d}x^\rho \mathrm{d}x^\sigma =$$

$$= -\overset{\circ}{g}_{\rho\sigma}(x^\gamma)\,\mathrm{d}x^\rho \mathrm{d}x^\sigma, \tag{24}$$

unde virgula indică derivata parţială, iar

$$\overset{\circ}{g}_{\rho\sigma}(x^\gamma) = \overset{\circ}{g}_{\alpha\beta}(y^\gamma(x^\delta))\, y^\alpha_{,\rho}\, y^\beta_{,\sigma}. \tag{25}$$

În cazul particular al relaţiilor (23) avem

$$y^\alpha_{,\beta} = \delta^\alpha_\beta \ (\alpha \neq 1, \ \beta \neq 1) \text{ şi } y^1_{,1} = \overset{\circ}{r}'(r), \tag{26}$$

unde δ^α_β este simbolul lui Kronecker. Prin urmare, componentele covariante nenule ale tensorului metric spaţial din reperul inerţial, exprimate în funcţie de coordonatele din reperul neinerţial, vor fi

$$\overset{\circ}{g}_{11} = \overset{\circ}{r}'^2(r); \ \overset{\circ}{g}_{22} = \overset{\circ}{r}^2(r); \ \overset{\circ}{g}_{33} = 1. \tag{27}$$

Scriem relaţia $(23)_1$ sub forma

$$\overset{\circ}{r}(r) = r - h(r); \ r - h(r) \leqslant a, \tag{28}$$

punînd în evidență deplasarea

$$h(r) = r - \overset{\circ}{r}(r). \tag{29}$$

Ținînd seama de egalitatea (28), expresiile (27) ale componentelor nenule ale tensorului metric spațial devin

$$\overset{\circ}{g}_{11} = (1 - h')^2; \quad \overset{\circ}{g}_{22} = (r - h)^2; \quad \overset{\circ}{g}_{33} = 1. \tag{30}$$

Definim componentele covariante $e_{\alpha\beta}$ ale tensorului de deformație relativist prin

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\bar{g}_{\alpha\beta} - \overset{\circ}{\bar{g}}_{\alpha\beta}), \tag{31}$$

unde $\bar{g}_{\alpha\beta}$ și $\overset{\circ}{\bar{g}}_{\alpha\beta}$ sînt date de relațiile $(17)_{1.2.3}$ și, respectiv (30). În consecință, componentele covariante nenule ale tensorului **e** vor fi

$$e_{11} = \frac{1}{2}[1 - (1 - h')^2], \quad e_{22} = \frac{1}{2}\left[\frac{c^2r^2}{c^2 - r^2\omega^2} - (r - h)^2\right]. \tag{32}$$

În cilindru apar tensiuni mecanice care depind de proprietățile elastice ale corpului. Admitem că această dependență este de tip Hooke și anume

$$X^\alpha_\beta = \frac{1}{2}\left[\lambda\, \overset{\circ}{\bar{g}}{}^{\alpha}_{\beta}\, \overset{\circ}{\bar{g}}{}^{\gamma\delta} + \mu(\overset{\circ}{\bar{g}}{}^{\alpha\gamma}\, \overset{\circ}{\bar{g}}{}^{\delta}_{\beta} + \overset{\circ}{\bar{g}}{}^{\alpha\delta}\, \overset{\circ}{\bar{g}}{}^{\gamma}_{\beta})\right] e_{\gamma\delta}, \tag{33}$$

unde X^α_β sînt componentele mixte ale tensiunilor mecanice, iar λ și μ constante materiale. Ținînd seama de relațiile (30), componentele $\overset{\circ}{\bar{g}}{}^{\alpha\beta}$ nenule vor fi

$$\overset{\circ}{\bar{g}}{}^{11} = \frac{1}{(1-h')^2}; \quad \overset{\circ}{\bar{g}}{}^{22} = \frac{1}{(r-h)^2}; \quad \overset{\circ}{\bar{g}}{}^{33} = 1. \tag{34}$$

Evident,

$$\overset{\circ}{\bar{g}}{}^{\alpha}_{\beta} = \delta^\alpha_\beta. \tag{35}$$

Avînd în vedere relațiile (32), (34) și (35) putem scrie componentele mixte nenule ale tensiunilor mecanice; din (33) găsim

$$\begin{aligned} X^1_1 &= \frac{\lambda+2\mu}{2}\left(\frac{1}{(1-h')^2} - 1\right) - \frac{\lambda}{2}\left(\frac{c^2r^2}{(r-h)^2(c^2-r^2\omega^2)} - 1\right), \\ X^2_2 &= \frac{\lambda+2\mu}{2}\left(\frac{c^2r^2}{(r-h)^2(c^2-r^2\omega^2)} - 1\right) - \frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{(1-h')^2} - 1\right), \\ X^3_3 &= \frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{(1-h')^2} - 1 + \frac{c^2r^2}{(r-h)^2(c^2-r^2\omega^2)} - 1\right). \end{aligned} \tag{36}$$

Prin definiţie, componentele covariante ale tensorului energie-impuls total vor fi

$$T_{\alpha\beta} = c^2 \rho u_\alpha u_\beta + X_{\alpha\beta}. \tag{37}$$

În cazul nostru componentele mixte T^α_β diferite de zero sînt :

$$T^1_1 = X^1_1;\ T^2_2 = X^2_2;\ T^3_3 = X^3_3;\ T^4_4 = -c^2\rho;\ T^4_2 = c^2\rho \frac{r^2\omega}{c^2 - r^2\omega^2}. \tag{38}$$

Egalînd cu zero divergenţa covariantă $T^\alpha_{\beta/\alpha}$ a tensorului **T**, găsim

$$T^\alpha_{1/\alpha} = T^1_{1,1} + \frac{1}{r}(T^1_1 - T^2_2) - \frac{\omega}{r} T^4_2 = 0. \tag{39}$$

Celelalte trei ecuaţii de bilanţ sînt identic satisfăcute.

Ţinînd seama de relaţiile (36) şi (38) ecuaţia de bilanţ al impulsului (39) devine

$$(1+\gamma)\frac{y''}{(1-y')^3} + \frac{x}{(x-y)(1-\alpha^2x^2)}\left(\frac{xy'}{(x-y)} + \frac{1}{1-\alpha^2x^2}\right) - \frac{x^2}{(x-y)^3(1-\alpha^2x^2)} + \tag{40}$$

$$+ \frac{\gamma}{2}\left(\frac{1}{x(1-y')^2} - \frac{x}{(x-y)^2(1-\alpha^2x^2)}\right) + \frac{\beta\alpha^2 x}{1-\alpha^2x^2} = 0, \quad 0 < x < 1,$$

unde

$$x = \frac{r}{a};\ y = \frac{h}{a};\ \gamma = 2\frac{\mu}{\lambda};\ \beta = \frac{c^2\rho}{\lambda} \text{ şi } \alpha = \frac{a\omega}{c}. \tag{41}$$

Din motive de simetrie rezultă că punctele de pe axa de rotaţie nu se deplasează, de unde deducem că

$$y(0) = 0. \tag{42}$$

Pe suprafaţa laterală a cilindrului tensiunea X^1_1 este nulă, ceea ce conduce la condiţia la limită

$$(1+\gamma)\left(1 - \frac{1}{[1-y'(1)]^2}\right) + 1 - \frac{1}{[1-y'(1)]^2(1-\alpha^2)} = 0. \tag{43}$$

Rezolvarea numerică a acestei probleme constituie obiectul celei de a doua părţi a lucrării.

Primită la redacţie la 10 octombrie 1984

BIBLIOGRAFIE

1. A. SURESH, *The elastic rotating cylinder*, Lett. Appl. Engng. Sci., **18**, 885–888 (1980).
2. ŞTEFAN GYÉRESI, *Cilindru circular, infinit, polarizabil, magnetizabil, încărcat electric, într-un cîmp gravitaţional*, St. cerc. mec. apl., **42**, *4*, 343–347 (1983).
3. ALDO BRESSAN, *Relativistic Theories of Materials*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1978.
4. ŞTEFAN GYÉRESI, *Asupra interacţiunii electromecanice în repere neinerţiale*, Teză de doctorat, 1982.

SINTEZA OPTIMALĂ A UNOR MECANISME PLANE UTILIZATE PENTRU TRANSMITEREA MIȘCĂRII LA SITELE OSCILANTE ALE MAȘINILOR DE SORTAT SEMINȚE

de GABRIELA NEAGU, F. POTERAȘU, D. VIERU
Institutul politehnic Iași

În lucrare se studiază legile optime de mișcare ale sitelor cu mișcări oscilatorii rectilinii din punctul de vedere al vitezei medii maxime de transport. Pe baza legii optime, determinată cu metoda momentelor din teoria controlului optimal al sistemelor diferențiale liniare, se determină unele mecanisme optime de antrenare: șeping, bielă-manivelă și patrulater compus.
Studiul a fost întreprins în scopul creșterii productivității procesului de sortare a semințelor pe site oscilante.

1. INTRODUCERE

Semințele rezultate în procesul de recoltare a unei culturi se prezintă ca un amestec format din semințele culturii de bază și din diferite impurități. După recoltare, semințele sînt supuse unui proces tehnologic de condiționare în care se includ două operații principale : curățirea, respectiv separarea semințelor culturii de bază de celelalte componente ale amestecului și sortarea semințelor curățate pe calități, după criterii dimensionale, de greutate, de formă etc.

Sitele sînt organele de lucru active ale mașinilor de condiționat semințe, care realizează separarea pe baza diferenței uneia dintre dimensiunile seminței față de a celorlalte componente din amestec.

După formă pot fi cilindrice, tronconice sau plane, ultimile fiind cel mai des folosite și pot fi confecționate din fibre sintetice, tablă de oțel sau tablă zincată.

Materialul supus procesului de curățire-separare se deplasează pe suprafața superioară a sitei. Fracțiunile cu dimensiuni mai mici decît cele ale orificiilor sitei se separă trecînd prin aceste orificii, în timp ce fracțiunile cu dimensiuni mai mari alunecă pe suprafața sitei și sînt evacuate pe la partea ei terminală. Procesul de curățire este influențat de dimensiunile orificiilor, de înclinația sitei și de regimul ei de mișcare.

În această lucrare se tratează problema mișcării particulei materiale pe plane cu frecare coulombiană în condițiile unei mișcări de transport impuse și anume o translație rectilinie în planul său după o lege care rezultă prin antrenarea cu un mecanism cu culisă oscilantă tip șeping cu un mecanism bielă-manivelă și cu un mecanism tip patrulater articulat, iar mișcarea relativă are loc în contact permanent cu planul transportor (fără salturi).

Cunoașterea mișcării relative a particulelor pe plane oscilante, caracterizate prin traiectorii relative și prin legi de variație a vitezelor și accelerațiilor relative constituie elementele de bază pentru o proiectare și construcție optimă a unor utilaje ca vibrotransportoare, separatoare, ciururi sau site. Din analiza acestor parametri se pot trage concluzii asupra valorilor optime ale amplitudinii și pulsației mișcării vibratorii a planului transportor astfel încît eficacitatea operației de vibrotransport să fie maximă în sensul procesului tehnologic urmărit.

St. cerc. mec. apl., tom 43, nr. 2, 1984, p. 147 – 166

Problema cea mai complexă, mai interesantă dar în același timp și mai dificil de soluționat este aceea care se referă la sinteza optimală a sistemelor alcătuite din mecanismul de antrenare, planul transportor și materialul de transportat. În acest sens cercetările au ca principal obiectiv mărirea eficienței sau productivității procesului de transport în funcție de parametrii tehnologici impuși.

După ce tehnologul a stabilit care este mișcarea relativă a materialului cea mai convenabilă procesului tehnologic analizat, urmează să fie studiate și adoptate variantele de antrenare a planului transportor care să ducă la obținerea mișcării relative dorite a materialului pe planul transportor.

Rezolvarea problemelor de optimizare ale proceselor de transport pe planuri oscilante trebuie să țină seama de delimitările care se referă la următorii parametri mai importanți: viteză, deplasare, amplitudine de oscilație.

După stabilirea caracterului delimitărilor și a schemei de mișcare a planului transportor, trebuie să se rezolve cea mai complexă problemă și anume evidențierea acelei combinații dintre parametri care să asigure la delimitările date valoarea maximă a unei funcționale determinate, de exemplu maximul vitezei medii de transport a sitei. Se pot cita în acest sens lucrările lui Blehman și Lavendel, dar niciuna dintre aceste lucrări nu a reușit să formuleze și să demonstreze matematic că o combinație sau alta dintre parametri este aceea care satisface valoarea maximă absolută a funcționalei complexe analizate pentru cazul general al mișcărilor de vibrotransport.

În lucrare se încearcă să se extindă aspectele teoretice în studiul mișcării relative a particulelor materiale fără salturi pe planuri oscilante aspre în cazul mecanismelor de antrenare bielă-manivelă, a mecanismului cu culisă oscilantă tip șeping și mecanismului tip patrulater articulat.

Conform cu criteriul de optimizare enunțat anterior și anume maximul vitezei medii de transport a planului oscilant, ne propunem să determinăm legea optimală de mișcare a planelor oscilante precum și dimensiunile optime ale mecanismelor de antrenare.

2. LEGEA OPTIMĂ DE MIȘCARE

Se consideră o placă oscilantă ghidată rectiliniu și antrenată de un mecanism oarecare (fig. 1).

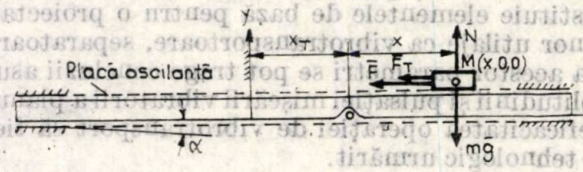


Fig. 1

Ecuația mișcării relative a unei particule de masă m pe planul transportor este :

$$m\bar{a}_r = m\bar{g} + \bar{N} + \bar{T} + \bar{F}_T + \bar{F}_c. \tag{1}$$

În cazul analizat, $\bar{F}_c$ (forța inerțială Coriolis) este nulă, iar $\bar{F}_T$ (forța inerțială de transport) are expresia :

$$\bar{F}_T = -m\bar{a}_T = -m\ddot{x}_T\bar{i}. \tag{2}$$

Înlocuind (1) în (2) și proiectînd această ecuație pe axele reperului mobil xoy, solidar legat de placă, se obține

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -mg \sin\alpha - \mu N \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} - m\ddot{x}_T, \\ m\ddot{y} &= -mg\cos\alpha + N, \end{aligned} \tag{3}$$

pentru $\dot{y} = 0$ și $\ddot{y} = 0$ se obține $N = mg\cos\alpha \geqslant 0$, condiția necesară și suficientă ca deplasarea particulei pe planul transportor să se efectueze fără salturi. Cu această condiție ecuația diferențială scalară a mișcării relative poate fi pusă sub forma :

$$\begin{aligned} &\ddot{x} = -g\sin\alpha - s\,\mu g\cos\alpha - \ddot{x}_T \\ \text{sau} \quad &\ddot{x} + \ddot{x}_T = -g\sin\alpha - s\,\mu g\cos\alpha, \end{aligned} \tag{4}$$

unde

$$s = \operatorname{sign}\dot{x} = \begin{cases} -1, & \dot{x} < 0, \\ 0, & \dot{x} = 0, \\ 1, & \dot{x} > 0. \end{cases} \tag{5}$$

Legea optimală de mișcare se determină cu metoda momentelor. Se alege

$$\frac{F(t)}{m} = u(t) = s\,\mu g\cos\alpha = \begin{cases} \mu g\cos\alpha \text{ pentru } \dot{x}(t) > 0, \\ -\mu g\cos\alpha \text{ pentru } \dot{x}(t) < 0, \\ 0 \qquad \text{pentru } \dot{x}(t) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Se introduc mărimile adimensionale

$$x^*(t) = \frac{x(t)}{v_m T}, \quad x_T^*(t) = \frac{x_T(t)}{v_m T}, \quad u^*(t) = \frac{u(t)T}{v_m}. \tag{7}$$

Înlocuind (7) în (4) rezultă

$$\ddot{x}^*(t) + \ddot{x}_T^*(t) = -\frac{g\sin\alpha}{v_m T} - \frac{1}{T^2}u^*(t), \tag{8}$$

v_m fiind viteza medie de deplasare a particulei pe placa oscilantă; T — perioada mișcării.

Din (6) și (7) rezultă

$$|u^*(t)| = \frac{T\,\mu g \cos\alpha,}{|v_m|}, \tag{9}$$

de unde

$$\max|v_m| = \frac{T\,\mu g\cos\alpha}{\min|u^*(t)|} \tag{10}$$

Viteza medie de transport va fi maximală atunci cînd max $|u^*(t)|$ este minim.

Se consideră următoarele condiții inițiale:

$$\begin{gathered} x^*(0) = 0,\ x^*(T) = 1,\ \dot{x}^*(0) = 0,\ \dot{x}^*(T) = 0, \\ x_T^*(0) = 0,\ x_T^*(T) = 0,\ \dot{x}^*(0) = \dot{x}_{T^0}^*,\ \dot{x}_T^*(T) = \dot{x}_{T^0}^* \end{gathered} \tag{11}$$

Se utilizează metoda momentelor în modul următor:

— se integrează relația (8) și folosind (11), se obține

$$\int_0^T u^*(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{T^2 g\sin\alpha}{v_m}, \tag{12}$$

— a doua expresie a metodei momentelor se obține din relațiile

$$\int_0^T \dot{x}^*(t)\,\mathrm{d}t = t\dot{x}^*(t)\Big|_0^T - \int_0^T t\ddot{x}^*(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^T t\left[\ddot{x}_T^*(t) + \frac{g\sin\alpha}{v_m T} + \frac{1}{T^2}u^*(t)\right]\mathrm{d}t =$$

$$= t\dot{x}_T^*(t)\Big|_0^T - \int_0^T \dot{x}_T^*(t)\,\mathrm{d}t + \frac{Tg\sin\alpha}{2v_m} + \frac{1}{T^2}\int_0^T t\,u^*(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= T\dot{x}_{T^0}^* + \frac{Tg\sin\alpha}{2\,v_m} + \frac{1}{T^2}\int_0^T t\,u^*(t)\,\mathrm{d}t, \tag{13}$$

$$\int_0^T \dot{x}(t)\,\mathrm{d}t = x^*(t) - x^*(0) = 1. \tag{14}$$

Din (13) și (14) se obține:

$$\int_0^T tu^*(t)\,dt = T^2(1 - t\dot{x}^*_{T^0}) - \frac{Tg\sin\alpha}{2v_m}. \tag{15}$$

Se cunoaște faptul că funcția $u(t)$ care satisface egalitățile $\int_0^T \psi_i(t)u(t)\,dt = S_i$ $(i = 1, 2 \ldots n)$, unde $\psi_i(t)$ sînt funcții date, S_i constante date (momentele funcției $u(t)$) astfel încît $\max |u(t)| = A$ să fie minim, este dată de:

$$u(t) = A \operatorname{sign} \sum_{i=1}^{n} b_i \psi_i(t).$$

Folosind rezultatul de mai sus și relațiile (12) și (15), funcția de reglaj optimă este:

$$u^*(t) = \frac{T\mu g\cos\alpha}{v_m} \operatorname{sign}\ (b_1 + b_2 t) = \frac{T\mu g\cos\alpha}{v_m} \operatorname{sign}\ b_2(t - t^0),\quad t^0 = -\frac{b_1}{b_2} \tag{16}$$

Fie $t_1 \in [0, T]$ astfel încît $\dot{x}(t) > 0$, $t \in [0, t_1]$ și $\dot{x}(t) \leqslant 0$, $t \in (t_1, T]$
Se va alege cazul $\dot{x}(t) = 0$, $t \in (t_1, T]$.
Din (12) și (16) rezultă:

$$\int_0^T u^*(t)\,dt = \int_0^{t_1} \frac{T\mu g\cos\alpha}{v_m}\,dt - \int_{t_1}^T \frac{T\mu g\cos\alpha}{v_m}\,dt = -\frac{T^2 g\sin\alpha}{v_m}$$

și de aici se obține:

$$t_1 = \frac{\mu - \operatorname{tg}\alpha}{2\mu} T = a^0 T \qquad \left(a^0 = \frac{\mu - \operatorname{tg}\alpha}{2\mu}\right). \tag{17}$$

Folosind (15) și (16) se obține:

$$T^3 \dot{x}^*_{T^0} = T^2 - \frac{T^3 g\sin\alpha}{2v_m} - \int_0^T tu^*(t)\,dt =$$

$$= T^2 - \frac{T^3 g\sin\alpha}{2v_m} - \int_0^{t_1} t\frac{T\mu g\cos\alpha}{v_m}\,dt + \int_{t_1}^T t\frac{T\mu g\cos\alpha}{v_m}\,dt =$$

$$= T^2\left[1 - \frac{Tg\sin\alpha}{2v_m} - \frac{T\mu g\cos\alpha}{2v_m} a^{02}\right].$$

Rezultă

$$T\dot{x}^*_{T_0} = 1 - \frac{Tg\sin\alpha}{2v_m} - \frac{T\mu g\cos\alpha}{2v_m}\, a^{02},$$

de unde se obține expresia vitezei medii

$$v_m = \frac{Tg\,(\sin\alpha + a^{02}\,\mu\cos\alpha)}{2(1 - T\dot{x}^*_0)}. \tag{18}$$

3. DETERMINAREA LEGII OPTIMALE DE MIȘCARE A PLANULUI OSCILANT ÎN CAZUL CÎND ACCELERAȚIA ACESTUIA ESTE MĂRGINITĂ

$$\text{Presupunem că } \ddot{x}^*_T(t) \leqslant \frac{k}{v_m T}, \qquad k > 0. \tag{19}$$

Deoarece trebuie minimizată funcția $\ddot{x}^*_T(t)$, se aplică metoda momentelor. Se calculează momentele relativ la $\ddot{x}^*_T(t)$ și se obține:

$$\int_0^T \ddot{x}^*_T(t)\,\mathrm{d}t = 0, \tag{20}$$

$$\int_0^T t\,\ddot{x}^*_T(t)\,\mathrm{d}t = t\,\dot{x}^*_T(t)\Big|_0^T - \int_0^T \dot{x}^*_T(t)\,\mathrm{d}t = T\dot{x}^*_{T_0} \tag{21}$$

Conform teoremei momentelor se poate scrie:

$$\ddot{x}^*_T(t) = \frac{k}{v_m T}\,\mathrm{sign}\,(d_1 + d_2 t) = \frac{k}{v_m t}\,\mathrm{sign}\,d_2\,(t - t^0), \quad t^0 = -\frac{d_1}{d_2}. \tag{22}$$

Se consideră că pentru $t \in [0,\ t_1]$ are loc prima etapă a alunecării, $\dot{x}(t) > 0$. Se obține:

$$\ddot{x}^*_T(t) = \begin{cases} -\dfrac{k}{v_m T}, & 0 \leqslant t < t^0, \\ 0, & t = t^0, \\ \dfrac{k}{v_m T}, & t^0 < t \leqslant t_1. \end{cases} \tag{23}$$

În intervalul de timp $(t_1,\ T]$ viteza corpului $\dot{x}(t) \leqslant 0$, deci are loc etapa alunecării inverse. Alegem cazul limită, $\dot{x}(t) = 0$.

Din (8) se obține :

$$\ddot{x}_T^*(t) = -\frac{g\sin\alpha}{v_m T} - \frac{1}{T^2}\, u^*(t), \qquad t \in (t_1,\ T). \tag{24}$$

Ținînd seama de (6) și (7), rezultă

$$\ddot{x}_T^*(t) = -\frac{g\sin\alpha}{v_m T}, \qquad t \in (t_1,\ T]. \tag{25}$$

Folosind (20), (23), (25), rezultă

$$-\int_0^{t^0} \frac{k}{v_m T}\,dt + \int_{t^0}^{t_1} \frac{k}{v_m T}\,dt - \int_{t_1}^{T} \frac{g\sin\alpha}{v_m T} = 0 \qquad \text{și de aici}$$

$$t^0 = \left[\frac{a^0}{2} + \frac{g(a^0-1)\sin\alpha}{2k}\right] T = b^0 t, \qquad b^0 = \frac{a^0}{2} + \frac{g(a^0-1)\sin\alpha}{2k}. \tag{26}$$

Din (21), (23) și (24) se obține :

$$-\frac{k}{v_m T}\int_0^{t^0} t\,dt + \frac{k}{v_m T}\int_{t^0}^{t_1} t\,dt - \frac{g\sin\alpha}{v_m T}\int_{t_1}^{T} t\,dt = T\dot{x}_{T^0}^* \qquad \text{de unde}$$

$$v_m = \frac{k(a^{02}-2b^{02}) + g\,(a^{02}-1)\sin\alpha}{2\dot{x}^*_{T^0}} = v^0. \tag{27}$$

Folosind acum relațiile (18) și (27) rezultă :

$$T = \frac{2v^0}{2v^0\dot{x}^*_{T^0} + g\ (\sin\alpha + a^{02}\,\mu\cos\alpha)} = T^0. \tag{28}$$

S-a găsit deci

$$\ddot{x}_T^*(t) = \begin{cases} -\dfrac{k}{v^0 T^0}, & t \in [0,\ t^0]), \\ 0\ , & t = t^0, \\ \dfrac{k}{v^0 T^0}. & t \in (t^0,\ t_1), \\ -\dfrac{g\sin\alpha}{v^0 T^0}, & t \in (t_1,\ T^0]. \end{cases} \tag{29}$$

Graficul funcției (29) este prezentat în figura 2.

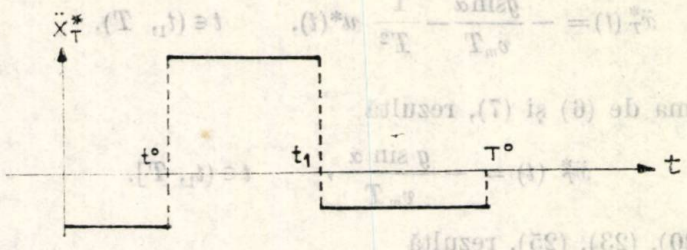


Fig. 2

Din (29) prin integrare se obține :

$$\dot{x}^*_T(t) = \begin{cases} -\dfrac{k}{v^0 T^0}\, t + \dot{x}^*_{T^0} \;, & t \in [0, t^0], \\ \dfrac{k}{v^0 T^0}\, t(t - 2t^0) + \dot{x}^*_{T^0} \;, & t \in [t^0, t_1], \\ \dfrac{1}{v^0 T^0}\, [-gt\sin\alpha - 2kt^0 + (k + g\sin\alpha)\, t_1] + \dot{x}^*_{T^0} \;, & t \in [t_1, T^0). \end{cases} \tag{30}$$

Integrînd (30), se obține legea optimală de mișcare :

$$x^*_T(t) = \begin{cases} -\dfrac{k}{2v^0 T^0} t^2 + \dot{x}^*_{T^0}\, t, & t \in [0, t^0], \\ \dfrac{k}{2v^0 T^0}\, t^2 - \left(2\dfrac{kt^0}{v^0 T^0} - \dot{x}^*_{T^0}\right) t + \dfrac{k}{v^0 T^0}\, t^{02}, & t \in [t^0, t_1], \\ -\dfrac{g\sin\alpha}{2v^0 T^0}\, t^2 - \left(\dfrac{2kt^0}{v^0 T^0} - \dfrac{k + g\sin\alpha}{v^0 T^0}\, t_1 - \dot{x}^*_{T^0}\right) t + \\ \qquad + \dfrac{1}{v^0 T^0}\left(kt^{02} - \dfrac{k + g\sin\alpha}{2}\, t_1^2\right), & t \in [t_1, T^0]. \end{cases} \tag{31}$$

Pentru legea de variație (29) se propune o funcție armonică de tipul :

$$\ddot{x}_T(\tau) = C_1 \sin 2\pi\tau + C_2 \cos 2\pi\tau + D_1 \sin 4\pi\tau + D_2 \cos 4\pi\tau,$$

$$\tau = \frac{t}{T}. \tag{32}$$

Variaţia optimă va fi în acest caz :

$$\ddot{x}_T(\tau) = \begin{cases} -k, & 0 \leqslant \tau < \tau^0 = \dfrac{t^0}{T^0}, \\ 0, & \tau = \tau^0, \\ k, & \tau^0 < \tau \leqslant \tau_1 = \dfrac{t_1}{T^0}, \\ -g \sin \alpha, & \tau_1 < \tau \leqslant 1. \end{cases} \tag{33}$$

Se estimează eroarea medie pătratică astfel :

$$\Phi = \int_0^1 [\ddot{x}_{Tr}(\tau) - \ddot{x}_{Tc}(\tau)]^2 \mathrm{d}\tau,$$

$\ddot{x}_{Tr}(\tau)$ — acceleraţia reală dată de (33);

$\ddot{x}_{Tc}(\tau)$ — acceleraţia calculată dată de (32).

Deoarece $\tau^0 = \dfrac{t^0}{T^0} = \dfrac{b^0 T^0}{T^0} = b^0$, $\tau_1 = \dfrac{t_1}{T^0} = a^0$, rezultă

$$\Phi = \int_0^{b_0} [-k - \ddot{x}_{Tc}(\tau)]^2 \mathrm{d}\tau + \int_{b^0}^{a^0} [k - \ddot{x}_{Tc}(\tau)]^2 \, \mathrm{d}\tau + \int_{a^0}^1 [-g \sin \alpha - \ddot{x}_{Tc}(\tau)]^2 \mathrm{d}\tau =$$

$$= k^2 a^0 + g^2 \sin^2 \alpha \, (1 - a^0) + 2k \int_0^{b_0} \ddot{x}_{Tc}(\tau) \mathrm{d}\tau - 2k \int_{b^0}^{a^0} \ddot{x}_{Tc}(\tau) \, \mathrm{d}\tau +$$

$$+ 2g \sin \alpha \int_{a^0}^1 \ddot{x}_{Tc}(\tau) \, \mathrm{d}\tau + \int_0^1 \ddot{x}_{Tc}^2(\tau) \, \mathrm{d}\tau.$$

Folosind (32), se obţine :

$$\Phi = \alpha_0 + \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \alpha_3 D_1 + \alpha_4 D_2 + \frac{1}{2}(C_1^2 + C_2^2 + D_1^2 + D_2^2),$$

unde $\alpha_0 = a^0k^2 + g^2(1 - a^0)\sin^2\alpha$,

$$\alpha_1 = \frac{1}{\pi}[k(1+\cos 2\pi a^0 - 2\cos 2\pi b^0) + g\sin\alpha(\cos 2\pi a^0 - 1)],$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\pi}[k(2\sin 2\pi b^0 - \sin 2\pi a^0) - g\sin\alpha - \sin 2\pi a^0],$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2\pi}[k(1+\cos 4\pi a^0 - 2\cos 4\pi b^0) + g\sin\alpha(\cos 4\pi a^0 - 1)], \tag{34}$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{2\pi}[k(2\sin 4\pi b^0 - \sin 4\pi a^0) - g\sin\alpha\sin 4\pi a^0].$$

Deoarece funcția Φ trebuie să fie minimă, este necesar să fie satisfăcute condițiile:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial C_1} = 0;\ \frac{\partial\Phi}{\partial C_2} = 0;\ \frac{\partial\Phi}{\partial D_1} = 0;\ \frac{\partial\Phi}{\partial D_2} = 0, \tag{35}$$

rezultă $C_1 = \alpha_1;\ C_2 = -\alpha_2;\ D_1 = -\alpha_3;\ D_2 = -\alpha_4.$ (36)

Folosind (36) se obține următoarea formă pentru $\ddot{x}_T(\tau)$:

$$\ddot{x}_T(\tau) = -(\alpha_1\sin 2\pi\tau + \alpha_2\cos 2\pi\tau + \alpha_3\sin 4\pi\tau + \alpha_4\cos 4\pi\tau), \tag{37}$$

cu $\alpha_i = 1, 2, 3, 4$ dați de (34), de unde se pot obține cu ușurință funcțiile $\dot{x}_T(\tau)$ și $x_T(\tau)$, $\tau \in [0,1]$.

4. SINTEZA OPTIMALĂ A MECANISMULUI CU CULISĂ OSCILANTĂ TIP ȘEPING

Se consideră placa transportoare antrenată de un mecanism șeping. Placa și ghidajul ei pot fi montate în poziție orizontală sau înclinată cu unghiul α față de orizontală, prin rotirea cadrului ghidajului $E-E$ în jurul articulației O și blocarea lui în poziția dorită (fig. 3).

Mecanismul de antrenare a plăcii oscilante constă dintr-un motor cu turația de regim n rot/min, care pune manivela BC în mișcare de rotație uniformă, unghiul descris în timp fiind $\varphi = \omega t = \frac{\pi n}{30} t$.

Butonul manivelei este articulat de piatra de culisă C care poate aluneca în ghidajele culisei K articulară în A. La o rotație a manivelei BC, capătul D al culisei descrie arcul D_1D_2 de rază c, în ambele sensuri.

Viteza și accelerația unghiulară a culisei oscilante AD în funcție de unghiul φ și dimensiunile mecanismului se obțin cu ajutorul relației:

$$b\sin\psi = r\sin(\varphi - \psi), \tag{38}$$

din care rezultă succesiv :

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{r \sin \varphi}{b + \cos \varphi}, \tag{39}$$

$$\dot{\psi} = \omega_r \frac{b \cos \varphi + r}{b^2 + r^2 + 2rb \cos \varphi} = \omega_K, \tag{40}$$

$$\ddot{\psi} = r\omega \left[- \frac{b\omega \sin \varphi \cos^2 \psi + \dot{\psi} \sin 2\psi (b \cos \varphi + r)}{(b + r \cos \varphi)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2r\omega \sin \varphi \cos^2 \psi (b \cos \varphi + r)}{(b + r \cos \varphi)^3} \right] = \varepsilon_K \tag{41}$$

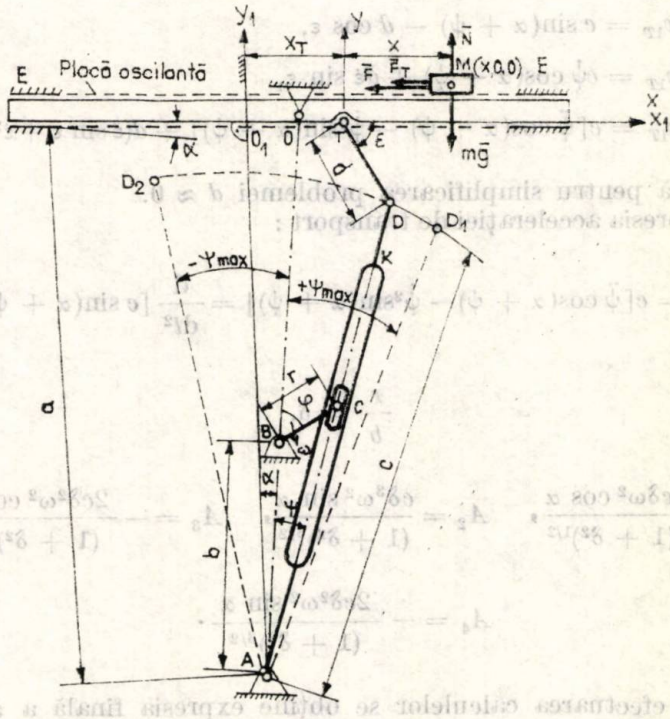


Fig. 3

Mișcarea de rotație oscilantă a bielei K este transformată într-o mișcare rectilinie alternativă a plăcii oscilante prin intermediul bieletei DT de lungime d care închide cu placa un unghi ε variabil în timp.

Se pot scrie relațiile :

$$a = d \sin \varepsilon + c \cos(\alpha + \psi), \tag{42}$$

$$\sin \varepsilon = \frac{a - c\cos(\alpha + \psi)}{d}, \tag{43}$$

$$\varepsilon = \operatorname{arctg} \frac{\sin \varepsilon}{1 - \sin^2 \varepsilon}, \tag{44}$$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{c\dot{\psi}\sin(\alpha + \psi)}{d\cos \varepsilon}, \tag{45}$$

$$\ddot{\varepsilon} = \frac{c[\ddot{\psi}\sin(\alpha + \psi) + \dot{\psi}^2\cos(\alpha + \psi)] + d\dot{\varepsilon}^2 \sin \varepsilon}{d\cos \varepsilon}. \tag{46}$$

Adoptînd sistemul de referință fix $o_1x_1y_1$ și sistemul de referință mobil oxy legat de placă, pot fi scrise legile mișcării de transport.

$$x_{1T} = c\sin(\alpha + \psi) - d\cos \varepsilon, \tag{47}$$

$$\dot{x}_{1T} = c\dot{\psi}\cos(\alpha + \psi) + d\dot{\varepsilon}\sin \varepsilon, \tag{48}$$

$$\ddot{x}_{1T} = c[\ddot{\psi}\cos(\alpha + \psi) - \dot{\psi}^2\sin(\alpha + \psi)] + d(\ddot{\varepsilon}\sin \varepsilon + \dot{\varepsilon}^2\cos \varepsilon). \tag{49}$$

Se consideră pentru simplificarea problemei $d \approx 0$.
Rezultă expresia acceleraţiei de transport :

$$a_T = \ddot{x}_T(t) = c[\ddot{\psi}\cos(\alpha + \psi) - \dot{\psi}^2\sin(\alpha + \psi)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^2}[c\sin(\alpha + \psi)]. \tag{50}$$

Se notează

$$\frac{r}{b} = \delta, \tag{51}$$

$$A_1 = \frac{c\delta\omega^2\cos \alpha}{(1 + \delta^2)^{1/2}}, \quad A_2 = \frac{c\delta^3\omega^2\sin \alpha}{(1 + \delta^2)^{3/2}}, \quad A_3 = -\frac{2c\delta^2\omega^2\cos \alpha}{(1 + \delta^2)^{3/2}},$$

$$A_4 = -\frac{2c\delta^2\omega^2\sin \alpha}{(1 + \delta^2)^{3/2}}. \tag{52}$$

După efectuarea calculelor se obține expresia finală a acceleraţiei de transport :

$$a_T = \ddot{x}_T(t) = -(A_1\sin \omega t + A_2\cos \omega t + A_3\sin 2\omega t + A_4\cos 2\omega t). \tag{53}$$

Expresia $\ddot{x}_T(t)$ din (53) cu

$$\tau = \frac{t}{T^0} \tag{54}$$

se mai poate pune sub forma

$$\ddot{x}_T(\tau) = -[\sqrt{A_1^2 + A_2^2}\sin(2\pi\tau + \varphi_1) + \sqrt{A_3^2 + A_4^2}\sin(4\pi\tau + \varphi_2)], \quad (55)$$

care rezultă din compunerea oscilațiilor armonice cu aceeași pulsație. În (55)

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{A_1}{A_2}, \qquad \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{A_3}{A_4}, \qquad \tau = \frac{t}{T^0}. \quad (56)$$

Din (37) legea optimală a accelerației $\ddot{x}_T(\tau)$ are forma :

$$\ddot{x}_T(\tau) = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}\sin(2\pi\tau + \varphi_3) + \sqrt{\alpha_3^2 + \alpha_4^2}\sin(4\pi\tau + \varphi_4)], \quad (57)$$

$$\operatorname{tg}\varphi_3 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \qquad \operatorname{tg}\alpha_4 = \frac{\alpha_3}{\alpha_4} \quad (58)$$

ce rezultă printr-o compunere de oscilații analogă cu (55).

Se egalează amplitudinile oscilațiilor armonice de aceeași pulsație ale ecuațiilor (55) și (57), adică se realizează mișcări optimale ale particulelor antrenate cu un mecanism tip șeping. Astfel, valorile maxime ale accelerației de pe placa antrenată de șeping sînt egale cu cele ale legii optimale care dă viteza medie maximă, adică o productivitate maximă a procesului de separare din acest punct de vedere. Rezultă următorul sistem de ecuații algebric :

$$\begin{aligned} A_1^2 + A_2^2 &= \alpha_1^2 + \alpha_2^2, \\ A_3^2 + A_4^2 &= \alpha_3^2 + \alpha_4^2. \end{aligned} \quad (59)$$

Înlocuind în (59) coeficienții A_1, A_2, A_3, A_4 cu valorile lor determinate din (52), rezultă :

$$\begin{aligned} \frac{4c^2\delta^4\omega^4\cos^2\alpha}{(1+\delta^2)^3} + \frac{4c^2\delta^4\omega^4\sin^2\alpha}{(1+\delta^2)^3} &= \alpha_3^2 + \alpha_4^2, \\ \frac{c^2\delta^2\omega^4\cos^2\alpha}{(1+\delta)^2} + \frac{c^2\delta^6\omega^4\sin^2\alpha}{(1+\delta^2)^3} &= \alpha_1^2 + \alpha_2^2. \end{aligned} \quad (60)$$

În final rezultă soluțiile sistemului (60)

$$\begin{aligned} \delta^2 &= -\cos^2\alpha + \sqrt{4\frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{\alpha_3^2 + \alpha_4^2} - \frac{1}{4}\sin^2 2\alpha}, \\ C &= \frac{(1+\delta)^{3/2}}{2\delta^2\omega^2}\sqrt{\alpha_3^2 + \alpha_4^2}. \end{aligned} \quad (61)$$

Efectuînd calculele în (61) pe baza unui program pe calculator s-au obținut mai multe mecanisme cu dimensiuni optime din care se pot exemplifica cele date în tabelul de mai jos.

Nr. crt.	α	μ	$\omega_{rad/s}$	$C_{(m)}$	$\delta = \frac{r}{b}$
1	3	0,36	5,704	0,94	0,797
2	3	0,20	6,960	0,54	0,660
3	3	0,08	8,680	0,47	0,330
4	5	0,36	4,630	1,19	0,693
5	5	0,20	6,270	0,91	0,500
6	7	0,36	6,100	0,75	0,614
7	9	0,36	6,000	0,85	0,560

$\mu = 0{,}36$ oțel-grîu; $\mu = 0{,}20$ oțel-mei; $\mu = 0{,}08$ oțel-mazăre

5. SINTEZA OPTIMALĂ A MECANISMULUI BIELĂ-MANIVELĂ

Se consideră un mecanism bielă-manivelă utilizat la mașinile de sortat semințe (fig. 4)

Notînd $\lambda = \frac{r}{l}$, rezultă (62)

$$x_T = x_C = r\cos\varphi + l - \frac{\lambda^2 l}{2}\sin^2\varphi, \tag{63}$$

$$\ddot{x}_T = -\ddot{x}_C = -\left|\ddot{\varphi}\left(r\sin\varphi + \frac{l\lambda^2}{2}\sin 2\varphi\right) + \dot{\varphi}^2(r\cos\varphi + l\lambda^2\cos 2\varphi)\right|. \tag{64}$$

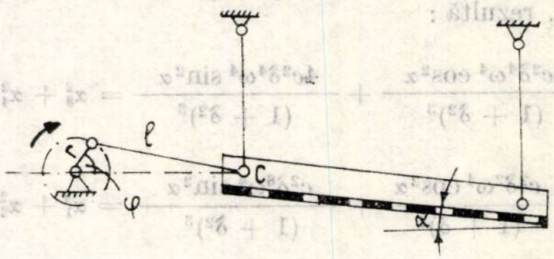


Fig. 4

În ipoteza unei rotații uniforme a manivelei, $\varepsilon = \ddot{\varphi} = 0$ și $\omega = \dot{\varphi}$. Rezultă

$$-\ddot{x}_T = \omega^2(r\cos\varphi + l\lambda^2\cos 2\varphi). \tag{65}$$

Se consideră pentru ω valoarea optimă $\omega = \frac{2\pi}{T^0}$, $\tau = \frac{t}{T^0}$ și rezultă $\varphi = 2\pi\tau$.

Rezultă pentru acceleraţia de transport

$$\ddot{x}_T(\tau) = -[\omega^2(r\cos 2\pi\tau + l\lambda^2\cos 4\pi\tau). \tag{66}$$

Din echivalarea amplitudinilor oscilaţiilor armonice date de (66) şi (57) se obţine sistemul de ecuaţii algebric :

$$\omega^2 r = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}; \qquad \omega^2 l\lambda^2 = \sqrt{\alpha_3^2 + \alpha_4^2}, \tag{67}$$

avînd soluţiile :

$$r = \frac{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}{\omega^2}, \qquad \lambda = \frac{\sqrt{\alpha_3^2 + \alpha_4^2}}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}. \tag{68}$$

În baza unui program pe calculator rezultă următorul mecanism optim : $r = 0{,}039$ m ; $\lambda = \frac{r}{l} = 0{,}496$; $l \approx 0{,}1$ m, în condiţiile $\mu = 0{,}36$, $\alpha = 3^0$, $\omega = 4{,}65$ rad/s.

6. SUBOPTIMIZAREA MECANISMULUI TIP PATRULATER COMPUS

Se consideră mecanismul patrulater compus din figura 5.

Ecuaţiile de mişcare ale unui punct aflat pe biela BD a acestui

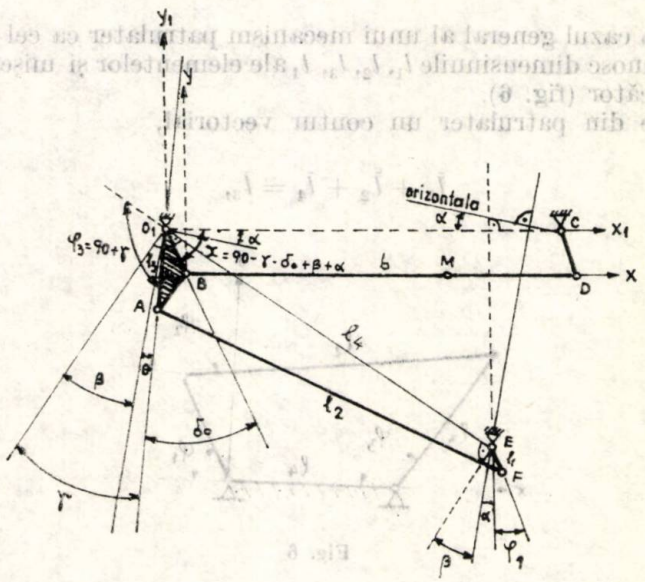


Fig. 5

mecanism în care s-au considerat egale barele OB şi CD sînt :

$$\begin{aligned} x_{1M} &= x_{1Q} + b = h\cos\chi + b = h\sin(\gamma + \delta_0 - \beta - \alpha) + b, \\ y_{1M} &= y_{1Q} = h\sin\chi = h\cos(\gamma + \delta_0 - \beta - \alpha). \end{aligned} \tag{69}$$

Se consideră numai mișcările de translație oscilatorii pe direcția axei $x-x$, cele de pe axa y-y neglijindu-se pentru a nu avea în vedere salturile particulelor.

Accelerația aceluiași punct pe direcția x este următoarea :

$$\ddot{x}_M = h[\ddot{\gamma}\cos(\gamma+\delta_0-\beta-\alpha)-\dot{\gamma}^2\sin(\gamma+\delta_0-\beta-\alpha)]. \tag{70}$$

Notînd $\psi_0 = \delta_0 - \beta - \alpha$, rezultă

$$\ddot{x}_M = h[\ddot{\gamma}\cos(\gamma+\psi_0)-\dot{\gamma}^2\sin(\gamma+\psi_0)]. \tag{71}$$

Accelerația optimă a unui punct al planului oscilant, determinată anterior este următoarea :

$$\ddot{x}_T(\tau) = -[\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\cos(2\pi\tau+\varphi_3)+\sqrt{\alpha_3^2+\alpha_4^2}\sin(4\pi\tau+\varphi_4)]. \tag{72}$$

În ipoteza că nu se ține cont de faptul că cele două mișcări oscilatorii (71) și (72) au aceeași perioadă și că interesează numai cazul în care amplitudinea mișcării particulei să fie cel mult egală cu cea optimă, rezultă :

$$h\ddot{\gamma} = \sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}, \quad h\dot{\gamma}^2 = \sqrt{\alpha_3^2+\alpha_4^2}. \tag{73}$$

Se reia cazul general al unui mecanism patrulater ca cel din figura 5 la care se cunosc dimensiunile l_1, l_2, l_3, l_4 ale elementelor și mișcarea elementului conducător (fig. 6).

Formîndu-se din patrulater un contur vectorial,

$$\bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \bar{l}_4 = \bar{l}_3, \tag{74}$$

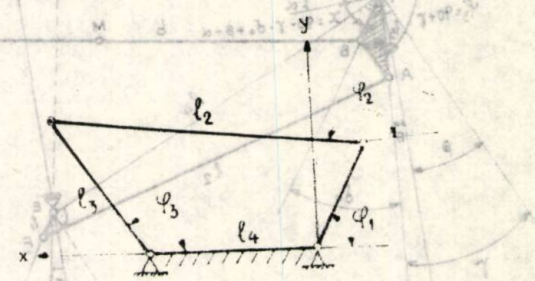


Fig. 6

și proiectînd acest contur pe axele de coordonate, se obține

$$\begin{aligned} l_4 + l_1\cos\varphi_1 + l_2\cos\varphi_2 &= l_3\cos\varphi_3, \\ l_1\sin\varphi_1 + l_2\sin\varphi_2 &= l_3\sin\varphi_3. \end{aligned} \tag{75}$$

Din rezolvarea acestui sistem rezultă

$$\varphi_2 = \arccos \frac{-c \pm \sqrt{c^2 + (1+d^2)(c^2-d^2)}}{1+d^2}, \tag{76}$$

şi

$$\varphi_3 = \operatorname{arctg} \frac{\sin\varphi_1 \pm A\sqrt{\frac{A^2+\sin^2\varphi_1}{B^2}-1}}{A \pm \sin\varphi_1\sqrt{\frac{A^2+\sin^2\varphi_1}{B^2}-1}}, \tag{77}$$

unde

$$l_4 + l_1\cos\varphi_1 = a, \quad l_1\sin\varphi_1 = b, \quad d = \frac{b}{a}, \quad c = \frac{a^2+b^2-l_1^2-l_3^2}{2al_2}, \tag{78}$$

$$A = \frac{l_4 + l_1\cos\varphi_1}{l_1} = \frac{a}{l_1}, \tag{79}$$

$$B = \frac{l_1}{2l_2}\left(1 + \frac{l_4^2}{l_1^2} + \frac{l_3^2}{l_1^2} - \frac{l_2^2}{l_1^2} + 2\frac{l_4}{l_1}\cos\varphi_1\right). \tag{80}$$

Vitezele unghiulare se obţin derivînd în raport cu timpul ecuaţiile care determină poziţiile elementelor şi anume:

$$\begin{aligned} \omega_1 l_1 \sin\varphi_1 + \omega_2 l_2 \sin\varphi_2 &= \omega_3 l_2 \sin\varphi_3, \\ \omega_1 l_1 \cos\varphi_1 + \omega_2 l_2 \cos\varphi_2 &= \omega_3 l_3 \cos\varphi_3, \end{aligned} \tag{81}$$

unde

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1, \quad \frac{d\varphi_2}{dt} = \omega_2, \quad \frac{d\varphi_3}{dt} = \omega_3. \tag{82}$$

Rezolvînd sistemul de ecuaţii (81) în raport cu ω_2 şi ω_3 se obţine

$$\omega_2 = \frac{l_3\omega_3\cos\varphi_3 - l_1\omega_1\cos\varphi_1}{l_2\cos\varphi_2} \tag{83}$$

şi

$$\dot{\gamma} = \omega_3 = \omega_1\frac{l_1\sin(\varphi_1-\varphi_2)}{l_2\sin(\varphi_3-\varphi_1)}. \tag{84}$$

Acceleraţiile elementelor conduse se obţin derivînd în raport cu timpul ecuaţiile vitezelor:

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \varepsilon_1, \quad \frac{d\omega_2}{dt} = \varepsilon_2, \quad \frac{d\omega_3}{dt} = \varepsilon_3. \tag{85}$$

Se determină ε_2 și ε_3 cu relațiile

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1 l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_3) + \omega_1^2 l_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) + \omega_2^2 l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) - \omega_3^2 l_3}{l_3 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)}, \tag{86}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_1 l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \omega_1^2 l_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \omega_2^2 l_2 - \omega_3^2 l_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_2)}{l_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)}. \tag{87}$$

Se face în continuare ipoteza că $\varphi_3 \neq \varphi_1 + k\pi$ și $\varphi_3 \neq \varphi_2 + k\pi$.

În relația (84) se aproximează sinusurile cu valoarea lor maximă și rezultă :

$$\dot{\gamma} \simeq \omega_1 \frac{l_1}{l_2} = \omega_3. \tag{88}$$

Înlocuind (88) în prima relație din (73), se obține

$$h\omega_1^2 \frac{l_1^2}{l_2^2} = \sqrt{\alpha_3^2 + \alpha_4^2}. \tag{89}$$

Se notează rapoartele

$$\lambda = \frac{l_2}{l_4}, \qquad \eta = \frac{l_3}{l_4}, \qquad a = \frac{l_1}{l_4}. \tag{90}$$

Substituind rapoartele (90) în (89), rezultă

$$\lambda^2 = \frac{ha\omega_1^2}{\sqrt{\alpha_3^2 + \alpha_4^2}}. \tag{91}$$

Mișcarea de rotație a manivelei EF se consideră uniformă, deci $\varphi_1 = \omega_1 t$.

Conform relației (83), luînd valorile maxime absolute ale sinusurilor și cosinusurilor, se obține :

$$\omega_2 \cong \frac{l_3\omega_3 + l_1\omega_1}{l_2}. \tag{92}$$

După înlocuirea lui ω_3 din (88) rezultă

$$\omega_2 \cong \left(\frac{l_1 l_3}{l_2^2} + \frac{l_1}{l_2}\right)\omega_1. \tag{93}$$

Se consideră acum expresia acceleraţiei unghiulare (87) în modul şi se înlocuiesc sinusurile şi cosinusurile cu valorile lor maxime în modul iar $\varepsilon_1 = \ddot{\varphi}_1 = 0$

$$|\ddot{\gamma}| = \varepsilon^3 \approx \frac{\omega_1^2 l_1 + \omega_2^2 l_2 + \omega_3^2 l_3}{l_3} \approx \omega_1^2 \left[\frac{l_1}{l_3} + \frac{l_1^2}{l_2^2} + \left(\frac{l_1 l_3}{l_2^2} + \frac{l_1}{l_2} \right)^2 \frac{l_2}{l_3} \right]. \quad (94)$$

Se înlocuieşte (94) în a doua relaţie din (73) şi rezultă

$$h\omega_1^2 \left[\frac{l_1}{l_3} + \frac{l_1^2}{l_2^2} + \left(\frac{l_1 l_3}{l_2^2} + \frac{l_1}{l_2} \right)^2 \frac{l_2}{l_3} \right] = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}. \quad (95)$$

În (95) se neglijează după ridicarea la pătrat şi înmulţire raportul $\frac{l_1^2}{l_2^2}$ din raţiuni practice de gabarit şi mod de lucru al mecanismelor.

După dezvoltare şi înlocuire cu rapoartele λ şi η, rezultă

$$h\omega_1^2 (a\lambda^3 + a^2\eta^2 + a^2\lambda^2) = \lambda^3 \eta \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}. \quad (96)$$

Neglijînd în continuare termenul $a^2\eta^2$ din paranteză cu ponderi de 1%, respectiv 6% aproximativ, în raport cu ceilalţi doi termeni se obţine:

$$\eta = \frac{ha\,(\lambda + a)\,\omega_1^2}{\lambda \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}. \quad (97)$$

Rezolvînd ecuaţia (97) cu ajutorul unui program de calcul a rezultat următorul mecanism optim:

$\lambda = 0{,}211$; $\eta = 0{,}844$,

$l_1 \approx 0{,}03$ m ; $l_2 \approx 16$ cm ; $l_3 \approx 63$ cm,

în condiţiile $\alpha = 3^0$, $\mu = 0{,}36$, $l_4 = 75$ cm.

CONCLUZII

În baza studiului efectuat s-a obţinut sinteza optimală a mecanismului şeping, bielă-manivelă, şi patrulater compus, folosite pentru antrenarea sitelor vibrante ale maşinilor de sortat seminţe, în scopul obţinerii unei productivităţi mărite, după criteriul vitezei medii maxime de deplasare a masei de seminţe. Se pot cerceta în continuare şi alte aspecte importante privind creşterea productivităţii, ca de exemplu timpul minim de

deplasare a masei de semințe pe sitele oscilante, considerarea saltului semințelor, determinarea unghiului optim de înclinare a sitelor, sau antrenarea cu alte tipuri de mecanisme optime.

Primită la redacție la 11 aprilie 1983

BIBLIOGRAFIE

1. T. DEMIAN, D. TUDOR, E. GRECU — *Mecanisme de mecanică fină*, Edit. Didactică și Pedagogică, București, 1982.
2. I. GUMOWSKI, C. MIRA, *L'optimisation — la théorie et ses problèmes*, Dunod, Paris, 1970.
3. V. IONESCU, L. LUPAȘ, *Tehnici de calcul în teoria sistemelor*, II. *Sisteme optimale*, Editura tehnică, București, 1974.
4. N. N. KRASOVSKII, *Teoria upravleniia dvijeniem lineinîe sistemî*. Nauka, Moskva, 1968.
5. A. A. LAVENDEL, *Sintez optimalinîh vibromașin*, Izd. Ziniatie, Riga, 1970.
6. GABRIELA NEAGU, D. VIERU, F. POTERAȘU, *Studiul mișcării semințelor pe plane oscilante cu metoda predictor-corector*, Lucrare comunicată la Conferința de vibrații în construcția de mașnini, Timișoara, 27—28 noiembrie 1982, publicată în volumul editat cu această ocazie.
7. I. POPESCU, *Proiectarea mecanismelor plane*, Edit. Scrisul Românesc, Craiova, 1977.

MODELAREA MATEMATICĂ ȘI SIMULAREA NUMERICĂ STRUCTURATĂ A SUPAPELOR DE LIMITARE A PRESIUNII

de FLORIN IONESCU
Institutul politehnic București, Catedra mașini-unelte și scule

Cercetările efectuate și rezultatele obținute îndreptățesc afirmația că utilizînd conceptele structurării, analiza și în perspectivă, sinteza instalațiilor de automatizare hidraulică și electrohidraulică pot fi realizate pe o cale nouă, utilizînd modele matematice globale obținute structurat prin cuplarea modelelor elementare ale structurilor/subsistemelor componente ale instalațiilor. În acest mod, etapa modelării precum și cea a rezolvării ecuațiilor diferențiale se simplifică considerabil, ele reducîndu-se doar la asamblarea apropiată a modelelor elementare și la simularea pe calculator a schemelor bloc analogice obținute astfel.

Lucrarea de față prezintă cadrul problemei analizei și simulării structurate, avantajele metodei precum și locul pe care îl ocupă supapele de limitare a presiunii (SLP) în cadrul instalațiilor de automatizare hidraulică și electrohidraulică (IAHE). Pe aceste baze sînt prezentate apoi în lucrare unele rezultate ale cercetărilor direcționate, în cadrul mai amplu al elaborării modelelor matematice ale elementelor componente ale instalațiilor, spre analiza comportării dinamice tranzitorii a structurilor modulare tip de SLP, pilotate și nepilotate, de simulare numerică, de optimizare și de cuplare cu instalația din care face parte supapa.

1. INTRODUCERE

Modelarea matematică și studiul teoretic al unui sistem fizic reprezintă un prim și de neînlocuit pas în analiza comportării sale și pentru trecerea către generalizarea necesară sintezei.

Datorită rezolvării globale și unice utilizate pînă în prezent, procesul de obținere al modelelor matematice ale instalațiilor a fost greoi și, uneori, cu rezultate incomplete sau chiar centrifugale. Modelele matematice obținute astfel sînt unice, nestructurate și deci dificil de extrapolat și de dezvoltat. Operația de modelare necesită un grad ridicat de abilitate profesională, iar rezolvarea ulterioară întîmpină multe dificultăți în special în faza de transpunere pe calculator, etapă care necesită cunoștințe adecvate de specialitate, de utilizare a diferitelor mijloace de rezolvare etc. Sînt excluse, de asemenea, proiectarea asistată și optimizarea complexă.

Un pas calitativ nou în modelarea matematică a instalațiilor de automatizare hidraulică și electrohidraulică în vederea analizei și sintezei îl constituie modelarea structurată. Bazele metodei sînt prefigurate în [9 și 10] și au fost recent completate și fundamentate în [2, 3, 4, 5 și 8]. Modelarea structurată oferă o soluție de tratare organizată, sistemică a elementelor componente ale instalațiilor privite ca module/structuri tip (pompă, motor, conductă, supapă, distribuitor, servodistribuitor, acumulator etc.), a elementelor mecanice compliante de cuplare la instalația mecanică (cuplaj, reductor, mecanisme de conversie a mișcării, sanie etc.); metoda permite realizarea rapidă a modelelor matematice ale instalațiilor prin reunirea modelelor elementelor, „manual" sau asistat de calculator printr-o preprocesare a datelor, scurtînd etapa de modelare și eliminînd totodată erorile care pot apărea în această fază. Este permisă, de asemenea, operația de optimizare „locală" a modulelor elementare.

St. cerc. mec. apl., tom. 43, nr. 2, 1984, p. 167—188

Toate acestea reprezintă etape pregătitoare ale trecerii la *Proiectarea Asistată de Calculator* (CAD în l. engleză) modalitate de proiectare şi de optimizare ce nu poate fi atinsă pe alte căi decît prin *modelarea matematică structurată.*

2. STRUCTURI TIP DE ELEMENTE ŞI INSTALAŢII. LOCUL SUPAPELOR DE LIMITARE A PRESIUNII ÎN INSTALAŢIILE DE AUTOMATIZARE HIDRAULICĂ ŞI ELECTROHIDRAULICĂ

Modelele matematice ale subsistemelor componente ale IAHE sînt, în majoritate, neliniare avînd una sau mai multe neliniarităţi statice sau/şi dinamice. Fiecare model matematic elementar conţine propria sa structură dinamică, un număr de mărimi de intrare şi de ieşire şi derivatele lor temporale caracteristice tipului său (bi-, cvadri-, sexa-, octa-, nano- şi decapol), intrări constante sau de consemn şi este introdus cu o anumită specificare relativă la sortarea mărimilor de mişcare, de efort sau de control.

Privite prin prisma numărului de variabile cu care operează, elementele IAHE sînt [3, 4, 5 şi 8]: *bipoli* (d.e.: supapa de limitare a presiunii, acumulatorul); *cvadripoli* (conducta, filtrul etc.); *sexapoli* (pompa şi motorul rotativ cu capacitate constantă, motorul liniar etc.); *octapoli* (pompa şi motorul rotativ cu capacitate reglabilă etc.); *decapoli* (distribuitorul, servodistribuitorul etc.) (fig. 1). Elementele operează cu două tipuri de variabile: *variabila de efort* (V_E) şi *variabila de mişcare* (V_M) în procesul funcţional elementele transmiţîndu-şi prin intermediul acestora informaţii şi energie. Debitul Q şi viteza v/ω sînt variabilele hidraulică şi respectiv mecanică de mişcare, iar presiunea p şi forţa F sau cuplul M sînt variabilele corespunzătoare de efort.

Astfel descrise şi formalizate grafo-analitic, elementele sînt asociate în *lanţuri* sau *ramuri*, iar două sau mai multe lanţuri formează o *instalaţie* sau *arbore*. În instalaţiile cu reglare automată bucla/buclele de reacţie au una dintre variabile de nivel scăzut, fapt datorat nivelului scăzut al energiei vehiculate pe aceste căi [2, 3, 4, 5, 8].

Instalaţiile lucrează la presiune variabilă sau (pseudo) constantă fapt care determină implicit cauzalitatea variabilelor şi sortarea acestora în cadrul procesării pe calculatorul numeric [2, 3, 8]; aceeaşi instalaţie poate opera în ambele cauzalităţi în diferitele faze operatorii ale funcţionării. În alte situaţii [6], instalaţia lucrează cu diferite structuri dinamice în faze operatorii date, sistemul fiind de tip cu structură dinamică variabilă.

Supapa de limitare a presiunii se găseşte amplasată în imediata vecinătate a pompei sau/şi a motorului [8] şi are în principal rolul de a limita presiunea din instalaţie la o valoare prescrisă, la supapele în funcţionare normal închisă, şi în plus de a o menţine la această valoare, la supapele în funcţionare normal deschisă; alături de acest rol SLP mai poate fi folosită, printr-o alegere/proiectare apropiată şi drept filtru al oscilaţiilor prezente în instalaţie, în principal datorate pompei [9]. Privite prin prisma numărului şi a tipului de variabile cu care operează, o SLP este, simplificat, un *bipol* cu intrare presiunea p_P şi ieşirea debitul ΔQ_S sau ΔQ_{st} extras din debitul Q_P al pompei (sau Q_F al filtrului) (fig. 2). La închiderea

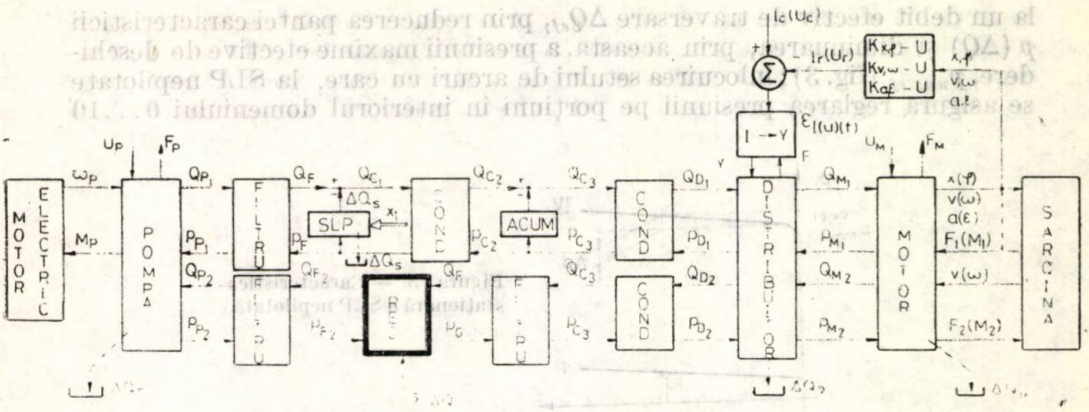


Figura 1. — Diagrama bloc structurată a unui lanț într-o instalație de automatizare hidraulică și electrohidraulică. Structuri tip de elemente din componența IAHE.

completă a distribuitorului SLP-bipol lucrează cu intrare debitul pompei Q_{P1} și ieșirea presiunea p. Revenind la prima ipostază trebuie arătat că după o anumită perioadă tranzitorie debitul Q_{C1} este stabilizat la o valoare $Q_{C.st} = Q_P - \Delta Q_{st}$. Procesul tranzitoriu al instalației este influențat de SLP fiind, prin urmare, nemonoton ; unele valori proprii ale modurilor de vibrație ale instalației sînt datorate influenței, ponderate, a SLP. Studiul comportării dinamice a SLP se impune, așadar, din următoarele puncte de vedere : permite cunoașterea mai în detaliu a comportării sale staționare și dinamice ; permite obținerea prin sinteză a unei structuri dinamice optimizate, în special prin prisma conjuncției sale cu ansamblul instalației ; face posibilă întocmirea bibliotecii de date cu modelele matematice ale structurilor modulare tip necesară în vederea trecerii la PAC/CAD a instalațiilor de automatizare hidraulică și electrohidraulică.

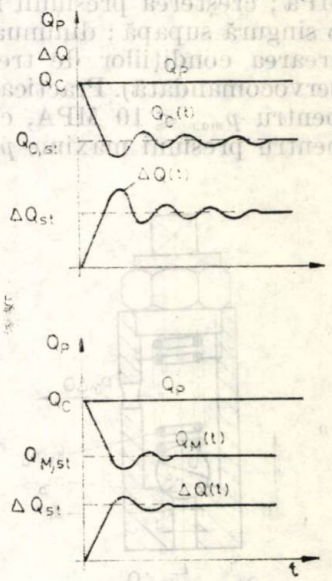


Fig. 2. — Grafic exemplificator al rolului SLP într-o instalație de automatizare hidraulică.

3. MODELELE MATEMATICE ALE SUPAPELOR DE LIMITARE A PRESIUNII

Supapele de limitare a presiunii lucrează ca *supape normal închise* cînd $p < p_{max}$ și normal deschise cînd $p > p_{max}$, în ambele situații forța hidraulică care se compară cu cea mecanică creată de arc fiind realizată cu presiune din amonte. În [8] sînt prezentate și justificate pe larg motivele care au condus la apariția și utilizarea „pilotării", motive care sînt, în esență, următoarele ; reducerea suprapresiunii de deschidere Δp care apare

la un debit efectiv de traversare ΔQ_{ef}, prin reducerea pantei caracteristicii $p\ (\Delta Q)$ și diminuarea, prin aceasta, a presiunii maxime efective de deschidere, $p_{max,ef}$ (fig. 3); înlocuirea setului de arcuri cu care, la SLP nepilotate se asigură reglarea presiunii pe porțiuni în interiorul domeniului 0...10

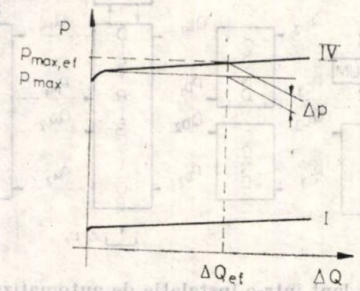
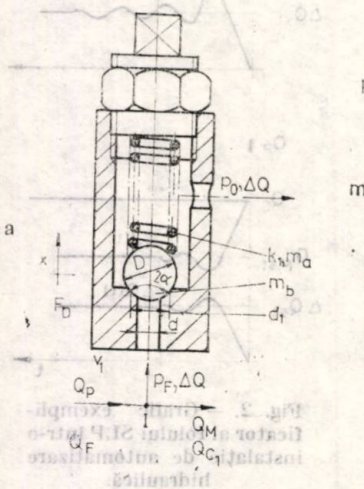


Figura 3. — Caracteristica staționară a SLP nepilotată.

MPa; creșterea presiunii maxime și a domeniului de reglare realizate cu o singură supapă; diminuarea efortului uman necesar acțiunii de reglare; crearea condițiilor de trecere la pilotarea automată (telecomandată și servocomandată). Practica curentă a impus astfel utilizarea SLP nepilotate pentru $p_{max} \leqslant 10$ MPA, cu patru domenii de reglare și a SLP pilotate pentru presiuni maxime $p_{max} \leqslant (30...60)$ MPa.



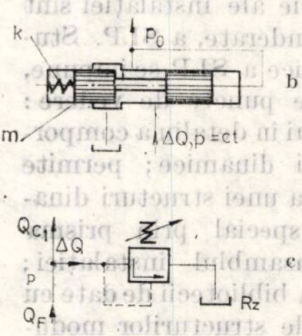


Figura 4. — Supapa nepilotată de limitare a presiunii: *a* — schema semiconstructivă; *b* — schema funcțională simplificată; *c* — schema standard.

3.1. MODELAREA MATEMATICĂ A SUPAPEI NEPILOTATĂ DE LIMITARE A PRESIUNII

a) *Modelele fizice*

În figura 4 sînt prezentate o schemă semiconstructivă, o reprezentare schematică principială și, respectiv, schema simbolică standard a SLP nepilotată. Scaunul supapei și piesa mobilă conjugată pot fi: sferic, conic,

plat sau tip sertar. Din punct de vedere funcțional, SLP trebuie privită ca realizînd simultan două funcții distincte (fig. 5) și anume: funcția de *comparare* a forței de presiune cu forța mecanică dată de arcul cu rigiditatea k_1 [N/m] și funcția de *rezistență hidraulică variabilă* creată prin ridicarea/deplasarea elementului mobil m [kg] de pe scaunul supapei/în raport cu corpul supapei cu cantitatea $x[m]$. Prin aceste două funcții presiunea

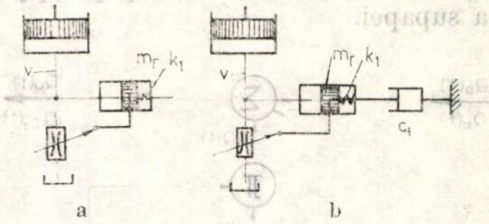


Figura 5. — Schemă exemplificatoare a funcționării, descompusă în funcții, a supapei nepilotată de limitare a presiunii.

urmărește o curbă de variație de tipul celei din figura 3, fiind crescută la valoarea $p_{max} + \Delta p$, iar un debit ΔQ este expulzat din circuitul principal. Introducerea unui amortizor (fig. 5 *b*) contribuie la ameliorarea comportării dinamice a supapei în vecinătatea rezonanței ($\omega_n = \sqrt{k_1/m_r}$).

b) *Modelul matematic neliniar*

Modelul matematic al SLP nepilotată este constituit din ecuațiile de continuitate, de echilibru dinamic al elementelor mobile, de curgere în interstițiul creat de deplasarea $x(t)$ a elementului mobil și din ecuația forței hidrodinamică de impuls ce apare între fluid-element mobil-scaun (sensul forței este determinat de forma scaunului [2 și 8]. Aceste ecuații sînt, corespunzător, următoarele:

$$Q_M(t) = Q_P(t) - \Delta Q(t) - \frac{V_1}{B}\frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t}, \tag{3.1}$$

$$m_r \frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} + c_1 \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + k_1 [x(t) + x_1] = A_1 p(t) - A_2 p_2(t) + F_D(t), \tag{3.2}$$

$$\Delta Q(t) = c_D \pi d_1 x(t) \sqrt{\frac{2}{\rho}} \sqrt{p(t) - p_2(t)} \sin\alpha, \tag{3.3}$$

$$F_D(t) = \rho v(t)\, \Delta Q(t) \cos\alpha = \rho \sqrt{\frac{2}{\rho}[p(t) - p_2(t)]}\, \Delta Q(t) \cos\alpha. \tag{3.4}$$

În ecuațiile (3.1)...(3.4) s-au mai notat cu: $m_r = m_b + m_a\left(\frac{1}{2}\ldots\frac{1}{3}\right) + m_{am}$ [kg], masa mobilă redusă formată din: bilă (b), arc (a), amortizor (am); c_1 [N/(m/s)], coeficientul de frecare vîscoasă newtoniană din ele

mentul elastic și, mai ales, din amortizor; $x_1[m]$, săgeata de prestrîngere a arcului ce definește indirect p_{max}; $V_1[m^3]$, volumul de ulei sub presiune între nodul I (fig. 4*a*) și bilă; $B\ [N/m^2]$, modulul de elasticitate al uleiului sub presiune, $B = E/(150 \ldots 200)$; $A_1 = \pi d_1^2/4$; $A_2 = \pi D^2/4$; $\rho = 0{,}89\ 10^3$ [kg/m^3], densitatea uleiului: $c_D[-]$, coeficientul de descărcare la curgerea turbulentă a uleiului prin interstițiul creat de deschiderea supapei; α[grd], semiunghiul conului scaunului supapei; p_2, presiunea pe conducta de evacuare a supapei.

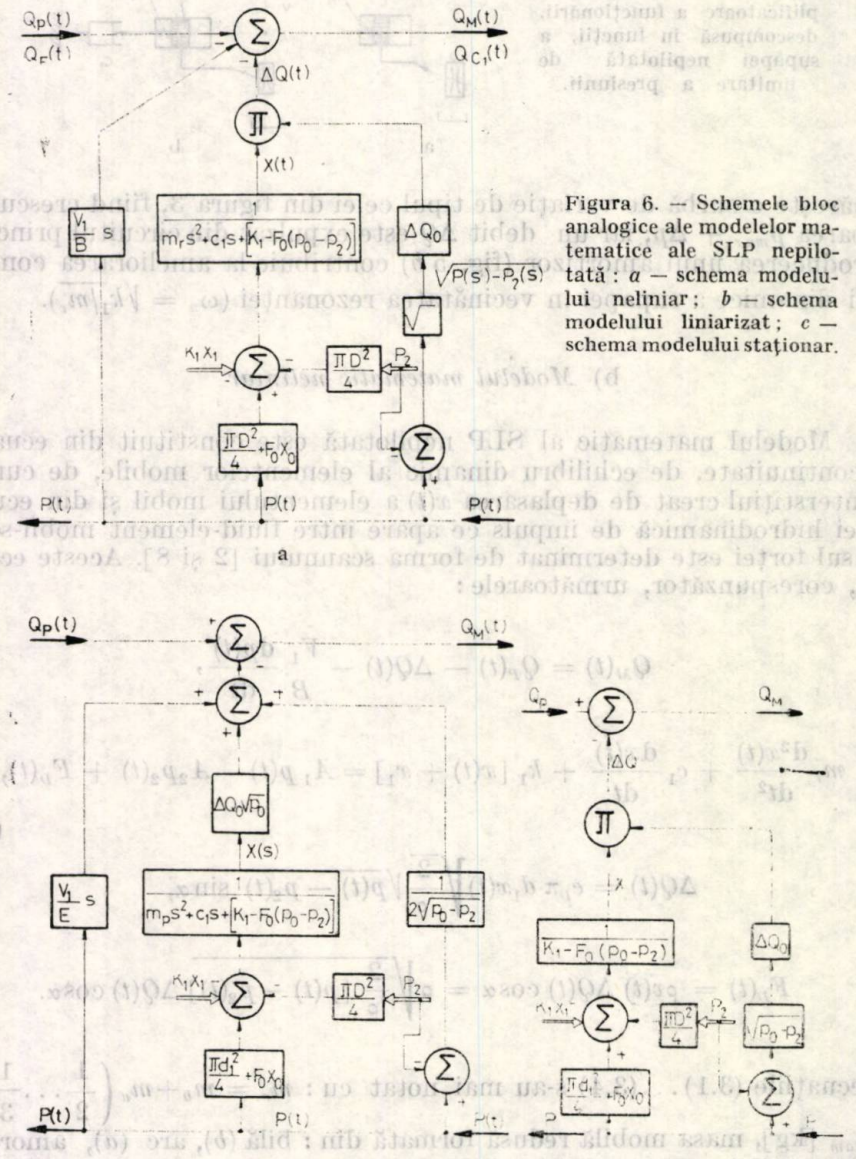


Figura 6. — Schemele bloc analogice ale modelelor matematice ale SLP nepilotată: *a* — schema modelului neliniar; *b* — schema modelului liniarizat; *c* — schema modelului staționar.

Înlocuind în (3.3) și (3.4) cu :

$$F_0 = c_D \pi d_1 \sin 2\alpha, \tag{3.5}$$

$$\Delta Q_0 = c_D \pi d_1 \sqrt{2/\rho} \sin\alpha \tag{3.6}$$

și introducînd (3.3) în (3.4) se obține :

$$F_D(t) = F_0 x(t) \Delta p(t). \tag{3.4'}$$

Ecuația (3.4') conține un produs de două variabile care trebuie liniarizat parțial prin dezvoltare în serie Taylor de puteri, în scopul separării variabilelor în ecuația (3.2). Renunțînd la infiniții mici de ordin superior și după simplificarea componentei staționare $F_{D0} = F_0 x_0 p_0$, se obține

$$F_D(t) = F_0 x_0 \Delta p\,(t) + F_0 \Delta p_0 x(t). \tag{3.4''}$$

În figura 6*a* se poate vedea schema bloc analogică a modelului matematic descris de ecuațiile (3.1)...(3.3) și (3.4'') în care s-a utilizat transformata Laplace $s = \mathrm{d}/\mathrm{d}t$.

c) *Modelul matematic liniarizat*

Studiul comportării dinamice a SLP nepilotată poate fi realizat, în anumite limite de precizie și cu mici variații ale variabilelor în jurul punctului staționar de funcționare $M(x_0, p_0)$ și, utilizînd modelul liniarizat. Acesta cuprinde ecuațiile de mai jos, obținute prin introducerea ecuației (3.4'') în (3.2) și prin liniarizarea debitului expulzat prin supapă, ΔQ :

$$[m_r s^2 + c_1 s + k_1 - F_0(p_0 - p_{20})]X(s) = (A_1 + F_0 x_0)P(s) + (F_0 x_0 - A_2)P_2(s) + k_1 x_1, \tag{3.2'}$$

$$\Delta Q_{st} + \Delta Q(s) = \Delta Q_0 x_0 \sqrt{p_0} + \Delta Q_0 \sqrt{p_0}\, X(s) + \Delta Q_0 \frac{x_0}{2\sqrt{p_0}} [P(s) - P_2(s)]. \tag{3.3'}$$

Funcția de transfer $H(s) \triangleq \Delta Q(s)/P(s)$ are expresia de forma următoare :

$$H(s) = \frac{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}, \tag{3.7}$$

unde coeficienții a_i și b_j au fost obținuți după identificarea cu modelul matematic și au expresiile de mai jos : $a_3 = \Delta Q_0 x_0 m_r k_1 V_1/(2B\sqrt{p_0}) + m_r V_1/B$; $a_2 = \Delta Q_0 x_0 (m_r + c_1 k_1 V_1/B)/(2\sqrt{p_0}) + c_1 V_1/B$; $a_1 = \Delta Q_0 \sqrt{p_0}\,(A_1 + F_0 x_0 - k_1 x_1) k_1 V_1/B + [\Delta Q_0 x_0/(2\sqrt{p_0})] \times (k_1 V_1/B)\{[k_1 - F_0(p_0 - p_{20})] + c\} + [k_1 -$

$-F_0(p_0 - p_{20})] V_1/B$; $a_0 = \Delta Q_0(A_1+F_0x_0-k_1x_1)\sqrt{p_0} + [\Delta Q_0 x_0/(2\sqrt{p_0})] [k_1 - -F_0(p_0-p_{20})]$; $b_3=k_1m_r\, V_1/B$; $b_2=m_r+c_1k_1V_1/B$; $b_1=(k_1V_1/B)[k_1-F_0(p_0- -p_{20})]+c_1$; $b_0=k_1-F_0\ (p_0-p_{20})$.

În cazul în care $V_1 \cong 0$, fiind foarte mic, iar $p_2 \ll p_0$, $H(s)$ devine $H'(s)$, care descrie cu o bună precizie comportarea supapei în jurul punctului de liniarizare $M(x_0, p_0)$[2, 3, 8 și 10]. Aceasta are expresia :

$$H'(s) \triangleq \frac{\Delta Q(s)}{P(s)} = \frac{a'_2s^2+a'_1s+a'_0}{b'_2s^2+b'_1s+b'_0}, \tag{3.8}$$

unde a'_i și b'_j au expresiile : $a'_2=\Delta Q_0x_0m_r/(2\sqrt{p_0})$; $a'_1=\Delta Q_0x_0c_1/(2\sqrt{p_0})$; $a_0= =\Delta Q_0\sqrt{p_0}\times(A_1+F_0x_0-k_1x_1)\times(\Delta Q_0x_0/2\sqrt{p_0})\ [2p_0/x_0+[k_1-F_0p_0]$; $b_2=m_r$; $b_1=c_1$; $b_0=k_1-F_0p_0$. În figura 6*b* este prezentată schema bloc analogică a modelului matematic liniarizat.

d) *Modelul matematic al regimului staționar*

Modelul matematic al regimului staționar al SLP nepilotată este încorporat în modelul regimului dinamic, el putînd fi evidențiat prin anularea derivatelor de orice ordin ale variabilelor. Se obțin astfel următoarele expresii ale variabilelor staționare ΔQ_{st} și x_{st} :

$$\Delta Q_{st} = [p_0(A_1 + F_0x_0) - k_1x_1 - p_{20}A_2] \frac{\Delta Q_0\sqrt{p_0-p_{20}}}{k_1-F_0(p_0-p_{20})},$$
$$x_{st} = \frac{A_1p_0 - A_2p_{20} - F_0x_0}{k_1 - F_0(p_0 - p_{20})}. \tag{3.9}$$

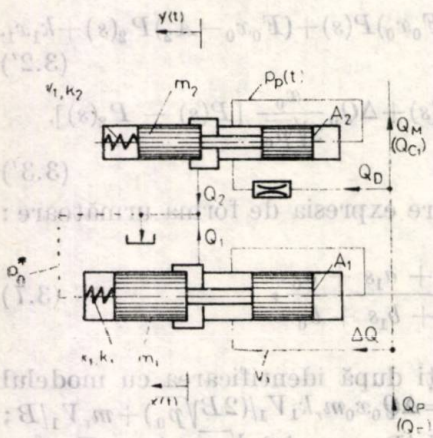


Figura 7. — Schema funcțională a supapei pilotată de limitare a presiunii.

În figura 6*c* este prezentată schema bloc a modelului staționar.

3.2. MODELAREA MATEMATICĂ A SUPAPEI PILOTATĂ DE LIMITARE A PRESIUNII

a) *Modelul fizic*

Considerăm supapa pilotată de limitare a presiunii reprezentată schematic în figura 7, în care pilotul, căruia îi sînt atribuiți indicii 2, controlează prin deplasarea sa $y(t)$ presiunea de pilotare $p_p(t)$, care determină, la rîndul său, echilibrul de forțe la nivelul elementului mobil al supapei principale m_1 și deplasarea acestuia $x(t)$. Prin acest

ansamblu de intercondiționări, supapa principală se deschide la presiunea limită p_{max} și expulzează debitul $\Delta Q(t) + Q_D(t)$ din debitul pompei $Q_P(t)$. Debitul $Q_M(t)$ care ajunge în instalație este diminuat corespunzător. În cazul supapelor ce sînt concepute cu variante diferite de pilot sau/și de supapă principală, doar ecuațiile modelului matematic sînt afectate, principiul funcțional rămînînd același.

b) *Modelul matematic neliniar*

Modelul matematic care descrie funcționarea SLP pilotate este format din ecuațiile de continuitate scrise la nivelele supapelor principală și pilot, din ecuațiile debitelor Q_1, Q_2 și Q_D care traversează supapele și droselul ce controlează debitul extras de pilot din circuitul principal, din ecuațiile de echilibru dinamic scrise la nivelele celor două etaje ale supapei precum și din expresiile celor două forțe hidrodinamice de impuls dintre sertare-jet-corp în ambele etaje ale supapei. Utilizînd transformata Laplace se obțin, corespunzător, următoarele ecuații:

$$\Delta Q(s) = Q_P(s) - Q_M(s) = Q_1(s) + Q_D(s) + A_1 s\, X(s) + (V_1/B)\, sP(s), \tag{3.10}$$

$$Q_D(s) = -A_1 sX(s) + Q_2(s) + A_2 sY(s) + (V_2/B) sP_p(s), \tag{3.11}$$

$$Q_1(s) = c_{D1}\pi D_1 \sqrt{2/\rho}\, X(s) \sqrt{P(s) - P_0^*} \cong Q_{10} X(s) \sqrt{P(s)}, \tag{3.12}$$

$$Q_2(s) = c_{D2}\pi D_2 \sqrt{2/\rho}\, Y(s) \sqrt{P_p(s) - P_0^*} \cong Q_{20} Y(s) \sqrt{P_p(s)}, \tag{3.13}$$

$$Q_D(s) = c_D S \sqrt{2/\rho} \sqrt{P(s) - P_p(s)} = Q_{D0} \sqrt{P(s) - P_p(s)}, \tag{3.14}$$

$$(m_1 s^2 + c_1 s + k_1) X(s) = A_1 [P(s) - P_0^*(s)] - k_1 x_1 + F_{D1}(s), \tag{3.15}$$

$$(m_2 s^2 + c_2 s + k_2) Y(s) = A_2 P_p(s) - k_2 y_1 + F_{D2}(s), \tag{3.16}$$

$$F_{D1}(s) = \rho Q_1(s) \sqrt{2/\rho} \sqrt{P(s)} \cos \Phi_1, \tag{3.17}$$

$$F_{D2}(s) = \rho Q_2(s) \sqrt{2/\rho} \sqrt{P_p(s)} \cos \Phi_2. \tag{3.18}$$

Introducînd ecuațiile (3.12) în (3.17) și (3.13) în (3.18) se obțin, după simplificări, noile expresii ale forțelor hidrodinamice sub formele de mai jos:

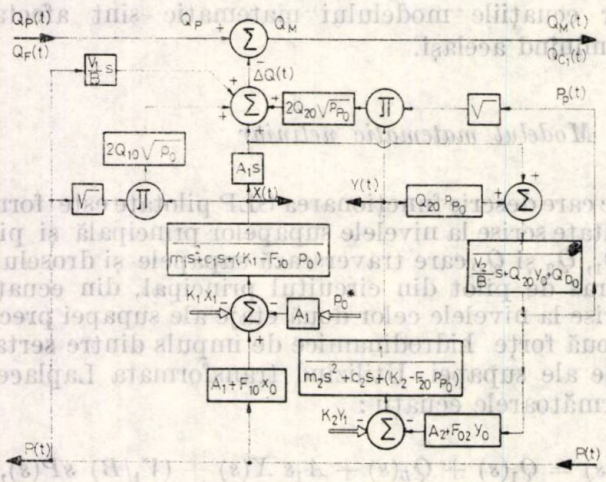
$$F_{D1}(s) = 2 c_{D1} \pi D_1 \cos \Phi_1 P(s) X(s) = F_{10} P(s) X(s), \tag{3.17'}$$

$$F_{D2}(s) = 2 c_{D2} \pi D_2 \cos \Phi_2 P_p(s) Y(s) = F_{20} P_p(s) Y(s). \tag{3.18'}$$

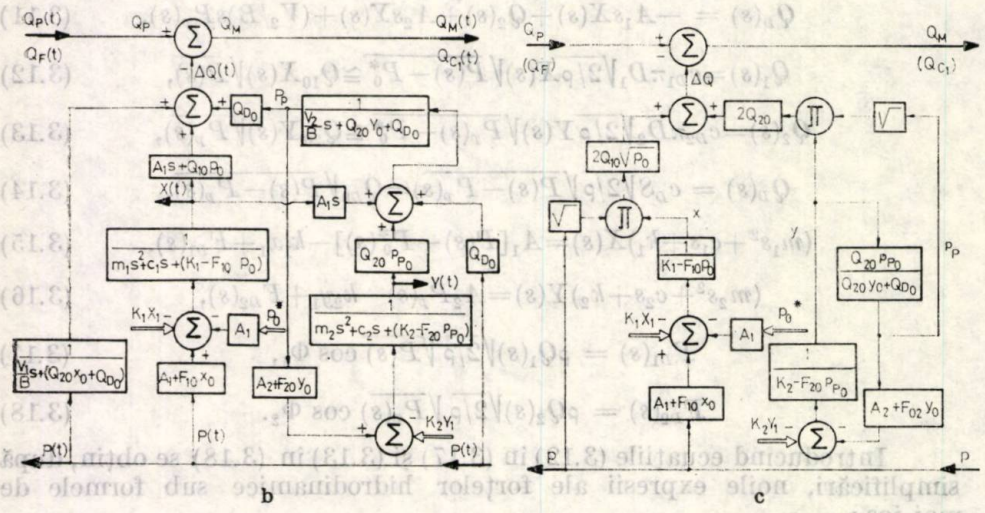
În ecuațiile (3.12) ... (3.14) s-au notat cu:

$$Q_{10} = c_{d1}\pi D_1 \sqrt{2/\rho}\,; \quad Q_{20} = c_{D2}\pi D_2 \sqrt{2/\rho}\,; \quad Q_{D0} = c_D S \sqrt{2/\rho}.$$

Pentru rezolvarea sistemului de ecuații este necesară înlocuirea expresiilor forțelor $F_{D1}(s)$ și $F_{D2}(s)$ în ecuațiile (3.15) și (3.16); pentru a putea separa variabilele $X(s)$ și $P(s)$ precum și $Y(s)$ și $P_p(s)$ este necesară o liniarizare parțială a expresiilor forțelor date de relațiile (3.17′) și (3.18′).



a



b c

Figura 8. — Schemele bloc analogice ale modelelor matematice ale SLP pilotată cu intrare presiune și ieșire debit : *a* — schema modelului neliniar ; *b* — schema modelului liniarizat ; *c* — schema modelului staționar.

Utilizînd dezvoltarea în serie Taylor de puteri după două variabile în jurul punctelor staționare de funcționare $M(x_0, p_0)$ și $N(y_0, p_{p0})$ și renunțînd la infiniții mici de ordin superior ca și la termenii caracteristici regimului staționar, se obțin următoarele expresii ale forțelor hidrodinamice de impuls F_{D1} și F_{D2} :

$$F_{D1}(s) = F_{10}\, p_0 X(s) + F_{10}\, x_0\, P(s), \tag{3.17″}$$

$$F_{D2}(s) = F_{20}\, p_{p0} Y(s) + F_{20}\, y_0 P_p(s). \tag{3.18″}$$

Înlocuirea noilor expresii ale forțelor F_{D1} și F_{D2} în ecuațiile (3.15) și (3.16) conduce la următoarele ecuații cu variabile separate :

$$[m_1 s^2 + c_{1s} + (k_1 - F_{10} p_0)] X(s) = (A_1 + F_{10} x_0 P(s) - A P_0^*(s) - k_1 x_1, \quad (3.15')$$

$$[m_2 s^2 + c_2 s + (k_2 - F_{20} p_{p0})] Y(s) = (A_2 + F_{20} y_0) P_p(s) - k_2 y_1. \quad (3.16')$$

Modelul matematic al SLP pilotată este acum format din ecuațiile (3.10)... (3.14), (3.15') și (3.16'). În figura 8*a* este prezentată schema bloc analogică a acestuia care evidențiază prezența unor structuri elementare de tip liniar asociate cu blocuri neliniare. Reprezentarea a fost realizată printr-o rafinare gradată și apropiere descendentă la ambele nivele ale supapei, care, așa cum le arată schema bloc, sînt structurate fiecare pe cele două nivele, principal și pilot.

c) *Modelul matematic liniarizat*

Ca și în cazul SLP nepilotate, modelul matematic liniarizat al SLP pilotate este util pentru studiul teoretic al comportării dinamice a supapei, cu anumite limite în ceea ce privește precizia de descriere, la mici abateri ale variabilelor în jurul punctelor de liniarizare $M(x_0, p_0)$ și $N(y_0, p_{p0})$. Modelul matematic liniarizat cuprinde ecuațiile (3.10), (3.11), (3.15') și (3.16') precum și ecuațiile (3.12'), (3.13') și (3.14'), ultimele fiind obținute prin liniarizarea expresiilor debitelor $Q_1(s)$, $Q_2(s)$ și $Q_D(s)$ prin dezvoltare în serie de puteri după două variabile. Se obțin astfel :

$$Q_1(s) = Q_{10} \sqrt{p_0}\, X(s) + Q_{10} \frac{x_0}{2\sqrt{p_0}} P(s), \quad (3.12')$$

$$Q_2(s) = Q_{20} \sqrt{p_{p0}}\, Y(s) + Q_{20} \frac{y_0}{2\sqrt{p_{p0}}} P(s), \quad (3.13')$$

$$Q_D(s) = Q_{D0} \frac{1}{2\sqrt{p_0 - p_{p0}}} P(s) + Q_{D0} \frac{1}{2\sqrt{p_0 - p_{p0}}} P_p(s). \quad (3.14')$$

Funcția de transfer care descrie global comportarea SLP pilotată poate fi considerată de forma :

$$H(s) \triangleq \frac{\Delta Q(s)}{P(s)} = \frac{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}, \quad (3.19)$$

în care s-a renunțat la termenii derivativi și integrali de ordin superior lui trei pe considerentul că instalațiile hidraulice și mecanice compliante filtrează frecvențe mai mari de 800 Hz în situația că au poli relativ apropiați. Coeficienții a_i și b_j pot fi determinați prin identificarea ecuațiilor modelului matematic liniarizat cu (3.19) sau aplicînd una din tehnicile cunoscute de determinare a funcțiilor de transfer (formula lui Mason, de exemplu). Operația este foarte laborioasă și conduce la expresii de mari dimensiuni pentru coeficienți. Se recomandă însă utilizarea limbajelor moderne de rezolvare pe calculatorul numeric ; dintre acestea se află imple-

mentate și se folosesc cu succes pe calculatoarele românești limbajele CSMP, LSSC, SSC și SIMSID. În figura 8*b* este prezentată schema bloc analogică a modelului liniarizat.

d) *Modelul matematic al regimului staționar*

Pornind de la modelul matematic neliniar al regimului dinamic al SLP pilotată aducem funcționarea supapei în regim staționar prin $p(t) = p_{st}$ fapt care conduce la $p_p(t) = p_{pst}x(t) = x_{st}$ și $y(t) = y_{st}$. Drept urmare, debitul expulzat din instalație $\Delta Q(t)$ devine constant, de valoare ΔQ_{st}. Anulînd toți termenii ce conțin derivatele variabilelor în modelul matematic al regimului dinamic al supapei, model format din ecuațiile (3.10)... (3.14), (3.15′) și (3.16′) și rezolvind sistemul de ecuații algebrice obținut în raport cu variabilele staționare x_{st}, y_{st}, p_{pst} și Q_{st} se obțin următoarele expresii ale acestora :

$$x_{st} = \frac{A_1(p_{st} - p_{pst}) - k_1 x_1}{k_1 - F_1 p_{st}}, \tag{3.20}$$

$$y_{st} = \frac{A_2 p_{pst} - k_2 y_1}{k_2 - F_2 p_{pst}}, \tag{3.21}$$

$$p_{pst} = p_{st} \frac{\left(\frac{c_D}{c_{D2}}\right)^2 \left(\frac{S}{\pi D_2 y_{st}}\right)^2}{1 + \left(\frac{c_D}{c_{D2}}\right)^2 \left(\frac{S}{\pi D_2 y_{st}}\right)^2}, \tag{3.22}$$

$$Q_{Mst} = Q_{Pst} - [c_{D1}\pi D_1 \sqrt{2/\rho}\, x_{st} \sqrt{p_{st}} + c_D S \sqrt{2/\rho} \sqrt{p_{pst}}]. \tag{3.23}$$

Rezolvarea matematică exactă a sistemului algebric neliniar presupune, în absența simplificărilor care țin de ponderea unor termeni, utilizarea unor algoritmi speciali de transpunere pe calculatorul numeric. În figura 8*c* este prezentată schema bloc a modelului matematic staționar al supapei pilotate de limitare a presiunii.

Eliminînd p_{pst} și x_{st} din ecuațiile (3.20)...(3.23), se obține, după operații intermediare, expresia presiunii staționare p_{st} în funcție de mărimea deplasării staționare y_{st} a elementului mobil al pilotului sub forma :

$$p_{st} = \frac{k_2 y_1}{A_2}\left(1 + \frac{y_{st}}{y_1}\right)\left\{1 + \left(\frac{c_{D2}\,\pi\, D_2 \cos \Phi_2\, y_{st}}{c_D S}\right)^2\right\}. \tag{3.24}$$

În cazul în care

$$y_{st} \ll y_1, \text{ iar } c_{D2}\pi D_2 \cos \Phi_2 y_{st} \ll c_D S, \tag{3.25}$$

atunci presiunea staționară asigurată instalației prin funcționarea supapei, devine :

$$p_{st} = k_2 y_1 / A_2 = \text{const.},$$

situație care conferă caracter liniar caracteristicii staționare $p_{st}(Q)$; aceasta elimină prezența defavorabilă a suprapresiunii de deschidere Δp care însoțește funcționarea supapei nepilotate de limitare a presiunii (v. fig. 3). Condițiile (3.25) constituie relațiile matematice care permit sinteza supapei pentru considerentele staționare arătate.

4. MODELELE MATEMATICE ALE SUPAPEI PILOTATE DE LIMITARE A PRESIUNII ÎN FUNCȚIONARE CU INTRARE DEBIT ȘI IEȘIRE PRESIUNE

La închiderea sau la comutarea distribuitorului, supapa de limitare a presiunii se comportă ca un bipol cu intrare debit și ieșire presiune; același efect se obține și atunci cînd SLP este folosită ca rezistență hidrau-

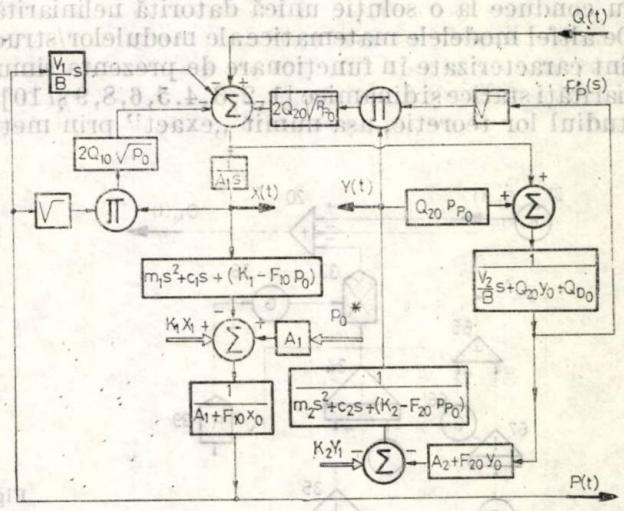
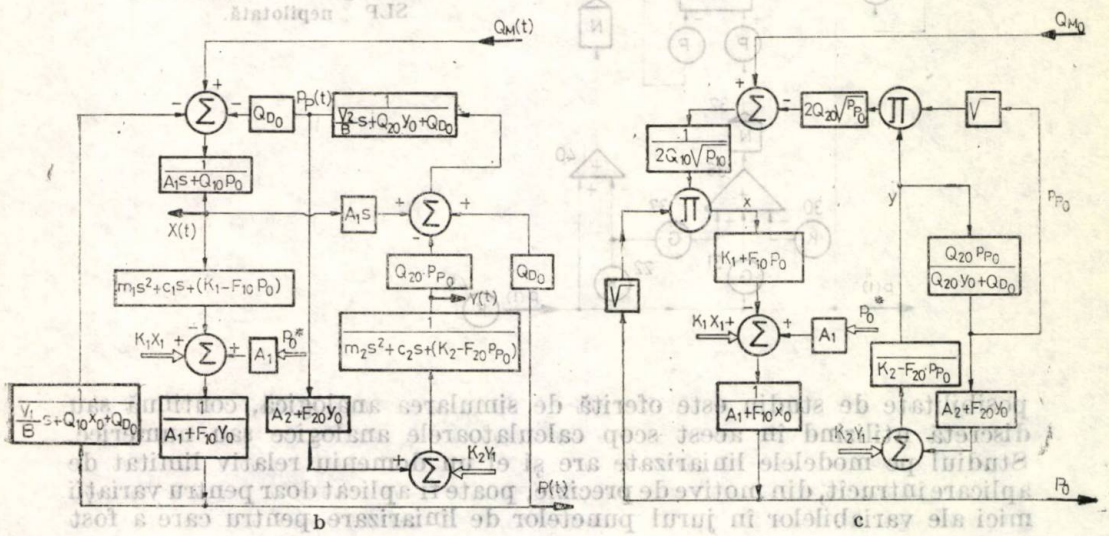


Figura 9. — Schemele bloc analogice ale modelelor matematice ale SLP pilotată cu intrare debit și ieșire presiune.



lică între conductele A și B ale motoarelor hidraulice rotative, în perioadele de autofrînare ale unor utilaje [2], acționate hidraulic. În aceste cazuri comportarea supapei trebuie reconsiderată pe baza noii cauzalități arătate, iar modelul matematic reorientat după noile intrări și ieșiri implicate. Figura 9 prezintă schemele bloc analogice reprezentînd modelele matematice neliniar, liniarizat și staționar ale supapei pilotate de limitare a presiunii care funcționează cu intrare debit și ieșire presiune.

5. SIMULAREA NUMERICĂ A REGIMULUI DINAMIC TRANZITORIU AL SUPAPEI NEPILOTATE DE LIMITARE A PRESIUNII

Rezolvarea modelului matematic format din ecuațiile (3.1)...(3.4) nu conduce la o soluție unică datorită neliniarităților pe care le conține. De altfel modelele matematice ale modulelor/structurilor de bază ale IAHE sînt caracterizate în funcționare de prezența simultană a mai multor neliniarități statice și dinamice [1,2,3,4,5,6,8,9 și 10]. Acest fapt face imposibil studiul lor teoretic, așa-numit „exact" prin metodele cunoscute; singura

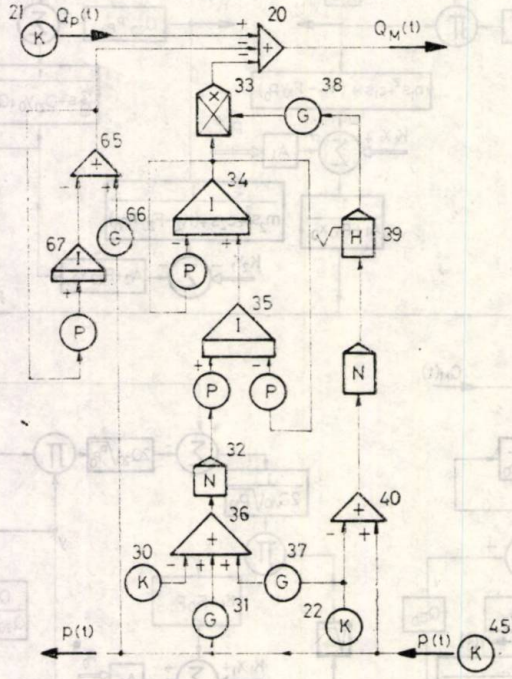


Figura 10. — Schema bloc analogică de calculator a SLP nepilotată.

posibilitate de studiu este oferită de simularea analogică, continuă sau discretă utilizînd în acest scop calculatoarele analogice sau numerice. Studiul pe modelele liniarizate are și el un domeniu relativ limitat de aplicare întrucît, din motive de precizie, poate fi aplicat doar pentru variații mici ale variabilelor în jurul punctelor de liniarizare pentru care a fost

operată înlocuirea curbei cu tangenta prin dezvoltarea în serie Taylor de puteri.

Simularea numerică constituie un mijloc modern şi eficace de rezolvare teoretică a ecuaţiilor modelelor matematice liniare, dar mai ales neliniare. Dintre limbajele folosite în prezent o variantă a limbajului CSMP-IBM se află implementată sub o formă completată SSC[7] pe sistemele de calcul Felix M18 şi M118.

Utilizînd limbajul de simulare SSC2 şi schema bloc analogică de calculator din figura 10 au fost realizate mai multe simulări care au fost dirijate în două direcţii şi anume :

(—) cunoaşterea şi ameliorarea comportării dinamice a SLP nepilotată ;

(—) cunoaşterea modului de cuplare şi de alegere ponderată a unei supape pentru o instalaţie cu o caracteristică dimensională dată.

Prezentăm în continuare cîteva dintre rezultatele simulărilor şi concluziile mai importante care s-au desprins din analiza acestora.

5.1. AMELIORAREA FUNCŢIONĂRII SUPAPEI NEPILOTATE DE LIMITARE A PRESIUNII

Ameliorarea comportării SLP nepilotată se poate face, dacă o privim ca un subsistem independent, după mai multe criterii dinamice, unul dintre acestea fiind acela al măririi amortizării; acesta determină obţinerea monotoniei debitului evacuat din instalaţie şi implicit a debitului Q_{C1} transmis prin conductă către motor în nodul I de amplasare (fig. 1) precum şi, fapt de neevitat, modificarea duratei t_t a regimului tranzitoriu. În figura 11 sînt prezentate rezultatele a două simulări în care coeficientului de amortizare de frecare vîscoasă, c_1, i-au fost asigurate valori diferite prin reglarea apropiată a rezistenţei amortizorului. Abaterea maximă a răspunsului tranzitoriu scade pe măsură ce c_1 creşte, iar t_r scade de asemenea. Un studiu aprofundat de analiză poate permite stabilirea tuturor interdependenţelor dintre parametrii hidraulici, dimensionali şi performanţele staţionare şi dinamice ale supapei, în cadrul procesului de sinteză.

5.2. CUPLAREA STRUCTURATĂ A SUPAPEI DE LIMITARE A PRESIUNII LA INSTALAŢIE

Comportarea staţionară sau/şi dinamică a supapei de limitare a presiunii interesează atît din punct propriu de vedere, dintre care evitarea rezonanţei acesteia este un obiectiv important, precum şi prin prisma proprietăţilor sale de cuplare cu instalaţia. Dintre acestea din urmă limitarea presiunii cu o cît mai mică creşterea presiunii de limitare în raport cu debitul expulzat (deci o pantă cît mai mică a caracteristicii $p_{lim} - \Delta Q$) este principala performanţă staţionară. Caracteristica de filtrare a oscilaţiilor din instalaţie precum şi introducerea în instalaţie într-o cît mai mică măsură a propriilor oscilaţii ale supapei constituie principalele performanţe dinamice care, alături de caracteristica tranzitorie de monotonie, prezentată deja, se cer unei supape de limitare a presiunii. Suprapunerea propriilor

TIMP	IESIRE(34)	IESIRE(35)	IESIRE(0)	IESIRE(33)
.000E+01	.00000E+01	.00000E+01	.00000E+01	.00000E+01
.200E-03	.10481E-03	.55402E+00	.00000E+01	.13847E-03
.400E-03	.25009E-03	.10030E+01	.00000E+01	.37298E-03
.600E-03	.44798E-03	.12733E+01	.00000E+01	.69240E-03
.800E-03	.65481E-03	.13334E+01	.00000E+01	.10263E-02
.100E-02	.83016E-03	.11955E+01	.00000E+01	.13093E-02
.120E-02	.94413E-03	.90822E+00	.00000E+01	.14933E-02
.140E-02	.98191E-03	.54310E+00	.00000E+01	.15542E-02
.160E-02	.94485E-03	.17852E+00	.00000E+01	.14944E-02
.180E-02	.84845E-03	-.11617E+00	.00000E+01	.13388E-02
.200E-02	.71277E-03	-.29248E+00	.00000E+01	.11279E-02
.220E-02	.58157E-03	-.33021E+00	.00000E+01	.90803E-03
.240E-02	.46644E-03	-.23775E+00	.00000E+01	.72220E-03
.260E-02	.39197E-03	-.47382E-01	.00000E+01	.60199E-03
.280E-02	.36777E-03	.19368E+00	.00000E+01	.56293E-03
.300E-02	.39281E-03	.43361E+00	.00000E+01	.60335E-03
.320E-02	.45676E-03	.62687E+00	.00000E+01	.70658E-03
.340E-02	.54307E-03	.74188E+00	.00000E+01	.84589E-03
.360E-02	.63275E-03	.76550E+00	.00000E+01	.99064E-03
.380E-02	.70833E-03	.70353E+00	.00000E+01	.11126E-02
.400E-02	.75699E-03	.57739E+00	.00000E+01	.11912E-02
.420E-02	.77248E-03	.41838E+00	.00000E+01	.12162E-02
.440E-02	.75557E-03	.26049E+00	.00000E+01	.11889E-02
.460E-02	.71315E-03	.13370E+00	.00000E+01	.11204E-02
.480E-02	.65616E-03	.58697E-01	.00000E+01	.10284E-02
.500E-02	.59711E-03	.43942E-01	.00000E+01	.93311E-03
.520E-02	.54749E-03	.85473E-01	.00000E+01	.85302E-03
.540E-02	.51570E-03	.16904E+00	.00000E+01	.80171E-03
.560E-02	.50579E-03	.27397E+00	.00000E+01	.78572E-03
.580E-02	.51720E-03	.37787E+00	.00000E+01	.80413E-03
.600E-02	.54534E-03	.46104E+00	.00000E+01	.84956E-03
.620E-02	.58297E-03	.50995E+00	.00000E+01	.91030E-03
.640E-02	.62185E-03	.51914E+00	.00000E+01	.97306E-03
.660E-02	.65443E-03	.49132E+00	.00000E+01	.10256E-02
.680E-02	.67519E-03	.43596E+00	.00000E+01	.10592E-02
.700E-02	.68152E-03	.36672E+00	.00000E+01	.10694E-02
.720E-02	.67383E-03	.29835E+00	.00000E+01	.10570E-02
.740E-02	.65516E-03	.24360E+00	.00000E+01	.10268E-02
.760E-02	.63031E-03	.21190E+00	.00000E+01	.98672E-03
.780E-02	.60672E-03	.20620E+00	.00000E+01	.94540E-03
.800E-02	.58334E-03	.22683E+00	.00000E+01	.91089E-03
.820E-02	.56977E-03	.26150E+00	.00000E+01	.88899E-03
.840E-02	.56573E-03	.30719E+00	.00000E+01	.88747E-03
.860E-02	.57092E-03	.35218E+00	.00000E+01	.89084E-03
.880E-02	.58330E-03	.38796E+00	.00000E+01	.91082E-03
.900E-02	.59970E-03	.40875E+00	.00000E+01	.93730E-03
.920E-02	.61655E-03	.41228E+00	.00000E+01	.96450E-03
.940E-02	.63054E-03	.39981E+00	.00000E+01	.98716E-03
.960E-02	.63945E-03	.37552E+00	.00000E+01	.10015E-02
.980E-02	.64202E-03	.34537E+00	.00000E+01	.10056E-02
.100E-01	.63853E-03	.31577E+00	.00000E+01	.99998E-03
.102E-01	.63032E-03	.29230E+00	.00000E+01	.98673E-03
.104E-01	.61949E-03	.27875E+00	.00000E+01	.96924E-03
.106E-01	.60840E-03	.27656E+00	.00000E+01	.95134E-03
.108E-01	.59918E-03	.28592E+00	.00000E+01	.93647E-03
.110E-01	.59340E-03	.30101E+00	.00000E+01	.92713E-03
.112E-01	.59176E-03	.32040E+00	.00000E+01	.92548E-03
.114E-01	.59411E-03	.34038E+00	.00000E+01	.92827E-03
.116E-01	.59955E-03	.35577E+00	.00000E+01	.93706E-03
.118E-01	.60670E-03	.36460E+00	.00000E+01	.94860E-03
.120E-01	.61401E-03	.36593E+00	.00000E+01	.96039E-03
.122E-01	.62005E-03	.36035E+00	.00000E+01	.97015E-03

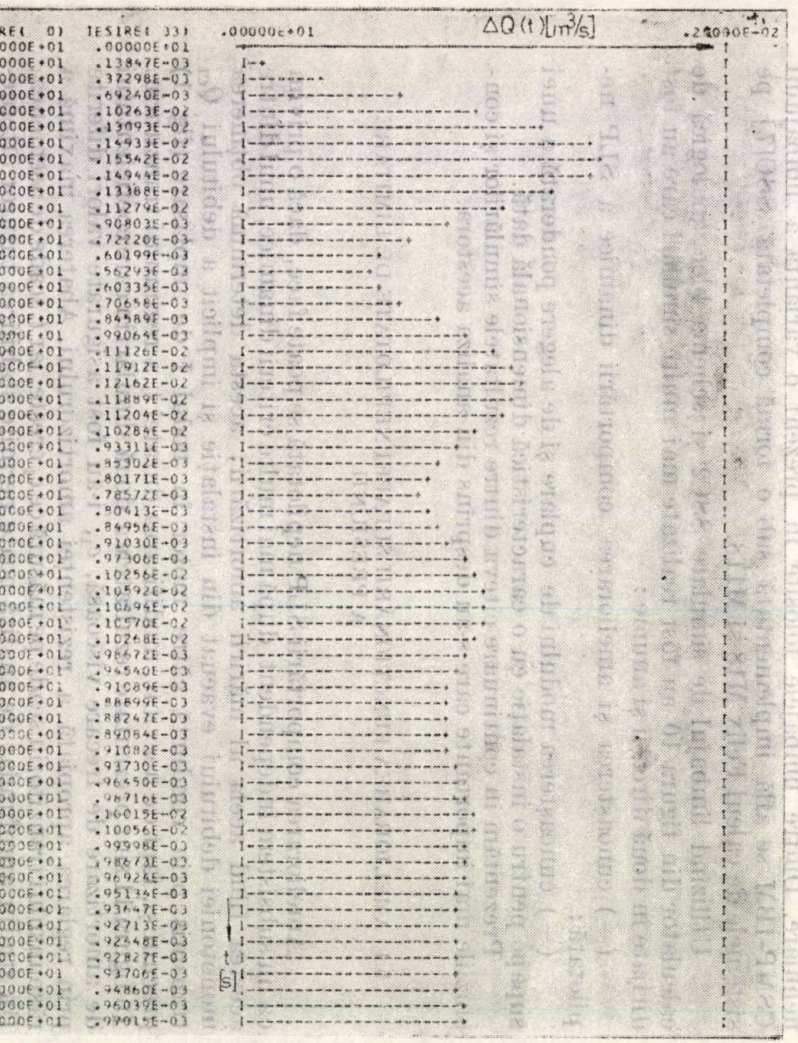


Fig. 11 — Rezultate ale simulării numerice a SLP nepilotată.

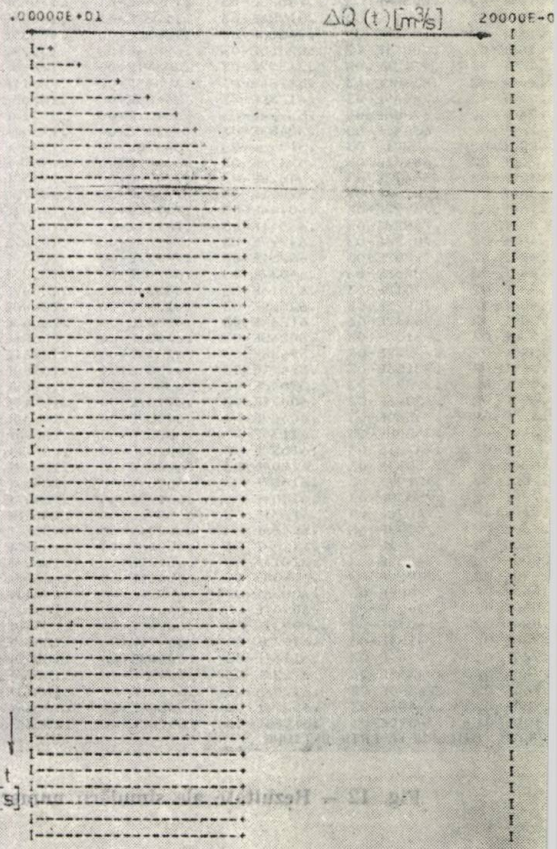
MULARE INTRERUPTA PRIN OPTIUNE

TIMP IESIRE(34) IESIRE(35) IESIRE(38) IESIRE(33) .00000E+01 .20000E-0

MULARE INTRERUPTA PRIN OPTIUNE

BLOC	TIP	INT1	INT2	INT3
22	K	0	0	0
30	K	0	0	0
31	G	45	0	0
33	X	34	38	0
34	I	0	34	35
35	I	0	62	34
36	+	-30	31	-37
37	G	22	0	0
38	G	39	0	0
39	H	60	0	0
40	+	-22	45	0
45	K	0	0	0
60	N	40	0	0
62	N	36	0	0

TIMP	IESIRE(34)	IESIRE(35)	IESIRE(38)	IESIRE(33)
.000E+01	.00000E+01	.00000E+01	.16142E+01	.00000E+01
.200E-03	.95109E-04	.55543E+00	.16142E+01	.12281E-03
.400E-03	.18031E-03	.10379E+01	.16142E+01	.26034E-03
.600E-03	.27096E-03	.14282E+01	.16142E+01	.40666E-03
.800E-03	.35214E-03	.17303E+01	.16142E+01	.53770E-03
.100E-02	.41896E-03	.19572E+01	.16142E+01	.64555E-03
.120E-02	.47126E-03	.21239E+01	.16142E+01	.72997E-03
.140E-02	.51035E-03	.22445E+01	.16142E+01	.79387E-03
.160E-02	.54011E-03	.23305E+01	.16142E+01	.84111E-03
.180E-02	.56136E-03	.23913E+01	.16142E+01	.87542E-03
.200E-02	.57658E-03	.24338E+01	.16142E+01	.89998E-03
.220E-02	.58736E-03	.24634E+01	.16142E+01	.91738E-03
.240E-02	.59493E-03	.24839E+01	.16142E+01	.92960E-03
.260E-02	.60020E-03	.24979E+01	.16142E+01	.93811E-03
.280E-02	.60385E-03	.25076E+01	.16142E+01	.94400E-03
.300E-02	.60637E-03	.25141E+01	.16142E+01	.94806E-03
.320E-02	.60809E-03	.25186E+01	.16142E+01	.95084E-03
.340E-02	.60926E-03	.25216E+01	.16142E+01	.95274E-03
.360E-02	.61006E-03	.25236E+01	.16142E+01	.95403E-03
.380E-02	.61061E-03	.25250E+01	.16142E+01	.95490E-03
.400E-02	.61097E-03	.25259E+01	.16142E+01	.95549E-03
.420E-02	.61122E-03	.25266E+01	.16142E+01	.95589E-03
.440E-02	.61139E-03	.25270E+01	.16142E+01	.95616E-03
.460E-02	.61150E-03	.25272E+01	.16142E+01	.95634E-03
.480E-02	.61157E-03	.25274E+01	.16142E+01	.95646E-03
.500E-02	.61162E-03	.25276E+01	.16142E+01	.95654E-03
.520E-02	.61166E-03	.25276E+01	.16142E+01	.95660E-03
.540E-02	.61168E-03	.25277E+01	.16142E+01	.95663E-03
.560E-02	.61169E-03	.25277E+01	.16142E+01	.95666E-03
.580E-02	.61170E-03	.25278E+01	.16142E+01	.95667E-03
.600E-02	.61171E-03	.25278E+01	.16142E+01	.95668E-03
.620E-02	.61171E-03	.25278E+01	.16142E+01	.95669E-03
.640E-02	.61172E-03	.25278E+01	.16142E+01	.95670E-03
.660E-02	.61172E-03	.25278E+01	.16142E+01	.95670E-03
.680E-02	.61172E-03	.25278E+01	.16142E+01	.95670E-03
.700E-02	.61172E-03	.25278E+01	.16142E+01	.95670E-03
.720E-02	.61172E-03	.25278E+01	.16142E+01	.95670E-03
.740E-02	.61172E-03	.25278E+01	.16142E+01	.95670E-03
.760E-02	.61172E-03	.25278E+01	.16142E+01	.95670E-03
.780E-02	.61172E-03	.25278E+01	.16142E+01	.95670E-03
.800E-02	.61172E-03	.25278E+01	.16142E+01	.95670E-03
.820E-02	.61172E-03	.25278E+01	.16142E+01	.95670E-03
.840E-02	.61172E-03	.25278E+01	.16142E+01	.95670E-03
.860E-02	.61172E-03	.25278E+01	.16142E+01	.95670E-03
.880E-02	.61172E-03	.25278E+01	.16142E+01	.95670E-03
.900E-02	.61172E-03	.25278E+01	.16142E+01	.95670E-03
.920E-02	.61172E-03	.25278E+01	.16142E+01	.95670E-03
.940E-02	.61172E-03	.25278E+01	.16142E+01	.95670E-03
.960E-02	.61172E-03	.25278E+01	.16142E+01	.95670E-03
.980E-02	.61172E-03	.25278E+01	.16142E+01	.95670E-03
.100E-01	.61172E-03	.25278E+01	.16142E+01	.95670E-03



MULARE INTRERUPTA PRIN OPTIUNE

Fig. 11b

	BLOC	TIP	INT1	INT2	INT3
	20	+	21	-33	0
	21	R	0	0	0
	22	R	0	0	0
	30	R	0	0	0
	31	G	45	0	0
	33	X	34	38	0
	34	I	0	34	35
	35	I	0	62	34
	36	+	30	31	-37
	37	G	22	0	0
	38	G	39	0	0
	39	H	60	0	0
	40	+	-22	45	0
	45	K	0	0	0
	60	N	40	0	0
	62	N	36	0	0

INTERVAL INTEGRARE = .200000E-03

TIMP	IESIRE(33)	IESIRE(34)	IESIRE(35)	IESIRE(20)	.00000E+01	$\longrightarrow Q_{C1}(t)[m^3/s]$	.25000E
.000E+01	.00000E+01	.00000E+01	.00000E+01	.25500E-02	I		
.020E-03	.12004E-03	.10681E-03	.56818E+00	.24800E-02	I		
.040E-03	.39208E-03	.24635E-03	.10781E+01	.23079E-02	I		
.060E-03	.51109E-03	.42399E-03	.13170E+01	.20889E-02	I		
.080E-03	.72535E-03	.59778E-03	.14102E+01	.18746E-02	I		
.100E-02	.89549E-03	.73578E-03	.13340E+01	.17045E-02	I		
.120E-02	.99914E-03	.81986E-03	.11732E+01	.16009E-02	I		
.140E-02	.10315E-02	.84606E-03	.93558E+00	.15685E-02	I		
.160E-02	.10021E-02	.82225E-03	.69864E+00	.15976E-02	I		
.180E-02	.93024E-03	.76397E-03	.50691E+00	.16698E-02	I		
.200E-02	.83885E-03	.68984E-03	.38658E+00	.17611E-02	I		
.220E-02	.74949E-03	.61734E-03	.34458E+00	.18505E-02	I		
.240E-02	.67858E-03	.55784E-03	.37151E+00	.19214E-02	I		
.260E-02	.63541E-03	.52483E-03	.44705E+00	.19648E-02	I		
.280E-02	.62201E-03	.51376E-03	.54620E+00	.19780E-02	I		
.300E-02	.63431E-03	.52394E-03	.64502E+00	.19657E-02	I		
.320E-02	.66432E-03	.54828E-03	.72494E+00	.19352E-02	I		
.340E-02	.70244E-03	.57921E-03	.77505E+00	.18975E-02	I		
.360E-02	.73972E-03	.60944E-03	.79749E+00	.18603E-02	I		
.380E-02	.76928E-03	.63341E-03	.78119E+00	.18307E-02	I		
.400E-02	.78726E-03	.64799E-03	.74944E+00	.18127E-02	I		
.420E-02	.79282E-03	.65251E-03	.70827E+00	.18072E-02	I		
.440E-02	.78766E-03	.64832E-03	.66705E+00	.18123E-02	I		
.460E-02	.77513E-03	.63816E-03	.63374E+00	.18249E-02	I		
.480E-02	.75922E-03	.62525E-03	.61287E+00	.18408E-02	I		
.500E-02	.74367E-03	.61264E-03	.60562E+00	.18563E-02	I		
.520E-02	.73135E-03	.60265E-03	.61036E+00	.18686E-02	I		
.540E-02	.72387E-03	.59658E-03	.62854E+00	.18761E-02	I		
.560E-02	.72158E-03	.59471E-03	.64081E+00	.18784E-02	I		
.580E-02	.72372E-03	.59646E-03	.65800E+00	.18765E-02	I		
.600E-02	.72896E-03	.60071E-03	.67189E+00	.18716E-02	I		
.620E-02	.73560E-03	.60609E-03	.68038E+00	.18644E-02	I		
.640E-02	.74208E-03	.61135E-03	.68359E+00	.18579E-02	I		
.660E-02	.74721E-03	.61552E-03	.68169E+00	.18528E-02	I		
.680E-02	.75033E-03	.61804E-03	.67609E+00	.18497E-02	I		
.700E-02	.75129E-03	.61882E-03	.66886E+00	.18487E-02	I		
.720E-02	.75038E-03	.61809E-03	.66172E+00	.18497E-02	I		
.740E-02	.74810E-03	.61631E-03	.65593E+00	.18518E-02	I		
.760E-02	.74543E-03	.61406E-03	.65231E+00	.18546E-02	I		
.780E-02	.74272E-03	.61187E-03	.65106E+00	.18573E-02	I		
.800E-02	.74058E-03	.61014E-03	.65189E+00	.18594E-02	I		
.820E-02	.73928E-03	.60908E-03	.65419E+00	.18607E-02	I		
.840E-02	.73889E-03	.60876E-03	.65720E+00	.18611E-02	I		
.860E-02	.73927E-03	.60907E-03	.66017E+00	.18607E-02	I		
.880E-02	.74018E-03	.60981E-03	.66260E+00	.18597E-02	I		
.900E-02	.74134E-03	.61075E-03	.66411E+00	.18583E-02	I		
.920E-02	.74246E-03	.61166E-03	.66463E+00	.18573E-02	I		
.940E-02	.74335E-03	.61239E-03	.66442E+00	.18566E-02	I		
.960E-02	.74390E-03	.61284E-03	.66332E+00	.18561E-02	[s] I		
.980E-02	.74406E-03	.61296E-03	.66206E+00	.18559E-02	I		
.100E-01	.74390E-03	.61284E-03	.66082E+00	.18561E-02	I		

BLANK INTRERUPTA PRIN OPTIUNE

a

Fig. 12 — Rezultate ale simulării numerice a SLP nepilotată, cuplată la instalație.

BLOC	TIP	INT1	INT2	INT3
20	+	21	-33	0
21	K	0	0	0
32	K	0	0	0
30	K	0	0	0
31	B	45	0	0
33	X	34	38	0
34	I	0	34	35
35	I	0	62	34
36	+	-30	31	-37
37	B	22	0	0
38	B	39	0	0
39	H	60	0	0
40	+	-22	45	0
45	K	0	0	0
60	N	40	0	0
62	N	36	0	0

TIMP	TESTRE(33)	TESTRE(34)	TESTRE(35)	TESTRE(20)
.000E+01	.00000E+01	.00000E+01	.00000E+01	.15500E-02
.200E-03	.12004E-03	.10681E-03	.56818E+00	.14806E-02
.400E-03	.29208E-03	.24636E-03	.10281E+01	.13079E-02
.600E-03	.51109E-03	.42399E-03	.13170E+01	.10889E-02
.800E-03	.72535E-03	.59778E-03	.14182E+01	.87465E-03
.100E-02	.89549E-03	.73578E-03	.13540E+01	.70451E-03
.120E-02	.99914E-03	.81986E-03	.11732E+01	.60086E-03
.140E-02	.10315E-02	.84606E-03	.93558E+00	.56855E-03
.160E-02	.10021E-02	.82225E-03	.69664E+00	.59791E-03
.180E-02	.93024E-03	.76397E-03	.50691E+00	.66976E-03
.200E-02	.83865E-03	.68984E-03	.38658E+00	.76135E-03
.220E-02	.74949E-03	.61736E-03	.34458E+00	.85051E-03
.240E-02	.67858E-03	.55984E-03	.37151E+00	.92142E-03
.260E-02	.63541E-03	.52483E-03	.44705E+00	.96459E-03
.280E-02	.62201E-03	.51396E-03	.54620E+00	.97799E-03
.300E-02	.63431E-03	.52394E-03	.64502E+00	.96569E-03
.320E-02	.66432E-03	.54828E-03	.72494E+00	.93568E-03
.340E-02	.70246E-03	.57921E-03	.77805E+00	.89754E-03
.360E-02	.73972E-03	.60944E-03	.79249E+00	.86028E-03
.380E-02	.76928E-03	.63341E-03	.78119E+00	.83072E-03
.400E-02	.78726E-03	.64799E-03	.74964E+00	.81274E-03
.420E-02	.79282E-03	.65251E-03	.70827E+00	.80718E-03
.440E-02	.78766E-03	.64832E-03	.66705E+00	.81234E-03
.460E-02	.77513E-03	.63816E-03	.63374E+00	.82487E-03
.480E-02	.75922E-03	.62525E-03	.61287E+00	.84078E-03
.500E-02	.74367E-03	.61264E-03	.60562E+00	.85633E-03
.520E-02	.73135E-03	.60265E-03	.61034E+00	.86865E-03
.540E-02	.72387E-03	.59658E-03	.62354E+00	.87613E-03
.560E-02	.72156E-03	.59471E-03	.64081E+00	.87844E-03
.580E-02	.72372E-03	.59646E-03	.65800E+00	.87628E-03
.600E-02	.72896E-03	.60071E-03	.67189E+00	.87104E-03
.620E-02	.73560E-03	.60609E-03	.68059E+00	.86440E-03
.640E-02	.74208E-03	.61135E-03	.68359E+00	.85792E-03
.660E-02	.74721E-03	.61552E-03	.68160E+00	.85279E-03
.680E-02	.75033E-03	.61804E-03	.67609E+00	.84967E-03
.700E-02	.75129E-03	.61882E-03	.66889E+00	.84871E-03
.720E-02	.75038E-03	.61809E-03	.66172E+00	.84962E-03
.740E-02	.74820E-03	.61631E-03	.65593E+00	.85180E-03
.760E-02	.74543E-03	.61406E-03	.65231E+00	.85457E-03
.780E-02	.74272E-03	.61187E-03	.65106E+00	.85728E-03
.800E-02	.74058E-03	.61014E-03	.65189E+00	.85942E-03
.820E-02	.73928E-03	.60908E-03	.65419E+00	.86072E-03
.840E-02	.73889E-03	.60876E-03	.65720E+00	.86111E-03
.860E-02	.73927E-03	.60907E-03	.66019E+00	.86073E-03
.880E-02	.74018E-03	.60981E-03	.66260E+00	.85982E-03
.900E-02	.74134E-03	.61075E-03	.66411E+00	.85866E-03
.920E-02	.74246E-03	.61166E-03	.66463E+00	.85754E-03
.940E-02	.74335E-03	.61239E-03	.66428E+00	.85664E-03
.960E-02	.74390E-03	.61282E-03	.66332E+00	.85610E-03
.980E-02	.74406E-03	.61296E-03	.66206E+00	.85594E-03
.100E 01	.74390E-03	.61283E-03	.66062E+00	.85610E-03

$Q_{C1}(t)$ [m³/s]

t [s]

STIMULARE INTRERUPTA PRIN OPTIUNE

Fig. 12b

BLOC	TIP	INT1	INT2	INT3
20	+	21	-33	0
21	K	0	0	0
22	K	0	0	0
30	K	0	0	0
31	G	45	0	0
33	X	34	38	0
34	I	0	34	35
35	I	0	62	34
36	+	30	31	-37
37	G	22	0	0
38	G	39	0	0
39	H	60	0	0
40	+	-22	45	0
45	K	0	0	0
60	N	40	0	0
62	N	36	0	0

TIMP	IESIRE(33)	IESIRE(34)	IESIRE(35)	IESIRE(20)
.000E+01	.00000E+01	.00000E+01	.00000E+01	.35500E-02
.200E-03	.12004E-03	.10481E-03	.56816E-03	.34800E-02
.400E-03	.29300E-03	.24635E-03	.10281E+01	.33079E-02
.600E-03	.51109E-03	.42399E-03	.13170E+01	.30889E-02
.800E-03	.72535E-03	.59778E-03	.14182E+01	.28744E-02
.100E-02	.89549E-03	.73578E-03	.13540E+01	.27045E-02
.120E-02	.99914E-03	.81986E-03	.11732E+01	.26009E-02
.140E-02	.10315E-02	.84606E-03	.93058E+00	.25685E-02
.160E-02	.10021E-02	.82225E-03	.69864E+00	.25979E-02
.180E-02	.93024E-03	.76397E-03	.50691E+00	.26696E-02
.200E-02	.83885E-03	.68984E-03	.36658E+00	.27611E-02
.220E-02	.74949E-03	.61736E-03	.34458E+00	.28505E-02
.240E-02	.67858E-03	.55984E-03	.37151E+00	.29214E-02
.260E-02	.63541E-03	.52483E-03	.44705E+00	.29646E-02
.280E-02	.62201E-03	.51396E-03	.54820E+00	.29786E-02
.300E-02	.63431E-03	.52394E-03	.64502E+00	.29657E-02
.320E-02	.66432E-03	.54828E-03	.72494E+00	.29357E-02
.340E-02	.70246E-03	.57921E-03	.77805E+00	.28975E-02
.360E-02	.73972E-03	.60944E-03	.79249E+00	.28603E-02
.380E-02	.76926E-03	.63341E-03	.78119E+00	.28307E-02
.400E-02	.78726E-03	.64799E-03	.74764E+00	.28127E-02
.420E-02	.79282E-03	.65251E-03	.70827E+00	.28072E-02
.440E-02	.78766E-03	.64832E-03	.66705E+00	.28123E-02
.460E-02	.77513E-03	.63816E-03	.63374E+00	.28249E-02
.480E-02	.75922E-03	.62525E-03	.61207E+00	.28408E-02
.500E-02	.74367E-03	.61264E-03	.60542E+00	.28563E-02
.520E-02	.73135E-03	.60265E-03	.61034E+00	.28685E-02
.540E-02	.72387E-03	.59656E-03	.62854E+00	.28761E-02
.560E-02	.72156E-03	.59471E-03	.64981E+00	.28784E-02
.580E-02	.72372E-03	.59646E-03	.66890E+00	.28763E-02
.600E-02	.72896E-03	.60071E-03	.67889E+00	.28710E-02
.620E-02	.73560E-03	.60609E-03	.67858E+00	.28644E-02
.640E-02	.74208E-03	.61135E-03	.66959E+00	.28579E-02
.660E-02	.74721E-03	.61552E-03	.65146E+00	.28528E-02
.680E-02	.75033E-03	.61804E-03	.62602E+00	.28497E-02
.700E-02	.75122E-03	.61882E-03	.59683E+00	.28488E-02
.720E-02	.75038E-03	.61809E-03	.56772E+00	.28496E-02
.740E-02	.74820E-03	.61631E-03	.54059E+00	.28518E-02
.760E-02	.74543E-03	.61406E-03	.51723E+00	.28546E-02
.780E-02	.74272E-03	.61187E-03	.49906E+00	.28573E-02
.800E-02	.74058E-03	.61014E-03	.48719E+00	.28594E-02
.820E-02	.73928E-03	.60908E-03	.48241E+00	.28607E-02
.840E-02	.73887E-03	.60876E-03	.48529E+00	.28611E-02
.860E-02	.73927E-03	.60907E-03	.49619E+00	.28607E-02
.880E-02	.74018E-03	.60981E-03	.51466E+00	.28597E-02
.900E-02	.74134E-03	.61075E-03	.53911E+00	.28583E-02
.920E-02	.74244E-03	.61166E-03	.56483E+00	.28570E-02
.940E-02	.74335E-03	.61239E-03	.58788E+00	.28560E-02
.960E-02	.74390E-03	.61282E-03	.60332E+00	.28554E-02
.980E-02	.74406E-03	.61296E-03	.60806E+00	.28552E-02
.100E-01	.74390E-03	.61283E-03	.60082E+00	.28561E-02

SIMULARE INTRERUPTA PRIN CAPTURE

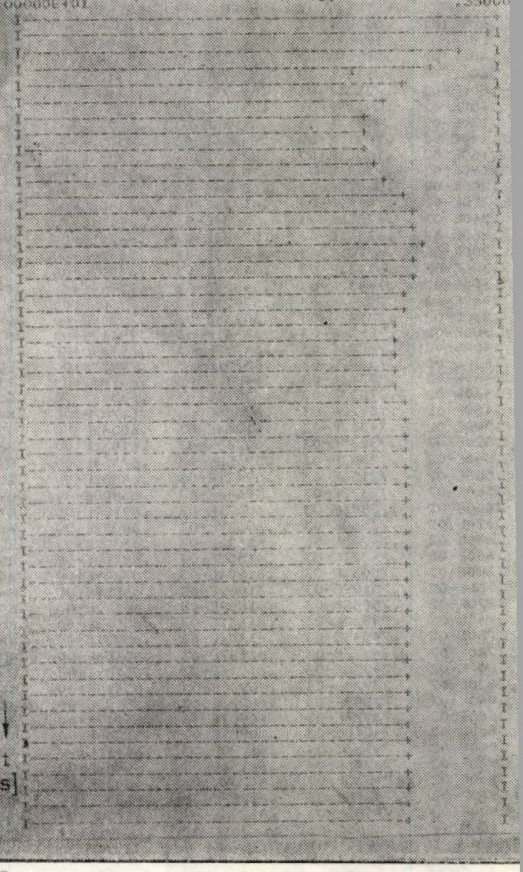


Fig. 12c

performanțe dinamice ale supapei peste comportarea dinamică a unei instalații este ponderată de amplificarea cu care instalația „simte" fenomenele proprii care însoțesc funcționarea supapei cuplată cu aceasta.

Limitîndu-ne doar la influența comportării tranzitorii au fost studiate mai multe variante de cuplări la instalații cu debite diferite Q_P = = const.; aceeași evoluție tranzitorie a debitului expulzat de supapă, ΔQ este , firesc, percepută în mod diferit de instalațiile testate, eroarea dinamică fiind cu atît mai mică cu cît, pentru aceeași supapă, debitul instalației (Q_P) este mai mare. În figura 12 sînt prezentate rezultatele simulării numerice a trei situații; valoarea debitului Q_P este înscrisă în dreptul blocului 21 fiind, totodată și formatul reprezentării debitului Q_{C1} care rămîne la dispoziția instalației după expulzarea debitului ΔQ prin supapa de limitare la testarea cu intrare treaptă a intrărilor $p(t)$ și $Q_{F_1}(t)$. Din aceste cîteva date prezentate se desprind următoarele concluzii mai importante:

(—) funcționarea unei instalații este afectată de supapa de limitare a presiunii în mod direct, dar ponderat de contribuția cantitativă a acesteia;

(—) comportarea dinamică tranzitorie a supapei interferează cu cea a restului instalației, în mod diferențiat și o influențează în special dacă caracteristicile de frecvență ale pompei și supapei sînt apropiate sau identice. Un studiu aprofundat poate elucida această latură a problemei ce este, însă, mult mai complexă decît s-a expus în rîndurile de față întrucît implică și restul elementelor din instalație.

6. CONCLUZII

Conținutul lucrării de față reprezintă un raport parțial asupra cercetărilor dezvoltate în scopul fundamentării unei metode de modelare matematică și de simulare structurată elaborată pentru trecerea la analiza și sinteza asistată de calculator a instalațiilor de automatizare hidraulică și electrohidraulică, cercetări dirijate către analiza, optimizarea și implementarea structurată a SLP în aceste instalații. Metoda reprezintă o cale originală propusă și fundamentată de autor și care își găsește aplicație în special în studiul instalațiilor complicate și în care sînt implicate echipamente diverse, scurtîndu-se astfel procesul modelării matematice cu modele „locale". Alături de avantajul arătat mai sus mai trebuie arătat faptul că la dispoziția utilizatorilor se află modele ale modulelor standard (pompă, motor, conducte, supape diferite, acumulatori, drosel și/cu regulator, filtre etc.), modele care ca și SLP au fost supuse unui amplu proces de analiză, verificare și optimizare. Utilizînd modulele elaborate s-a trecut la conceperea unui procesor de analiză asistată prin simulare numerică precum și a pre- și postprocesorului necesare sintezei, optimale/suboptimale a instalațiilor, sinteză asistată complet de calculator. Se deschide astfel perspectiva de trecere, pe baza cercetărilor viitoare la proiectarea complet asistată a instalațiilor hidraulice și electrohidraulice de automatizare și a structurilor mecanice compliante, tendință modernă și imperioasă în stadiul actual al cibernetizării procesului de cercetare și proiectare.

Primită la redacție la 21 aprilie 1983

BIBLIOGRAFIE

1. TH. BORANGIU, R. DOBRESCU și FL. IONESCU, *Structuri moderne de conducere automată a mașinilor-unelte*, București, Edit. tehnică, 1982.
2. FL. IONESCU, *Contribuții la studiul lanțurilor cinematice ale mașinilor-unelte acționate hidrostatic, cu reglare volumică continuă*, Teză de doctorat, Institutul politehnic, București, 1981.
3. FL. IONESCU, *Numerical Simulation of Hydrostatic Transmissions with Variable Displacement Pump and Motor*, Proceedings of AMSE'81 International Conference on Applied Modelling and Simulation. Lyon, France, 7—11 September 1981, IIIrd volume, p. 65—68.
4. FL. IONESCU, *Structured Modelling and Simulation Method of Hydraulic and Electrohydraulic Drive Installations*, Proceedings of AMSE'82 International Conference on Modelling and Simulation. Vallée de Chevreuse, France, 1—3 July 1982, IXth volume, p. 99—105.
5. FL. IONESCU, *Fundamentals of Structured Modelling and Simulation of Hydraulic and Electrohydraulic Drive Installations*, Proceedings of IInd IASTED Applied Modelling and Simulation Symposia. Paris, France, 29 June — 2 July 1982.
6. FL. IONESCU și M. IOSIF, *Analysis of a Digital Electrohydraulic Servoactuator for Position of Machine Tools Slides*, Proceedings of 9th International Fluidics „JABLONNA" Conference. Jablonna, Poland, 6—10 September 1982.
7. A. M. NECULA, și E. KALISZ, *Simularea sistemelor continue și discrete. Simulator de sisteme continue*, București, Litografia, I.P.B., 1982.
8. A. OPREAN, FL. IONESCU și A. DORIN, *Acționări hidraulice. Elemente și sisteme*, București, Edit. tehnică, 1982.
9. K. N. REID, *Dynamic Models of Fluid Transmission Lines*, Proceedings of Fluid Internal Flows, Pensylvania State University, U.S.A., 24—25 October 1968.
10. T. J. VIERSMA, *Analysis, Synthesis and Design of Hydrostatic Servosystems and Pipelines*, Amsterdam, Elsevier 1980.

DETERMINAREA COMPARATIVĂ A CAPACITĂȚII DE AȘCHIERE A SCULELOR, PRIN CALCUL NUMERIC

de GLADCOV PETRE,

Institutul Politehnic, București

În lucrare se prezintă o metodă practică de calcul al calității comparative a sculelor aşchietoare. Metoda propusă poate fi utilizată la stabilirea capacității de aşchiere, reflectînd calitatea sculelor aşchietoare, pentru practic orice caz posibil de întîlnit în aşchierea metalelor pe maşini unelte.

Se propune un model vectorial şi un program de calculator pentru punerea în evidență a calității comparative a diferitelor scule disponibile la un moment dat pentru orice proces tehnologic de aşchiere.

În numeroase cazuri, fiecare tip de sculă aşchietoare utilizată într-o secție oarecare de producție se folosește la prelucrarea cu regimuri de aşchiere variabile, a unor materiale cu proprietăți diferite din punctul de vedere al prelucrabilității.

Totodată, în diferitele procese de aşchiere pe care le execută o anumită categorie de scule, se impune satisfacerea unui ansamblu de condiții tehnice, variabile ca natură, ca număr şi ca importanță.

Toate acestea impun necesitatea studierii cu ajutorul unui model matematic adecvat, a capacității de aşchiere a sculelor ($C\,A\,S$), definită ca noțiune ce exprimă gradul în care o sculă aşchietoare oarecare satisface ansamblul condițiilor tehnice impuse în procesul aşchierii.

În acest scop, admitem următoarele variabile întregi şi pozitive: $j = 1 \ldots s$ scule de apreciat din punctul de vedere al $C\,A\,S$; $m = 1 \ldots w$ materiale distincte prelucrate; $i = 1 \ldots r\ (m)$ regimuri diferite, utilizate la aşchierea materialului m; $q = 1 \ldots c$ criterii de apreciere a $C\,A\,S$ (de exemplu: durabilitatea tăişurilor, rugozitatea suprafețelor prelucrate, siguranța în funcționare a sculei etc.).

Evident că diferite tipuri sau mărci de scule j, satisfac de cele mai multe ori în mod diferit criteriile q de apreciere interesante într-un caz dat. Problema determinării comparative a CAS, deci a calității sculelor disponibile, se reduce la a determina un şir decrescător al valorilor numerice ale $C\,A\,S$ disponibile, ținînd cont atît de valorile variabilelor sistemului tehnologic analizat, cît şi de măsura în care sculele comparate satisfac fiecare dintre condițiile impuse.

În aceste condiții capacitatea de aşchiere a oricărei scule analizate poate fi reflectată de un model matematic, vectorial, într-un spațiu multidimensional, în care fiecare direcție reflectă o anumită condiție tehnică impusă. Fiecare vector $C\,A\,S_j$ caracterizînd scula j, constituie proiecția pe o anumită direcție, a rezultantei unor vectori caracteristici ai satisfacerii criteriilor de apreciere a $C\,A\,S$, de către scula j.

În figura 1 se prezintă vectorul $C\,A\,S_j$ şi vectorii caracteristici $C\,A_{qj}$ (care reflectă satisfacerea de către scula j, a condiției q pentru cazul considerării a patru criterii de apreciere).

St. cerc. mec. apl., tom. 43, nr. 2, 1984, p. 189–196

Fiecare dintre vectorii caracteristici sînt definiți pe axele unui sistem multidimensional, în care fiecare axă reprezintă cîte o condiție tehnică impusă, iar fiecare vector de pe aceste axe are o anumită mărime, proporțională cu valoarea ce caracterizează măsura satisfacerii criteriului oarecare q de apreciere a $C\,A\,S$, corespunzător condițiilor impuse.

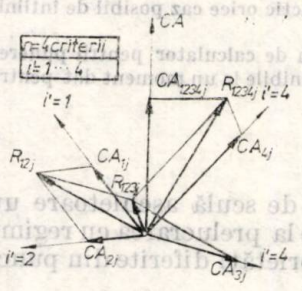


Fig. 1. — Modelul matematic vectorial al capacității de așchiere a sculelor.

În cazul cel mai simplu întîlnit în practică, este necesar a se compara mai multe tipuri sau mărci de scule, destinate să lucreze la un singur regim de așchiere, iar aprecierea calității sculelor se face pe baza unui singur criteriu. De obicei acesta este durabilitatea, la regimul de lucru.

Evident, în acest caz sistemul de referință are o singură semiaxă, iar pentru compararea vectorilor $C\,A_j$ este suficient să comparăm modulele acestora, avînd chiar valorile durabilităților T_j.

În cazul ceva mai complicat (dar foarte des întîlnit), cînd sculele urmează a lucra la mai multe regimuri de așchiere, cu toate că unitățile de măsură în care putem exprima $C\,A\,S$ pot fi tot unități de timp, este necesar să ținem cont de ponderea utilizării fiecărui regim de așchiere, în funcție (de exemplu) de volumul V_i de material îndepărtat prin așchiere cu regimul de lucru notat cu indicele i.

Admițînd niște coeficienți K_i, de pondere a regimurilor de așchiere ce interesează, calculați cu relația:

$$K_i = \frac{V_i}{\sum_{i=1}^{r} V_i}, \tag{1}$$

se poate calcula o durabilitate echivalentă, realizată de diferitele scule j comparate, astfel:

$$T_{ej} = \sum_{i=1}^{r} K_i\, T_{ij}. \tag{2}$$

Aceasta echivalează cu a calcula rezultanta unui sistem de vectori T_{ij}, poziționați într-un spațiu multidimensional, sub unghiurile ξ_i față de direcția unică impusă pentru rezultanta T_{ej}, astfel încît

$$\xi_j = \arccos K_i,\ K_i \in [0,1]. \tag{3}$$

La prelucrarea cu același tip de sculă a unui număr de w materiale diferite, vom obține durabilități echivalente diferite : T_{emj}, pentru fiecare dintre cele w materiale prelucrate, notate cu indicele m.

Similar cu modul în care s-a precedat anterior, admitem niște coeficienți K_{pm} de pondere a materialelor prelucrate, calculați ca un raport între volumul fiecărui material îndepărtat prin așchiere și volumul total al materialelor așchiate, astfel :

$$K_{pm} = \frac{V_m}{\sum_{m=1}^{w} V_m}. \tag{4}$$

În relația de mai sus, V_m reprezintă volumul total al materialului m prelucrat cu sculele analizate, la toate regimurile $i(m)$, iar $\sum_{m=1}^{w} V_m$ reprezintă volumul îndepărtat prin așchiere din toate cele w materiale prelucrate în cazul considerat.

În aceste condiții, pentru fiecare sculă j, se poate calcula o durabilitate echivalentă T_{ej}^{w}, pentru prelucrarea tuturor celor w materiale ce intră în discuție, la regimurile specifice așchierii fiecărui material m.

Calculul se poate realiza comod, cu ajutorul relației :

$$T_{ej}^{w} = \sum_{m=1}^{w} K_{pm}\, T_{emj} = \sum_{m=1}^{w} K_{pm} \sum_{i=1}^{r_m} K_i\, T_{ij}. \tag{5}$$

În cazul opțiunii pentru metodele clasice de calcul numeric, este indicat ca acest calcul să se efectueze tabelar.

Raționamentul în baza căruia s-a obținut expresia durabilității echivalente se poate repeta pentru oricare dintre criteriile posibile pentru aprecierea $C\,A\,S$, ca de exemplu pentru rugozitatea suprafețelor prelucrate, sau pentru precizia acestor suprafețe.

Pentru rugozitate, vom obține expresia rugozității echivalente :

$$R_{ej}^{w} = \sum_{m=1}^{w} K_{pm}\, R_{emj} = \sum_{m=1}^{w} K_{pm} \sum_{i=1}^{r_m} K_i\, P_{ij}. \tag{6}$$

Tot astfel, expresia preciziei echivalente va fi :

$$P_{ej}^{w} = \sum_{m=1}^{w} K_{pm}\, P_{emj} = \sum_{m=1}^{w} K_{pm} \sum_{i=1}^{r_m} K_i P_{ij}. \tag{7}$$

În mod similar se pot obține expresii pentru orice alt criteriu de apreciere a $C\,A\,S$, ce poate avea importanță într-un caz practic oarecare, considerat.

Este necesar să observăm că pentru a însuma (conform figurii 1) vectori cu semnificații fizice diferite, este necesar să operăm nu cu valorile

propriu-zise ale vectorilor, ci cu transformatele N_{qj} ale vectorilor $X_{qj} = T^w_{ej}, R^w_{ej}, P^w_{ej}$ etc., într-un sistem adimensional, procentual.

Calculul se poate efectua comod, cu ajutorul relației:

$$N_{qj} = \left(\frac{X_{qj}}{X_{qo}}\right)^{\text{sign } q} \cdot 100, \ [\%], \tag{8}$$

unde sign $q = +1$ cînd $X_{qo} = X_{q\ max}$,

$$\text{sign } q = -1 \text{ cînd } X_{qo} = X_{q\ min}. \tag{9}$$

Pentru calculul $C\,A\,S_j$ în cazul evaluării acesteia în funcție de mai multe criterii de apreciere, este necesar deci să determinăm rezultanta vectorilor N_{qj}. Aceștia sînt orientați sub diferite unghiuri față de direcția $C\,A\,S$, pe axele corespunzătoare criteriilor de apreciere a $C\,A\,S$.

Unghiurile ξ_q de înclinație a axelor criteriilor pot fi calculate cu relația:

$$\xi_q = \text{arc cos } K_q, \quad K_q\ [0,1], \tag{10}$$

în care K_q sînt niște coeficienți ce exprimă importanța fiecărui criteriu (q) de apreciere a $C\,A\,S$, în mod similar cu coeficienții de pondere a regimurilor de lucru K_i.

Întrucît în orice sistem vectorial proiecția rezultantei pe o direcție oarecare este egală cu rezultanta proiecțiilor vectorilor pe aceeași direcție, rezultă relația:

$$C\,A\,S_j = \sum_{q=1}^{c} K_q \cdot N_{qj}, \tag{11}$$

care exprimă numeric, valoarea capacității de așchiere a oricărei scule.

Cunoașterea vectorilor $C\,A\,S_j$, ce caracterizează sculele analizate, permite stabilirea imediată a sculei optime din punct de vedere calitativ, pentru orice caz concret dat.

Evident că se poate considera sculă optimă din punct de vedere calitativ, aceea sculă care are capacitatea maximă de așchiere.

Cunoașterea valorii numerice a capacității de așchiere a diferitelor scule disponibile la un anumit moment într-o secție de producție sau într-o întreprindere oarecare, mai dă posibilitatea aprecierii comparative a calității tuturor sculelor disponibile, în raport cu scula optimă determinată, ținîndu-se cont de ansamblul condițiilor tehnice impuse în procesul de așchiere, considerate în calculele prezentate anterior.

Pentru aprecierea calității tuturor sculelor disponibile în raport cu scula optimă, se poate calcula capacitatea de așchiere relativă a fiecărei scule în raport cu capacitatea de așchiere a sculei optime determinate.

Calculul capacității de așchiere relative a sculelor considerate ($C\,A\,R\,S_j$) se poate face comod, cu relația;

$$C\,A\,R\,S_j = \frac{C\,A\,S_j}{C\,A\,S_{max}} \cdot 100. \ [\%] \tag{12}$$

Relația (12) permite aprecierea procentuală a calității oricărei scule analizate, față de calitatea sculei pentru care a rezultat calitatea cea mai bună, exprimată de capacitatea de așchiere maximă.

Algoritmul de calcul propus pentru determinarea comparativă a capacității de așchiere a sculelor, a fost aplicat în Institutul Politehnic din București, în vederea determinării capacității de așchiere a unor cuțite de strung de tip lateral dreapta, armate cu plăcuțe din carburi metalice realizate la ICEM — București, pentru strunjirea unor categorii de fonte.

Capacitatea de așchiere a acestor cuțite s-a comparat cu cea a unor cuțite similare, armate cu plăcuțe realizate de firme cu renume mondial, în vederea determinării calității sculelor armate cu plăcuțe de acest tip, într-un ansamblu de condiții tehnice de exploatare precizate.

Întrucît numărul parametrilor luați în considerare, ca și cel al valorilor concrete ale acestor parametri a fost relativ mare, s-a apelat la un program de calcul în limbaj FORTRAN, care a fost rulat pe un calculator de tip IBM 7040. Programul este prezentat în tabelul 1.

Programul de calcul propus aplică modelul matematic prezentat anterior, cu observația că din motive din sintaxă și ortografie a programării, unele simboluri au fost notate în program în mod diferit față de modul în care au fost notate în textul prezentat anterior.

Programul de calcul a luat în considerare un complex de condiții de lucru, în care se impune respectarea în anumite proporții,a trei criterii de apreciere a calității sculelor analizate : o durabilitate maximă a sculelor, o siguranță maximă în realizarea acestei durabilități, ca și o rugozitate minimă a suprafețelor prelucrate.

Necesitatea asigurării fiecăreia dintre aceste trei condiții impuse, a fost exprimată de trei coeficienți de importanță (Kq) a criteriilor de apreciere a capacității de așchiere.

Coeficientul de importanță a durabilității a fost notat cu KIT cel al importanței rugozității R_a a suprafețelor prelucrate s-a notat cu $KIRA$, iar coeficientul de importanță a siguranței în funcționarea sculelor a fost notat cu KIS. Valorile acestor coeficienți subunitari s-au stabilit în concordanță cu cerințele generale ale proceselor tehnologice, astfel încît să fie îndeplinită totodată și condiția :

$$KIT + KIRA + KIS = 1. \tag{13}$$

Programul de calcul al capacității de așchiere a sculelor a fost întocmit pentru cazul strunjirii a patru categorii de materiale diferite, din care se îndepărtează prin așchiere volume diferite de material.

Ponderea volumelor de material îndepărtat prin așchiere din fiecare dintre tipurile de fonte așchiate, a fost exprimată de coeficienții de pondere (K_{pm}), notați în program prin simbolul $KP(M)$. Suma coeficienților de pondere a celor patru tipuri de materiale rezultă egală cu unitatea :

$$\sum_{M=1}^{4} KP(M) = 1. \tag{14}$$

Tabelul 1

Program pentru calculul capacității de așchiere

```
      DIMENSION T(4,8,5),T1(4,8,5),T2(4,8,5),K1(4,8),TE(4,5),
     *TE1(5),NT(5),KP(4),NRA(5),SE(5),GA(5),CAR(5)
      REAL KIT,KIRA,KIS,K1,NT,KP,NRA
      READ(105,2) (KP(I),I=1,4)
    1 FORMAT(16F3.2)
    2 FORMAT(4F3.2)
    3 FORMAT(20F4.1)
   13 FORMAT(//10X,5(F10.3,5X)/10X,5(F10.3,5X)/10X,5(F10.3,5X)/10X,5(F10
     1.3,5X))
   11 FORMAT(//10X,5(F10.3,5X))
   12 FORMAT(90X,F10.3)
      DO 10 I=1,5
      DO 10 J=1,4
      TE(J,I)=0
   10 CONTINUE
      READ(105,1) ((K1(M,I),I=1,8),M=1,4)
      READ(105,3) (((T(M,I,J),J=1,5),I=1,8),M=1,4)
      DO 20 M=1,4
      DO 20 J=1,5
      TE1(J)=0
      DO 20 I=1,8
      TE(M,J)=TE(M,J)+K1(M,I)*T(M,I,J)
   20 CONTINUE
      WRITE(108,13) ((TE(M,J),J=1,5),M=1,4)
      DO 30 L=1,5
      DO 30 K=1,4
      TE1(L)=TE1(L)+TE(K,L)*KP(K)
   30 CONTINUE
      WRITE(108,11)(TE1(L),L=1,5)
      TE10=AMAX1(TE1(1),TE1(2),TE1(3),TE1(4),TE1(5))
      WRITE(108,12) TE10
      DO 40 J=1,5
      NT(J)=TE1(J)*100/TE10
   40 CONTINUE
      READ(105,3) (((T1(M,I,J),J=1,5),I=1,8),M=1,4)
      DO 50 I=1,5
      DO 50 J=1,4
      TE(J,I)=0
   50 CONTINUE
      DO 60 M=1,4
      DO 60 J=1,5
      TE1(J)=0
      DO 60 I=1,8
      TE(M,J)=TE(M,J)+K1(M,I)*T1(M,I,J)
   60 CONTINUE
      WRITE(108,13) ((TE(M,J),J=1,5),M=1,4)
      DO 70 L=1,5
      DO 70 K=1,4
      TE1(L)=TE1(L)+TE(K,L)*KP(K)
   70 CONTINUE
      WRITE(108,11)(TE1(L),L=1,5)
      TE101=AMIN1(TE1(1),TE1(2),TE1(3),TE1(4),TE1(5))
      WRITE(108,12) TE101
      DO 80 J=1,5
      NRA(J)=TE101*100/TE1(J)
```

Tabelul 1 (continuare)

```
 80 CONTINUE
    READ(105,3) (((T2(M,I,J),J=1,5),I=1,8),M=1,4)
    DO 90 I=1,8
    DO 90 J=1,4
    TE(J,I)=0
 90 CONTINUE
    DO 100 M=1,4
    DO 100 J=1,5
    TE(J)=0
    DO 100 I=1,8
    TE(M,J)=TE(M,J)+K1(M,I)*(T2(M,I,J)/10)
100 CONTINUE
    WRITE(108,13) ((TE(M,J),J=1,5),M=1,4)
    DO 110 L=1,5
    DO 110 K=1,4
    TE1(L)=TE1(L)+TE(K,L)*KP(K)
110 CONTINUE
    WRITE(108,11)(TE1(L),L=1,5)
    TE102=AMAX1(TE1(1),TE1(2),TE1(3),TE1(4),TE1(5))
    WRITE(108,12) TE102
    DO 120 J=1,5
    SE(J)=TE1(J)*100/TE102
120 CONTINUE
    READ(105,4) KIT,KIRA,KIS
  4 FORMAT(3F3.2)
    DO 130 J=1,5
    CA(J)=KIT*NT(J)+KIRA*NRA(J)+KIS*SE(J)
130 CONTINUE
    WRITE(108,14) (CA(J),J=1,5)
 14 FORMAT(///19X,'LISTA CAPACITATII DE ASCHIERE A SCULELOR :'//20X,
   1'SCULA1: ',F7.2,'  SCULA2: ',F7.2,'  SCULA3: ',F7.2,'  SCULA4: ',
   1F7.2,'  SCULA5: ',F7.2)
    CA0=AMAX1(CA(1),CA(2),CA(3),CA(4),CA(5))
    DO 140 J=1,5
    CAR(J)=CA(J)*100/CA0
140 CONTINUE
    WRITE(108,6)
  6 FORMAT(///30X,'CALIFICATIVELE CE CARACTERIZEAZA REALIZAREA INDICATO
   1RILOR'//30X,57('='))
    WRITE(108,7)(NT(J),J=1,5)
  7 FORMAT(///15X,'CALIFICATIVELE PENTRU REALIZAREA DURABILITATII :'//
   120X,'SCULA1: ',F7.2,'  SCULA2: ',F7.2,'  SCULA3: ',F7.2,'  SCULA4:
   1 ',F7.2,'  SCULA5: ',F7.2)
    WRITE(108,8)(NRA(J),J=1,5)
  8 FORMAT(///15X,'CALIFICATIVELE PENTRU REALIZAREA RUGOZITATII SUPRAFE
   1TELOR PRELUCRATE:'//20X,'SCULA1: ',F7.2,'  SCULA2: ',F7.2,'  SCULA
   13: ',F7.2,'  SCULA4: ',F7.2,'  SCULA5: ',F7.2)
    WRITE(108,9)(SE(J),J=1,5)
  9 FORMAT(///15X,'CALIFICATIVELE PENTRU REALIZAREA SIGURANTEI :'//20X,
   1'SCULA1: ',F7.2,'  SCULA2: ',F7.2,'  SCULA3: ',F7.2,'  SCULA4: ',
   1F7.2,'  SCULA5: ',F7.2)
    WRITE(108,3) (CAR(J),J=1,5)
  3 FORMAT(///40X,'LISTA CUPRINZIND CAPACITATEA DE ASCHIERE RELATIVA'/
   140X,49('=')//25X,96('*')//25X,'*      SCULA 1      ','*      SCULA 2
   1      ','*      SCULA 3      ','*      SCULA 4      ','*      SCULA 5
   1      *'//25X,96('*')//25X,5('*      ',F7.2,'      ').'*'//25X,
   196('*'))
    STOP
    END
```

Se știe că fiecare tip de material, fiind caracterizat de o anumită prelucrabilitate prin așchiere (determinată la rîndul ei de un anumit complex de proprietăți elementare ale materialului), se prelucrează în condiții tehnico-economice acceptabile, cu anumite regimuri de lucru, determinate de toate aceste proprietăți. Regimurilor reprezentative de prelucrare a materialelor diferite li s-au acordat niște coeficienți ai gradului de utilizare K_i, variabil conform relației (2), astfel încît la fiecare tip de material, suma ponderilor regimurilor de așchiere să rezulte egală cu unitatea, similar ca și în cazul coeficienților de pondere a materialelor prelucrate.

Programul de calcul este astfel conceput încît permite tipărirea la imprimantă a capacității de așchiere a fiecăreia din sculele analizate (exprimată într-un sistem adimensional, procentual), ca și a capacității de așchiere relative a sculelor, exprimată de asemenea, în sistemul adimensional, procentual.

Totodată se tipăresc și calificativele ce caracterizează realizarea indicatorilor analizați, în vederea posibilității de a se explica detaliat logica ordonării sculelor în funcție de capacitatea de așchiere calculată.

Cu modificări minime, programul de calcul propus poate fi extins și la analiza unor alte criterii de apreciere a sculelor, la un alt număr de materiale prelucrate, sau de scule analizate.

Modelul matematic, algoritmul și programul de calcul pe calculator propuse, satisfac un deziderat major al secțiilor de producție : acela de a avea la îndemînă un instrument matematic comod de utilizat, în scopul aprecierii comparative a capacității de așchiere a diferitelor scule disponibile.

Cele de mai sus permit aprecierea comparativă a calității sculelor așchietoare, față de un complex de condiții oarecare impuse în cadrul oricărui proces de așchiere.

(Primită la redacție la 2 mai 1979)

BIBLIOGRAFIE

1. P. GLADCOV, *Contribuții privind studiul capacității de așchiere a cuțitelor armate cu plăcuțe de carburi metalice românești, la strunjirea fontelor*, Teza de doctorat, Institutul Politehnic, București, 1978.
2. P. GLADCOV, *Considerații privind indicatorii de apreciere a capacității de așchiere a sculelor așchietoare*, Construcția de mașini, *2* (1976).
3. P. GLADCOV, I. HRISTACHE, *Determinarea cu metode statistice a regimurilor de așchiere*, Revista de statistică, *2* (1975).
4. N. TANIGUCHI, *On the Evaluation of Machinability, Gridability and other Workabilities Based en Specific Cost of Production*, Annals of CIRP, **19/3** (1971).
5. G. M. LIHTIER, D. I. SEMENCENCO, *Sravnitelnaia otenka kacestva rejuşcego instrumenta dlea avtomaticeskih linii*, Stanki i Instrument, *10* (1975).

RECENZII

FRITZ LEONHARDT, BRÜCKEN, *Ästhetik und Gestaltung.* BRIDGES. *Aesthetics and Design.* Detusche Verlags-Anstalt GmbH, Stuttgart, 1982, 304 pagini cu 696 fotografii din care 326 color, DM 148. —

La vîrsta de 73 ani și după o carieră prodigioasă de 50 ani cunoscutul inginer, profesor și om de știință *Fritz Leonhardt* publică o lucrare bilingvă monumentală consacrată esteticii și concepțiilor de proiectare a podurilor de toate tipurile și din toate timpurile. Structura unitară și caracterul filozofic al cărții conferă evenimentului editorial o semnificație de interes mondial. Într-adevăr, așa după cum pretutindeni podurile unesc căile de comunicație această carte are darul și harul să reunească concepțiile și lucrările cele mai reprezentative, jalonînd direcțiile de viitor ale artei de construcție a podurilor.

Prima parte a cărții tratează principiile de bază ale esteticii ca știință. Se discută succesiv terminologia specifică, estetica obiectelor, percepția valorilor estetice, rolul cultural al proporțiilor și criteriile de identificare a esteticii lucrărilor de artă. Se comentează apoi conformarea estetică, integrarea în spațiul ambiant și echilibrarea estetică cu natura ca o condiție de etică profesională.

Partea a doua conține idei pentru proiectarea estetică a podurilor, de la cele masive din zidărie pînă la podurile de mare deschidere, ancorate și suspendate. Se discută întîi cum se proiectează un pod. Apoi se analizează influența aliniamentului, în elevație și plan, asupra sistemului constructiv și a esteticii acestuia. Alternativ se ia în considerație influența materialelor de construcție, de la piatra naturală la oțelul de înaltă rezistență și aluminiu, asupra performanțelor estetice ale podurilor.

Partea a treia, bogat ilustrată cu fotografii alb-negru și color, prezintă cele mai reprezentative poduri din lume, construite în decursul timpului. Fotografiile sînt însoțite de comentarii, uneori critice, privind estetica și concepțiile lor de proiectare. Sînt prezentate succesiv poduri vechi din piatră, poduri pietonale — primitive și moderne, de pe toate meridianele, inclusiv scările de acces la podurile înalte —, pasaje și autostrăzi suspendate, poduri din grinzi drepte cu zăbrele, inimă plină și chesonate, viaducte, poduri pe arce și cadre de mare deschidere, poduri ancorate sau hobanate și desigur poduri suspendate, inclusiv podul Humber de 1410 m din Marea Britanie, inaugurat la 17 iulie 1981.

Podurile fiind lucrări inginerești de artă, estetica lor constituie un criteriu esențial de proiectare. De aceea cartea Profesorului *Fritz Leonhardt*, prima de acest fel din literatura de specialitate, răspunde unui deziderat de strictă necesitate a inginerului constructor modern.

Ramiro Sofronie

W. STEINHILPER, R. RÖPER. Organe de mașini și elemente constructive. Maschinen und Konstruktions — elemente Vol. 1. Bazele calculului și proiectării, cu 222 figuri și 39 tabele, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1982.

Lucrarea se adresează studenților din Institutele de învățămînt tehnic superior, dar poate fi utilizată și de cei ce se ocupă cu proiectarea în construcția de mașini pentru improspătarea cunoștințelor și aducerea lor la nivelul actual al tehnicii.

Materialul este ordonat în 4 capitole, fiecare fiind urmat de exemple de calcul și o bibliografie amplă.

St. cerc. mec. apl., tom. 43, nr. 2, 1984, p. 197—198

Primul capitol reprezintă o introducere în problematica proiectării organelor de mașini, cu folosirea multor exemple, scheme și diagrame. În acest capitol se tratează, de asemenea, utilizarea diferitelor materiale pentru construirea organelor de mașini, dîndu-se o atenție mare unor materiale moderne cum sînt cele plastice și materiale compozite. Tot în acest capitol se face o scurtă revedere a unor noțiuni din mecanică — forțe, momente, lucru mecanic, putere — precum și a noțiunii de randament. Capitolul 2 este denumit „Norme toleranțe și ajustaje, suprafețe tehnice". Problematica toleranțelor și ajustajelor este tratată în extenso, foarte intuitiv, cu ajutorul unor scheme și tabele. Pentru suprafețele tehnice sînt date tabele cu valorile rugozităților ce pot fi obținute cu ajutorul diferitelor procese tehnologice. Se descrie, de asemenea, măsurarea rugozității suprafețelor. Capitolul 3 tratează despre „Bazele calculului de rezistență". Se descriu solicitările simple, cele compuse, cazurile de solicitare axială, plană și spațială, teoriile de rezistență cu relațiile de calcul corespunzătoare, flambajul, contactul între diferite suprafețe, caracteristici mecanice ale diferitelor materiale, efectul concentrărilor de tensiune și calculul coeficienților de influență, coeficienți de siguranță și tensiuni admisibile.

Ultimul capitol este dedicat proiectării elementelor și sistemelor. Se dau noțiuni ca univocitatea, simplicitatea și siguranța unei construcții de mașini, alegerea secțiunii în raport de solicitare și proiectarea în conformitate cu posibilitățile tehnologice. Manualul are un caracter pronunțat didactic, corespunzînd întru totul scopului pentru care a fost scris.

G. Winter

JOSEPH STILES BEGGS, Kinematics. Hemisphere Publ. Corp., Washington — New York — London; Springer—Verlag, Berlin—Heidelberg — New York — Tokyo, 1983, xvi + + 223 pp.

Cinematica se ocupă de studiul mișcării sistemelor mecanice, fără a ține seama de sistemele de forțe care acționează asupra acestora; această denumire a fost dată de Ampère, plecînd de la cuvîntul grec „kinema" (mișcare). Cinematica este, de fapt, o geometrie a mișcării. Autorul, care a lucrat mult timp în producție, devenind apoi profesor la Universitatea de stat din Los Angeles, actualmente fiind profesor emerit, urmează această idee, considerînd mișcarea ca o transformare geometrică.

Primele două capitole ale lucrării tratează această problemă, precum și problema precizării poziției unui sistem mecanic la un moment dat. Următoarele două capitole sînt destinate studiului noțiunilor de deplasare și mișcare. Se utilizează matricele de translație și de rotație, fără a se introduce noțiunea de grup (autorul se limitează la aspectele de calcul practic). Menționăm și introducerea accelerațiilor de ordinul al doilea (în engleză „jerk"). Se consideră apoi sistemele de coordonate necarteziene (în special, cilindrice și sferice), precum și coordonatele lui Euler sub formă de cuaternioni. Rezultatele obținute sînt aplicate la un mare număr de probleme cu caracter practic (optică geometrică, mecanisme, organe de mașini etc.), făcîndu-se legătura și cu unele elemente de dinamica solidelor rigide. Două anexe cuprind unele rezultate și formule din trigonometrie și din geometria diferențială a curbelor și suprafețelor. Bibliografia conține 16 titluri.

Acest volum este de sine stătător din punct de vedere al cunoștințelor de ordin matematic necesare pentru a-l putea aborda. El se adresează inginerilor și tehnicienilor din domeniul construcțiilor de mașini care lucrează în proiectare sau în execuție, putînd fi utilizat și ca manual pentru problemele respective în învățămîntul superior tehnic.

P. P. Teodorescu

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică :

- Studii originale de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.
- Note (lucrări mai scurte cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni).
- Referate ştiinţifice şi tehnice, la care se expune stadiul actual al unei anumite probleme subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.
- Recenzii asupra cărţilor şi studiilor române şi străine.

Domeniile de specialitate ale revistei sînt :

- Astrodinamica (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţi, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosferă rarefiată, în atmosferă densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).
- Aerodinamica (mecanica fluidelor, aerodinamica, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitatea, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).
- Hidrodinamica (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).
- Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).
- Mecanica generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).
- Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, stabilitatea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).
- Tehnica măsurătorilor (aparate electrice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi izotopilor radioactivi în tehnică).

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

*

Manuscrisele se vor trimite la sediul Comitetului de redacţie, Bucureşti 70701, str. Const. Mille, nr. 15, sectorul 5.

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

A. PAVEL **Elastostabilitatea recipientelor cilindrice**, 1983, 310 p., 26 lei.
V. HANDRA-LUCA, **Funcțiile de transmitere în studiul mecanismelor**, 1983, 260 p,. 20 lei.
IOAN I. MUNTEANU, **Structuri pentru construcții. Teorie și calcul**. Vol. 1, 1983, 198 p,. 18 lei.
ȘTEFAN BĂLAN, VALERIU CRISTESCU, ION CORNEA, (sub redacția), **Cutremurul de pământ din România de la 4 martie 1977**, 1982, 516 p,. 10 lei.
ALEXE MARINESCU, **Probleme optimale în dinamica zborului spațial**, 1982, 253 p., 20 lei.
GORUN MANOLESCU, **Abordarea ierarhie structurată și informatica**, 1982, 192 p,. 14,50 lei.
VOICU DOLOCAN, **Fizica ionețiunilor cu semiconductoare**, 1982, 330 p., 30 lei.
A. CARABULEA, I. CH. CARABOGDAN, **Modele de bilanțuri energetice reale și optime**, 1982, 326 p., 39 lei.
DAN TEODORESCU, **Modele stohastice optimizate**, 1982, 246 p., 20 lei.
ELIE CARAFOLI, V. N. CONSTANTINESCU, **Dinamica fluidelor incompresibile**, 1981, 639 p., 44 lei.
VALERIU PETCU, GEORGETA STĂNCULESCU, UMBERTO PANCALDI, **Adaptabilitatea plastică a structurilor din beton armat**, 1981, 236 p., 12 lei.
GEORGE ȘT. ANDONIE, **Istoria științelor în România. Matematica. Mecanica, Astronomia**, 1981, 168 p. 9 lei.
LIVIU DUMITRESCU, IOACHIM ALEXANDRU, **Tehnici de construire a programelor cu structuri alternative**, 1981, 295 p., 20,40 lei.
TITUS PETRILA, **Modele matematice în hidrodinamica plană. Cercetări asupra influenței pereților nelimitați**, 1981, 239 p., 10,50 lei.
ION BOLDEA, **Vehicule pe pernă magnetică**, 1981, 283 p., 16 lei.
MIHAI FLORESCU, EDMOND NICOLAU, EUGENIU NICULESCU-MIZIL, **Istoria științelor în România. Cibernetica**, 1981, 229 p., 10,50 lei.
DAN MATEESCU, IOSIF APPELTAUER, EUGEN CUTEANU, **Stabilitatea la compresiune a structurilor din bare de oțel**, 1981, 327 p., 26 lei.
HRISTACHE POPESCU, VETURIA CHIROIU, **Calculul structurilor optimale**, 1981, 239 p., 20,50 lei.
MIHAI TERTIȘCO, PETRE STOICA, **Identificarea și estimarea parametrilor sistemelor**, 1980, 292 p., 16 lei.
D. D. SANDU, **Probleme moderne de tehnica impulsurilor**, 1980, 29 p., 18 lei.
RADU PRIȘCU și colab., **Ingineria seismică a marilor baraje**, 1980, 356 p,. 34 lei.
SANDA HANGAN, L. CRAINIC, **Concepte și metode energetice în dinamica construcțiilor**, 1980, 306 p., 27 lei.
ȘTEFAN BĂLAN, VALERIU PETCU, **Calculul structurilor în domeniul plastic. Optimizări**, 1979, 488 p., 36, 36 lei.
GHEORGHE BUZDUGAN, ELENA MIHĂILESCU, MIRCEA RADEȘ, **Măsurarea vibrațiilor**, 1978, 275 p,. 21 lei.

REVISTE PUBLICATE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
REVUE ROUMAINE DES SCIENCES TECHNIQUES
– SÉRIE DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE
– SÉRIE D'ÉLECTROTECHNIQUE ET D'ÉNERGETIQUE

RM – ISSN 0039 – 4017

ST. CERC. MEC. APL., TOM 43, NR. 2, 1984, P. 101 – 198

I. P. Informația c. 1833

Lei 55.–

$ 62 pour un abonnement annuel

R

F2557

3

TOMUL 43

mai—iunie

1984

STUDII ŞI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

Consiliul de conducere

Acad. I. ANTON, *redactor şef*

Membri:

Acad. ŞT. BĂLAN,
Acad. D. DUMITRESCU,
Acad. C. IACOB
Acad. D. MATEESCU,
Acad. R. VOINEA,
Prof. C. AVRAM, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. GH. BUZDUGAN, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Dr. ing. N. PATRAULEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. R. C. BOGDAN,
Prof. R. PRIŞCU
Dr. ing. C. TEODORESCU,
Dr. Ing. V. VISARION,
Dr. ing. D. PANTAZOPOL,
Dr. ing. I. CRIŞAN,
Prof. CR. PELECUDI,
Prof. TR. DEMIAN,
Prof. T. OROVEANU, *secretar de redacţie.*

Colegiul de redacţie

Acad. I. ANTON, *redactor şef*

Membri:

Acad. D. MATEESCU,
Dr. ing. C. TEODORESCU,
Dr. ing. I. CRIŞAN,
Dr. ing. D. PANTAZOPOL,
Prof. TR. DEMIAN,
Prof. T. OROVEANU, *secretar de redacţie.*

Toate comenzile externe pentru lucrările apărute în Editura Academiei R. S. România se vor adresa: ILEXIM, Departamentul export-import carte, Departamentul export-import presă (pentru reviste), 70517, str. 13 Decembrie nr. 3, P.O. Box 136—137, telex 11226 Bucureşti, România. În ţară abonamentele se primesc la oficiile poştale, agenţiile poştale, factorii poştali şi difuzorii de presă din întreprinderi şi instituţii.

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice corespondenţă se trimit pe adresa Comitetului de redacţie al revistei, 70701, str. Const. Mille nr. 15

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
79717, Calea Victoriei nr. 125, sectorul 1, Bucureşti

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 43, nr. 3 mai—iunie 1984

SUMAR

MIHAI NEAMȚU, Contribuția lui ELIE CARAFOLI la dezvoltarea teoriei aripilor cu jeturi laterale 201

STUDII

C. FETECĂU, Mișcări torsionale staționare ale fluidelor simple liniare 207
ȘTEFAN GYÉRESI, Cilindrul elastic în cîmp gravitațional. II. Rezolvarea numerică a problemei la limită 214
N. POSEA, AL. ANGHEL, ȘT. DĂRVĂREANU, Algoritm și program pentru calculul vibrațiilor la torsiune ale arborilor 223
I. SETEANU, M. ERHAN, A. ERHAN, Analiza neuniformității cîmpului de viteze în circuitul hidraulic al hidrogeneratoarelor de joasă cădere . . . 238
AUREL P. STOICESCU, Determinarea rapoartelor de transmitere ale schimbătorului de viteze al autovehiculului după criteriul timpului minim de demarare 251
I. M. CIORNEI, E. N. DIACONESCU, Unele aspecte ale mișcării relative dintre elementele active ale variatoarelor elastohidrodinamice de turație 267
MARIUS TUCSNAK, O nouă demonstrație a teoremei lui Cauchy 279

RECENZII 283

CONTRIBUȚIA LUI ELIE CARAFOLI LA DEZVOLTAREA TEORIEI ARIPILOR CU JETURI LATERALE

de MIHAI NEAMȚU
INCREST, București

ELIE CARAFOLI s-a stins din viață la 24 octombrie 1983, la masa sa de lucru. A trecut prea puțin timp de atunci pentru ca cei care l-au cunoscut, colaboratorii, foștii săi elevi, să se obișnuiască cu ideea că acest mare om de știință român nu va mai răspunde la telefon, nu va mai participa la simpozioane, nu va mai dezbate, nu va mai respinge și nu va mai aproba vreo lucrare sau vreo idee științifică. De acum, a ne adresa lui ELIE CARAFOLI înseamnă a-i consulta opera, a căuta în ea răspunsuri la întrebările noastre, a duce mai departe acele contribuții ale sale la știința aerodinamicii care constituie *priorități românești pe plan mondial* — cum îi plăcea să le numească, considerîndu-se pe sine ca un membru al colectivității științifice autohtone, al școlii științifice din țara noastră, la a cărei dezvoltare a muncit pînă în ultima clipă a vieții.

Una din aceste *priorități românești* o constituie și ideea utilizării jeturilor laterale pentru hipersustentarea aripilor de avion.

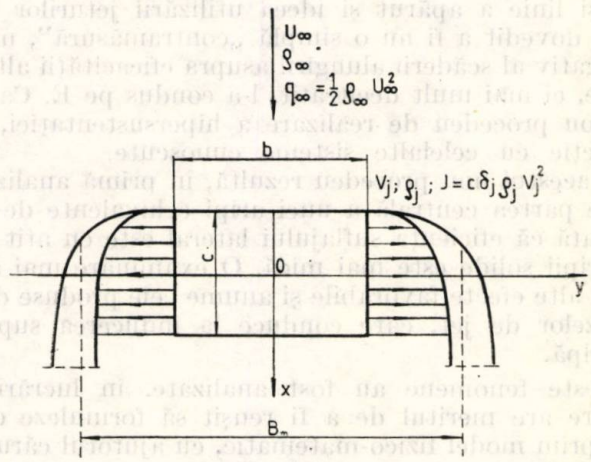


Fig. 1

În anul 1962 E. Carafoli prezenta în mai multe lucrări [1], [2], [3] principiile de bază și o metodă de calcul pentru aripile de alungire mică și moderată de la ale căror extremități sînt emise jeturi *laterale*, adică în direcția anvergurii (fig. 1). Aceste lucrări fuseseră precedate de o comu-

St. cerc. mec. apl., tom 43, nr. 3, 1984, p. 201–206

nicare [4], datorată lui E. Carafoli, N. Patraulea și N. Cămărășescu, care se referea la aripile cu jeturi combinate longitudinale și laterale, rămasă nepublicată. Rezultatele teoretice și experimentale raportate erau mai mult decît încurajatoare, ele indicînd importante efecte de creștere a portanței ca urmare a influenței pînzelor de jet asupra aripilor respective.

Cum se ajunsese la această soluție?

Așa cum arată E. Carafoli în aceste prime lucrări, ideea utlilizării jeturilor laterale ca mijloc de hipersustentație a aripilor pornea de la faptul că, odată cu reducerea alungirii, calitățile aerodinamice ale aripilor se deteriorează rapid și nici unul din mijloacele de creștere a portanței utilizate la acea dată, în particular suflajul longitudinal de la bordul de fugă cu producerea voleților fluizi (jet-flap), nu-și mai păstrează eficacitatea. O serie de lucrări apărute în deceniul al șaselea asupra hipersustentației prin jeturi longitudinale, insistau asupra contradicției care există în principiul de funcționare al acestui sistem și anume: pe de o parte are loc o creștere a corzii aripii, partea solidă a acesteia devenind porțiunea dinspre bordul de atac, pe care se induce cea mai mare parte a portanței, iar pe de altă parte, are loc o micșorare a alungirii cu efectele negative cunoscute. Această contradicție se accentuează pe măsura scăderii alungirii, tinzînd să anuleze complet efectul de hipersustentație.

A apărut atunci, firesc, preocuparea pentru găsirea unor contramăsuri, respectiv utilizarea unor dispozitive care să mărească alungirea aparentă a aripii, cum ar fi, de exemplu, „discuri marginale, jeturi longitudinale evazate, discuri marginale fluide formate din pînze de jet descendente emise de la marginile laterale ale aripii", propuse de N. Patraulea în [5] și [6].

Pe aceeași linie a apărut și ideea utilizării jeturilor laterale, care însă repede s-a dovedit a fi nu o simplă „contramăsură", menită a combate efectul negativ al scăderii alungirii asupra eficacității altor sisteme de hipersustentație, ci mai mult decît atît, l-a condus pe E. Carafoli la imaginarea unui nou procedeu de realizare a hipersustentației, independent sau în conjuncție cu celelalte sisteme cunoscute.

Eficiența acestui nou procedeu rezultă, în primă analiză, din faptul că aripa devine partea centrală a unei aripi echivalente de alungire mai mare. Se constată că eficiența suflajului lateral este cu atît mai mare cu cît alungirea aripii solide este mai mică. O examinare mai atentă a problemei relevă și alte efecte favorabile și anume cele produse de torsionarea pozitivă a pînzelor de jet, care conduce la inducerea suplimentară de portanță pe aripă.

Toate aceste fenomene au fost analizate, în lucrările citate, de E. Carafoli, care are meritul de a fi reușit să formuleze elementele de bază ale unui prim model fizico-matematic, cu ajutorul căruia s-au putut evidenția o serie de elemente esențiale ale mecanismului de interacțiune între pînzele de jeturi și aripă.

Dificultatea principală care trebuia surmontată și de care se lovește, dealtfel, orice abordare teoretică a problemei, este de a construi un model fizico-matematic rezonabil pentru pînza de jet lateral, model în care să fie cît mai coerent prinse complicatele fenomene de curgere tridimensională care au loc, dar care să fie în același timp suficient de simplu, pentru a putea fi utilizat la studiul efectelor produse asupra aripii.

Este evident că realizarea unui asemenea model presupune acceptarea unor ipoteze simplificatoare, și de alegerea acestora depinde, pe de o parte, posibilitatea de a rezolva problema, iar pe de altă parte, corectitudinea rezultatelor și în final, credibilitatea predicției caracteristicilor aripii cu jeturi laterale pe cale teoretică.

Modelul fizico-matematic construit de E. Carafoli avea la bază două ipoteze simplificatoare principale și anume :

— ipoteza aripii fluide, conform căreia pînza de jet se comportă și poate fi tratată ca o aripă subțire în fluid ideal, care prelungește sistemul portant, mărindu-i alungirea și modificînd corespunzător întregul cîmp de presiuni ;

— ipoteza *șuvițelor* de jet, conform căreia pînza de jet poate fi descompusă în fișii elementare, fără grosime, înzestrate cu impuls (de fapt flux de impuls), care se conservă în mărime, deformîndu-se independent unele de altele sub acțiunea diferențelor de presiune. Acest concept permite scrierea relațiilor de deformare a pînzei de jet sub acțiunea cîmpului de presiuni.

Așa cum se observă, modelul fizico-matematic, la care conduce problema jeturilor laterale a lui E. Carafoli, are caracterul de dublă determinare specific problemelor de aeroelasticitate : cîmpul de presiuni determină forma pînzei de jet, iar aceasta, la rîndul ei, determină cîmpul de presiuni. Soluționarea trebuie să se facă pe baza cerinței de compatibilitate între forma pînzei de jet și cîmpul de presiuni generat în prezența acesteia.

Spre deosebire de aeroelasticitate, în cazul pînzelor de jet apare o dificultate în plus, legată de definirea anvergurii, de care depinde în ultimă instanță rezolvarea problemei. Dificultatea este cu atît mai mare cu cît înspre extremitatea pînzei de jet fenomenele de curgere sînt haotice și nu se poate stabili o formă geometrică a acesteia, ceea ce face ca ipotezele de mai sus să se depărteze foarte mult de realitate, fiind necesare noi ipoteze simplificatoare, dar și o anumită concepție de interpretare globală a fenomenelor. Această concepție are la bază ideea că, dacă pentru zona din vecinătatea fantei se poate dezvolta un model matematic mai mult sau mai puțin exact, pentru zona de la extremitatea pînzei de jet nu se poate face decît o prelungire forțată, într-un mod oarecare, a unora din caracteristicile determinate în vecinătatea fantei, realizîndu-se în final un model mai simplu de linie portantă. Trebuie spus că ideea de mai sus nu a fost formulată explicit de la început, ea apărînd ulterior ca o generalizare a diferitelor variante de tratare teoretică a problemei.

În lucrările [1], [2], [3], E. Carafoli mai introduce încă o ipoteză simplificatoare, de data aceasta mai severă, privind distribuția portanței pe pînza de jet și anume : liniar în lungul corzii și uniform în lungul anvergurii, ipoteză pe care o utilizează la determinarea geometriei pînzei de jet. Aplicînd teorema impulsului, șuvițelor de jet, el stabilește o ecuație simplă pentru forma pînzei de jet în vecinătatea fantei, unde se acceptă deformații mici :

$$z = \left(1 - 2\frac{x}{c}\right)\frac{\left(y - \frac{b}{2}\right)^2}{2R_0}, \tag{1}$$

unde x, y, z sînt coordonatele într-un sistem ortogonal, cu originea în mijlocul secțiunii centrale a aripii, avînd Ox în lungul curentului și Oy în lungul anvergurii; b și c reprezintă anvergura și, respectiv, coarda aripii solide, de formă dreptunghiulară; în sfîrșit, R_0 reprezintă raza de curbură a unei suvițe medii, corelată cu coeficientul de jet C_μ și cu coeficientul de portanță în secțiunea de la extremitatea aripii solide, C_{lb}, prin formula

$$R_0 = \frac{b}{2}\frac{C_\mu}{C_{lb}}. \tag{2}$$

Coeficientul de jet C_μ este definit prin relația

$$C_\mu = J \Big/ \left(q_\infty c \frac{b}{2}\right) = 4\frac{\delta_j}{b}\frac{\rho_j}{\rho_\infty}\left(\frac{V_j}{U_\infty}\right)^2, \tag{3}$$

unde J este fluxul de impuls al pînzei de jet, $q_\infty = \frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2$ presiunea dinamică a curentului de la infinit, δ_j grosimea fantei.

Așa cum se observă din ecuația (1), pînza de jet se torsionează și se curbează în anvergură. Torsiunea introduce o incidență suplimentară, care crește pe măsura depărtării de fantă, dată de relația:

$$\varepsilon = \frac{\left(y - \frac{b}{2}\right)^2}{cR_0}. \tag{4}$$

Problema determinării anvergurii este soluționată prin alte ipoteze simplificatoare, existînd mai multe variante. Referindu-ne la cea expusă în [1], se consideră că în momentul cînd incidența totală a unei secțiuni a pînzei de jet, $\alpha = \alpha_0 + \varepsilon$, atinge o valoare maximă α_m, portanța nu mai variază, iar pînza de jet se înfășoară cu o rază medie R_m dată de relația:

$$R_m = \frac{b}{2}\frac{C_\mu}{C_{nm}}, \tag{5}$$

unde C_{nm} este coeficientul rezultantei aerodinamice a secțiunii la incidența α_m.

Anvergura totală a aripii cu jeturi laterale este definită prin relația

$$B_m = b + 2R_m. \tag{6}$$

Relațiile (4) și (6) permit în continuare tratarea aripii cu jeturi laterale ca o aripă dreptunghiulară sau eliptică echivalentă, de anvergură B_m, avînd incidența variabilă în lungul anvergurii, pentru care se pot utiliza metodele expuse în [6].

Teoria astfel construită permite determinarea relațiilor dintre caracteristicile aerodinamice ale aripii solide, în primul rînd portanța acesteia C_L și coeficientul de jet C_μ, existînd posibilitatea „ajustării" curbelor pentru a se apropia de datele experimentale, prin alegerea adecvată a valorii α_m și deci C_{nm}, în (5).

Deși teoria prezentată are ipoteze relativ greu de acceptat (distribuția liniară în coardă și uniformă în anvergură a portanței, care nu asigură compatibilitatea cu forma pînzei de jet rezultată, modul cum este aleasă anvergura etc.), totuși ea asigură o tratare completă a problemei și obținerea unui model teoretic, în care sînt prinse trăsăturile principale ale fenomenului de hipersustentație. În acest mod, E. Carafoli a reușit să determine variația coeficientului de portanță C_L, cu coeficientul de jet C_μ, pentru diferite incidențe, demonstrînd calitativ și în bună măsură și cantitativ, faptul că utilizarea jeturilor laterale pentru hipersustentarea aripilor este eficientă mai ales la aripile de mică alungire, unde alte sisteme de hipersustentație nu dau rezultate satisfăcătoare.

Din inițiativa și în bună parte sub conducerea sa, la Institutul de mecanică a fluidelor „Traian Vuia" și apoi la IMFCA și INCREST s-au efectuat o serie de cercetări experimentale și teoretice asupra acestor fenomene. Astfel, împreună cu N. Cămărășescu, a prezentat o serie de cercetări experimentale [7], la care se adaugă vizualizările făcute de N. Cămărășescu în [8] și măsurătorile efectuate, tot de acesta din urmă, în anii 1971, 1972, în cadrul unor contracte de cercetare fundamentală cu CNST [9], [10].

De asemenea, lucrînd sub conducerea lui E. Carafoli în cadrul activității de pregătire a tezei de doctorat și în cadrul unor contracte de cercetare fundamentală cu CNST, autorul prezentei note a efectuat o serie de noi cercetări teoretice. În cursul acestor cercetări a fost elaborat un nou model teoretic, asupra căruia nu insistăm aici, el fiind prezentat într-o serie de lucrări de cercetare fundamentală precum și în articole publicate împreună cu E. Carafoli [11]—[17]. Menționăm doar că noul model teoretic a permis abordarea unor sisteme portante complexe, de tip aripă-fuzelaj cu jeturi laterale înclinate. Totodată au fost abordate și alte aspecte ale teoriei sistemelor portante cu jeturi laterale. O expunere sistematică și completă a teoriei și metodelor de calcul, precum și un mare volum de rezultate pentru o diversitate de cazuri, sînt prezentate în [18].

Și peste hotare au fost efectuate cercetări pe tema jeturilor laterale, recunoscîndu-se prioritatea lui E. Carafoli și a cercetărilor românești. Semnalăm în acest sens lucrarea de doctorat a lui J. V. Mörchen [19], precum și foarte recenta comunicare [20] la cel de al 21-lea simpozion AIAA de științe aerospațiale, unde autorii M.M. Briggs și R. G. Schwind prezintă o serie de cercetări experimentale privind utilizarea jeturilor laterale pentru hipersustentarea avioanelor, cu aplicații la avionul F-15, pentru care sînt semnalate creșteri de pînă la 24 % ale portanței maximale, cu efecte importante asupra lungimii de decolare, care este redusă cu 15 %. Autorii citează lucrarea [7] a lui E. Carafoli și N. Cămărășescu. De menționat că rezultatele experimentale expuse în [20], concordă destul de bine cu calculele teoretice prezentate în [18].

BIBLIOGRAFIE

1. E. CARAFOLI, *The influence of Lateral Jets, Simple or Combined with Longitudinal Jets, upon the Wing Lifting Characteristics.* Proc. of the Third. ICAS, Stockholm, 1962.
2. E. CARAFOLI, *Considerațiuni teoretice asupra jeturilor fluide laterale,* St. cerc. med. apl., **XIII,** *5* (1962).
3. E. CARAFOLI, *Theoretical Considerations on the Lateral Fluid Jets,* Rev. Roum. Sci. Techn.-Méc. Appl., **7**, *6* (1962).
4. E. CARAFOLI, N. PATRAULEA, N. CĂMĂRĂȘESCU, *Efectul jeturilor fluide longitudinal și lateral combinate,* comunicare, Moscova, 1962, nepublicată, citată în [1].
5. N. PATRAULEA, *O metodă simplificată pentru calculul aripii cu volet fluid,* St. cerc. mec. apl., **X**, *2* (1959).
   N. PATRAULEA, *A simplified method for calculating jet-flaps wings,* Rev. Roum. Sci. Techn.-Méc. Appl., **4**, *4* (1959).
6. N. PATRAULEA, *Studii și cercetări de aerodinamica hipersustentației,* Edit. Academiei R. S. România, 1962.
7. E. CARAFOLI, N. CĂMĂRĂȘESCU, *Noi cercetări asupra aripilor de alungire mică cu jeturi laterale,* St. cerc. mec. apl., **29**, *4* (1970).
8. N. CĂMĂRĂȘESCU, *Visualisation des jets fluides latéraux,* Rev. Roum. Sci. Techn.-Méc. Appl., **11**, *2* (1966).
9. N. CĂMĂRĂȘESCU, *Hipersustentația aripilor de mică alungire prin jeturi fluide laterale,* raport IMFCA, 1971.
10. N. CĂMĂRĂȘESCU, *Cercetări experimentale asupra sistemelor moderne de hipersustentație,* raport IMFCA, N—226/I, dec. 1972.
11. M. NEAMȚU, *Cercetări de aerodinamica sistemelor portante cu aplicații la avioanele supersonice și de tip VTOL/STOL,* Raport IMFCA N954/I, Subtema *Aripa cu jeturi laterale* (Contract CNST), dec. 1971.
12. M. NEAMȚU, *Cercetări teoretice asupra sistemelor moderne de hipersustentație,* raport IMFCA N—226/II, dec. 1972 (contract CNST).
13. M. NEAMȚU, *Cercetări asupra curgerilor în jurul suprafețelor portante în prezența jeturilor laterale înclinate,* Raport IMFCA N—1022, 1174.
14. E. CARAFOLI, M. NEAMȚU, *New Theoretical Developments on the Wing with Lateral Jets,* publicat în volumul OMAGGIO A CARLO FERRARI, edit. univ. Levrotto and Bella, Torino, Italia, dec. 1974.
15. E. CARAFOLI, M. NEAMȚU, *Aerodinamica aripilor cu jeturi laterale înclinate,* St. cerc. mec. apl., **35**, *2* (1976).
16. E. CARAFOLI, M. NEAMȚU, *Flow around Wings with Inclined Lateral Jets,* Mechanics Research Communications, **3**, *3* (1976).
17. E. CARAFOLI, M. NEAMȚU, *Caracteristiques aérodinamiques de l'aile a jets lateraux inclinés,* comunicare în cadrul acordului de cooperare IMFCA—ONERA, iunie 1975.
18. M. NEAMȚU, *Contribuții la studiul jeturilor și aplicațiilor acestora,* teză de doctorat, INCREST, 1980.
19. J. V. MÖRCHEN, *Über die Sparltverluste sweischen flügeln und endscheiben ohne und mit ansblasung in spannwetenrichtung,* teză de doctorat, Inst. Pol. Darmstadt, 1965.
20. M. M. BRIGGS, R. G. SCHWIND, *Augmentation of Fighter Aircraft Lift and STOL Capability by Blowing Outboard from the Wing Tips,* AIAA—83—0078, AIAA 21-st Aerospace Meeting, Jan. 10—13, 1983, Reno, Nevada.

MIȘCĂRI TORSIONALE STAȚIONARE ALE FLUIDELOR SIMPLE LINIARE

C. FETECĂU
Institutul Politehnic „Gh. Asachi", Iași

În această lucrare sînt prezentate soluțiile exacte, corespunzătoare mișcărilor torsionale staționare ale fluidelor simple, incompresibile și liniare, cînd efectele termice sînt luate în considerație. În acest scop s-a utilizat o teoremă de dezvoltare a lui Steklov după funcțiile proprii ale unor probleme la limită convenabil alese.

1. INTRODUCERE

Istoria recentă a mecanicii mediilor continue a fost marcată de o pronunțată tendință de generalizare. Astfel, diferite concepte de fluid, fiecare mai general decît predecesorul său, au fost propuse și studiate de către cercetători.

Totuși, experiența arată că, comportarea mecanică a multor fluide reale, în special a celor de greutate moleculară mare [1], este mai ușor descrisă prin teoria materialelor cu memorie care ia în considerare *procesul de relaxare graduală a tensiunii*. În această teorie se presupune că întreaga istorie a mișcării și temperaturii (atunci cînd și efectele termice sînt luate în considerație) influențează comportarea fluidului la un moment dat.

Ecuațiile constitutive liniarizate, corespunzătoare acestei teorii, se reduc în cazul incompresibil la [2]

$$T = -pI - 2\rho\int_0^\infty \zeta'(s)G(s)\mathrm{d}s, \qquad (G)(\cdot) = F^t(\cdot)^T F^t(\cdot) - I),$$

$$q = -k(0)g - \int_0^\infty k'(s)\bar{g}^t(s)\mathrm{d}s, \qquad (\bar{g}^t(\cdot) = F^t(\cdot)^T g^t(\cdot)), \tag{1.1}$$

$$\psi = \psi_0 + \beta(0)\theta + \int_0^\infty \beta'(s)\theta^t(s)\mathrm{d}s + \int_0^\infty \zeta'(s)trG(s)\mathrm{d}s,$$

$$\eta = -\beta(0), \ (f^t(s) = f(t-s) = f(x, t-s)),$$

în care T, q, ψ și η sînt, respectiv, tensorul de tensiune Cauchy, vectorul flux de căldură, energia liberă și entropia la momentul t; p este o presiune hidrostatică nedeterminată; $F^t(\cdot)$, $\theta^t(\cdot)$ și $g^t(\cdot)$ sînt istoriile gradientului de deformare relativ, a temperaturii și a gradientului acesteia; ψ_0 este o constantă, iar $\zeta(\cdot)$, $\beta(\cdot)$ și $k(\cdot)$ sînt funcții materiale de relaxare.

St. cerc. mec. apl., tom. 43, nr. 3, 1984, p. 207—213

Scopul acestei lucrări este de a determina soluțiile exacte corespunzătoare mișcărilor torsionale staționare ale fluidelor, ale căror ecuații constitutive sînt date prin (1.1).

2. MIȘCĂRI TORSIONALE STAȚIONARE

Așa cum a fost prezentat în [3], cîmpul de viteze al mișcărilor torsionale, are componentele contravariante [1]

$$\dot{r} = 0, \quad \dot{\varphi} = \omega(r, z), \quad \dot{z} = 0 \tag{2.1}$$

în raport cu sistemul de coordonate cilindrice (r, φ, z). Liniile de curent [4], Sec. 107, sînt cercuri concentrice definite prin

$$\xi^1 = r, \quad \xi^2 = \varphi - s\omega(r, z), \quad \xi^3 = z, \tag{2.2}$$

iar componentele fizice ale lui $F^t(s)$ sînt date prin

$$F^t(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -rs\,\partial_r\omega & 1 & -rs\,\partial_z\omega \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Presupunînd că temperatura fluidului ca și viteza sa este o funcție numai de r și z, putem stabili că în virtutea relațiilor (1.1) și (2.3) ecuațiile mișcării (în presupunerea uzuală că forța masică este conservativă) și ale echilibrului energiei (în absența sursei de căldură suplimentare) se reduc la

$$\left(\Delta + \frac{2}{r}\right)\omega = 0 \qquad \left(\Delta = \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \partial_z^2\right) \tag{2.4}$$

și

$$\Delta\theta + ar^2[(\partial_r\omega)^2 + (\partial_z\omega)^2] = 0, \tag{2.5}$$

unde $a = f/k(\infty)$, cu $f = 2\rho\int_0^\infty s\zeta'(s)\mathrm{d}s$.

3. MIȘCĂRI TORSIONALE ÎNTRE CILINDRI COAXIALI

Să considerăm pentru început că mișcarea are loc între doi cilindri circulari coaxiali de raze R_1 și R_2 $(R_1 < R_2)$, mărginiți de două discuri paralele ce se rotesc în jurul axei lor, comune cu cea a cilindrilor, cu vitezele constante Ω_0 și Ω_1. Presupunînd că fluidul aderă la pereți și că

[1] În [1], cazul particular $\omega = \omega(z)$ a fost considerat.

întregul sistem se află într-un mediu ambiant de temperatură constantă $\theta = 0$, putem scrie următoarele condiţii la limită pentru funcţiile ω şi θ

$$\omega(R_1, z) = \omega(R_2, z) = 0, \qquad \omega(r, 0) = \Omega_0, \ \omega(r, d) = \Omega_1, \tag{3.1}$$

$$\theta(R_1, z) = \theta(R_2, z) = \theta(r, 0) = \theta(r, d) = 0, \tag{3.2}$$

unde d este înălţimea cilindrilor.

Întrucît problema (2.4) cu condiţiile la limită (3.1) este independentă de θ, vom căuta mai întîi soluţia acesteia. În acest scop facem substituţia $v = r\omega$ şi obţinem

$$\left(\Delta - \frac{1}{r^2}\right) v = 0, \tag{3.3}$$

respectiv

$$v(R_1, z) = v(R_2, z) = 0, \qquad v(r, 0) = r\Omega_0, \qquad v(r, d) = r\Omega_1. \tag{3.4}$$

Soluţia problemei (3.3), (3.4), pe care o presupunem continuă în raport cu r şi avînd derivatele parţiale ∂_r şi ∂_r^2 continue pe porţiuni în intervalul (R_1, R_2), o putem scrie, în baza teoremei de dezvoltare a lui Steklov [5], Ch. 4, §1, (vezi de asemenea [6]), ca o serie Fourier-Bessel uniform şi absolut convergentă după funcţiile proprii [2] [7],

$$B_1(rr_n) = A_n \left[J_1(rr_n) - \frac{J_1(R_1 r_n)}{Y_1(R_1 r_n)} Y_1(rr_n) \right], \tag{3.5}$$

ale problemei la limită

$$\left(\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r - \frac{1}{r^2}\right)\Phi + \lambda\Phi = 0; \ \Phi(R_1) = \Phi(R_2) = 0,$$

adică

$$v(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(z) B_1(rr_n). \tag{3.6}$$

În (3.5), $J_1(\cdot)$ şi $Y_1(\cdot)$ sînt funcţii Bessel de ordinul unu, r_n sînt rădăcini ale ecuaţiei transcendente

$$B_1(R_2 r) = 0, \tag{3.7}$$

iar constantele A_n sînt alese astfel încît condiţia

$$\int_{R_1}^{R_2} r[B_1(rr_n)]^2 = 1 \tag{3.8}$$

de normalizare a funcţiilor $B_1(rr_n)$ să fie satisfăcută.

[2] Alegerea a fost astfel făcută încît prin trecere la limită pentru $R_1 \Rightarrow 0$, să putem obţine direct funcţiile proprii şi deci soluţia corespunzătoare mişcărilor torsionale din paragraful 4.

Introducînd acum (3.6) în (3.3), înmulțind apoi prin $rB_1(rr_n)$ și integrînd rezultatul obținut între limitele R_1 și R_2, obținem, ținînd cont de (3.4) și (3.8) (vezi de asemenea [8] p. 317),

$$(\partial_z^2 - r_n^2)v_n(z) = 0,\ v_n(0) = r^{(n)}\Omega_0,\ v_n(d) = r^{(n)}\Omega_1, \tag{3.9}$$

unde prin

$$r^{(n)} = \int_{R_1}^{R_2} r^2 B_1(rr_n)\mathrm{d}r$$

am notat transformata Hankel finită a funcției r.

În sfîrșit, rezolvînd (3.9), substituind soluția obținută în (3.6) și ținînd cont de substituția făcută anterior, obținem viteza unghiulară ω și deci soluția problemei noastre sub forma

$$\omega(r, z) = \frac{1}{r}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{(n)}}{e^{r_n d} - e^{-r_n d}} [(\Omega_1 - \Omega_0 e^{-r_n d})\, e^{r_n z} - (\Omega_1 - \Omega_0 e^{r_n d}) e^{-r_n z}] B_1(rr_n). \tag{3.10}$$

Remarca 1. Din forma soluției (3.10) se poate vedea cu ușurință că, dacă cele două discuri se rotesc cu viteze egale dar în sensuri opuse, atunci toate particulele fluidului situate în planul $z = \dfrac{d}{2}$ se vor afla în repaus.

În ceea ce privește problema (2.5) (în baza rezultatelor de mai sus, termenul liber al acesteia este cunoscut) împreună cu condițiile la limită (3.2), vom presupune că ea admite o soluție continuă $\theta(r, z)$, avînd derivatele parțiale pînă la ordinul doi continue pe porțiuni. În aceste condiții, în baza aceleiași teoreme de dezvoltare a lui Steklov, funcția $\theta(r, z)$ poate fi scrisă ca o serie Fourier-Bessel uniform și absolut convergentă după funcțiile proprii

$$\Phi_{nm}(r, z) = A_{nm}B_0(rr_n)\sin\frac{m\pi}{d}z \tag{3.11}$$

ale problemei

$$\Delta\Phi + \lambda\Phi = 0,$$

$$\Phi(R_1, z) = \Phi(R_2, z) = \Phi(r, 0) = \Phi(r, d) = 0, \tag{3.12}$$

adică

$$\theta(r, z) = \sum_{n,m=1}^{\infty} B_{nm}\Phi_{nm}(r, z). \tag{3.13}$$

În cele de mai sus,

$$B_0(rr_n) = J_0(rr_n) - \frac{J_0(R_1 r_n)}{Y_0(R_1 r_n)}\, Y_0(rr_n), \tag{3.14}$$

cu $J_0(\cdot)$ și $Y_0(\cdot)$ funcții Bessel de ordinul zero, r_n sînt rădăcini ale ecuației transcendente

$$B_0(R_2 r) = 0,$$

iar constantele A_{nm} sînt alese ca mai înainte în așa fel încît condiția de normalizare [3]

$$\int_{R_1}^{R_2}\int_{0}^{d} r\Phi_{nm}^2(r, z)\, dr dz = 1$$

să fie satisfăcută.

Introducînd (3.13) în (2.5), înmulțind apoi prin $r\Phi_{k1}(r, z)$ și integrînd în raport cu r și z între limitele R_1, R_2 și 0, d respectiv, obținem constantele B_{nm} sub forma

$$B_{nm} = \frac{a}{\lambda_{nm}} \int_{R_1}^{R_2}\int_{0}^{d} r^3[(\partial_r\omega)^2 + (\partial_z\omega)^2]\Phi_{nm}(r, z) dr dz,$$

unde $\lambda_{nm} = r_n^2 + \dfrac{m^2\pi^2}{d^2}$ sînt valorile proprii corespunzătoare problemei (3.12).

Remarca 2. Presupunerea că întregul sistem se află într-un mediu ambiant de temperatură constantă $\theta(r, z) = 0$ nu este esențială, problema putînd fi soluționată și în cazul cînd pereții exteriori ai vasului ar fi menținuți la temperaturi constante dar diferite. În acest din urmă caz, printr-o transformare convenabilă, [7], §2, se poate ajunge la condiții la limită de forma (3.1).

4. MIȘCĂRI TORSIONALE ÎNTR-UN CILINDRU CIRCULAR

Să considerăm acum mișcarea unui fluid într-un cilindru circular drept cu axa de simetrie Oz, înălțimea d și raza R, mărginit de cele două discuri paralele care se rotesc în jurul axei lor, comune cu cea a cilindrului, cu vitezele unghiulare constante Ω_0 și Ω_1. În acest caz, în locul condițiilor la limită $(3.1)_{1,2}$ și $(3.2)_{1,2}$ va trebui să punem

$$\omega(R, z) = 0, \quad \theta(R, z) = 0, \tag{4.1}$$

unde R este raza cilindrului în care are loc mișcarea, și condițiile naturale de mărginire în $r = 0$, adică

$$|\omega(0, z)| < \infty \text{ și } |\theta(0, z)| < \infty. \tag{4.2}$$

[3] În ceea ce privește ortogonalitatea funcțiilor proprii (3.11) sau (3.5) se poate vedea, de exemplu, [9] sau [10].

Soluţiile acestei noi probleme vor fi desigur de aceeaşi formă ca cele anterioare, funcţiile lor proprii corespunzătoare [4],

$$A_n J_1(rr_n) \text{ şi } A_{nm} J_0(rr_n)\sin\frac{m\pi}{d}z,$$

putînd fi obţinute făcînd $R_1 \Rightarrow 0$ în (3.5) şi (3.11) respectiv.

Condiţiile de normalizare corespunzătoare implică

$$A_n = \frac{\sqrt{2}}{RJ_1'(Rr_n)} \text{ şi } A_{nm} = \frac{2}{R\sqrt{d}J_1(Rr_n)},$$

astfel că expresiile lui v şi θ vor fi date, respectiv, prin

$$v(r, z) = \frac{\sqrt{2}}{Rr}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{(n)}}{e^{r_n d} - e^{-r_n d}}[(\Omega_1 - \Omega_0 e^{-r_n d})e^{r_n z} -$$

$$-(\Omega_1 - \Omega_0 e^{r_n d})e^{-r_n z}]\frac{J_1(rr_n)}{J_1'(Rr_n)} \tag{4.3}$$

şi

$$\theta(r, z) = \sum_{n,m=1}^{\infty} C_{nm} J_0(rr_n)\sin\frac{m\pi}{d}z. \tag{4.4}$$

Aici, r_n sînt rădăcini ale ecuaţiilor transcendente

$$J_1(Rr) = 0 \text{ şi } J_0(Rr) = 0$$

respectiv, iar constantele C_{nm} au expresiile

$$C_{nm} = \frac{4a}{R^2 d\lambda_{nm}J_1^2(Rr_n)}\int_0^R\int_0^d r^3[(\partial_r\omega)^2 + (\partial_z\omega)^2]J_0(rr_n)\sin\frac{m\pi}{d}z\,dr\,dz$$

5. CONCLUZII

În paragrafele anterioare, utilizînd metoda funcţiilor proprii, am determinat soluţiile unor probleme la limită ataşate unor mişcări concrete. Se poate pune însă întrebarea firească, dacă această metodă conduce în-

[4] Întrucît pentru $r \Rightarrow 0$, $Y_k(rr_n) \Rightarrow \infty$ $(k = 0,1)$, iar funcţiile ω şi θ trebuie să fie mărginite în $r = 0$, integrala generală a unei ecuaţii de forma (3.3) sau $\Delta\theta = 0$ nu poate conţine termeni în $Y_k(\cdot)$. Aici am folosit de asemenea faptul că

$$\lim_{R_1 \Rightarrow 0} J_k(R_1 r_n)/Y_k(R_1 r_n) = 0, \qquad k = 0,1,$$

totdeauna la soluţia problemei. Răspunsul acestei întrebări este afirmativ, în sensul că ori de cîte ori o problemă de genul celor studiate de noi, admite o soluţie măcar netedă pe porţiuni (deci continuă sau discontinuă), aceasta poate fi obţinută ca o serie de forma (3.6), (3.13) sau, respectiv, (4.3), (4.4). Acest lucru explică de ce fizicienii sau inginerii, folosind metoda funcţiilor proprii şi lucrînd cu seriile ca şi cînd ar fi derivabile termen cu termen, chiar şi atunci cînd nu este aşa, ajung la un rezultat corect ([11], Ch. X, § 7).

Totuşi, atunci cînd funcţia obţinută prin metoda de mai sus nu este peste tot derivabilă, ea nu poate fi considerată ca soluţie a problemei în sensul strict al acestui cuvînt (cerîndu-se doar să fie satisfăcută ecuaţia diferenţială). O astfel de funcţie o vom numi soluţie generalizată a problemei. Este cert însă, că în condiţiile noastre, o serie de forma celor considerate de noi, defineşte întotdeauna o funcţie, către care ea converge în sens obişnuit sau în medie, şi, în consecinţă, metoda utilizată dă întotdeauna, dacă nu soluţia exactă a problemei, cel puţin pe cea generalizată [5)].

Faptul că această soluţie, chiar generalizată fiind ea, poate fi aproximată în medie prin funcţii de forma (3.5) sau (3.11), deci infinit derivabile, este de asemenea o consecinţă a unei teoreme de completitudine datorată tot lui Steklov [12] p. 337.

Primită la redacţie la 3 mai 1983

BIBLIOGRAFIE

1. B. D. COLEMAN, H. MARKOVITZ and W. NOLL, *Viscometric flows of non-Newtonian fluids*, Springer, Berlin, 1966.
2. C. FETECĂU, *Linearized constitutive equations for simple fluids with memory*, An. St. Univ. Al. I. Cuza, **22**, *1*, 239–241 (1976).
3. C. FETECĂU, *Torsional flows of heat conducting simple fluids*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **XXV**, *9*, 1365–1375 (1980).
4. C. TRUESDELL and W. NOLL, *The non-linear field theories of mechanics*, Handbuch der Physik, *III/3* Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1965.
5. V. ARSENIN, *Matematiceskaja fizica*, Nauka, Moskva, 1966.
6. C. FETECĂU, *On the uniqueness of some flows in simple fluids*, Acta Mech., **25**, 125–129 (1976).
7. C. FETECĂU, *Non-steady helical flows of heat conducting simple fluids with memory*, Rev. Roum. Techn.-Méc. Appl., **24**, *2*, 153–160 (1979).
8. I. N. SNEDON, *Functional Analysis*, Handbuch der Physik, Encyclopedia of Physics, Springer-Verlag, Berlin–Gottingen–Heidelberg, Band *II*, Volume II, 1955.
9. A. NIKIFOROV et V. OUVAROV, *Éléments de la théorie des fonctions spéciales*, Édition de Moscou 1976.
10. H. REISMAN, *Two-dimensional, axisimetric rotational flow of a viscous fluid*, ZAMM, **25**, 443–445 (1975).
11. G. P. TOLSTOV, *Serii Fourier*, Edit. tehnică, 1955 (traducere din limba rusă).
12. A. HAIMOVICI, *Ecuaţii diferenţiale şi ecuaţii integrale*, Edit. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1965.

[5)] Pentru unele discuţii referitoare la soluţia generalizată şi importanţa ei practică se poate vedea de exemplu [11], Ch. X.

CILINDRUL ELASTIC ÎN CÎMP GRAVITAȚIONAL

II. Rezolvarea numerică a problemei la limită

de ȘTEFAN GYÉRESI
Institutul Agronomic „N. Bălcescu", București

În această lucrare se rezolvă problema la limită formulată în [1], folosind metoda parametrului mic pentru liniarizare și metoda diferențelor finite pentru rezolvarea numerică a problemei liniare.

1. INTRODUCERE

Se rezolvă problema la limită (40)—(43), formulată în [1], pentru cilindrul elastic, circular în rotație uniformă. Relațiile (40)—(43) exprimă bilanțul energiei și al impulsului, anularea tensiunilor mecanice pe frontiera laterală și faptul că punctele de pe axa de rotație rămîn fixe. Folosind metoda parametrului mic, se scrie șirul iterativ de ecuații diferențiale și condiții la limită liniare, prin rezolvarea cărora se aproximează soluția ecuației neliniare. Problemele la limită succesive se rezolvă prin metoda diferențelor finite. Rezultatele numerice obținute sînt prezentate sub formă de tabel, pentru a pune în evidență faptul că deplasările relative au un maxim la o distanță egală cu 79 % din raza cilindrului, și grafic, pentru a compara mai ușor, în cazul clasic, cele trei soluții obținute : liniară, prima și a doua aproximație neliniară. De asemenea, se compară rezultatele obținute cu cele găsite de Suresh în lucrarea [2].

2. DEDUCEREA ȘIRULUI ITERATIV AL PROBLEMELOR LA LIMITĂ

Legea de bilanț al energiei și al impulsului pentru cilindrul elastic circular, infinit, conduce la următoarea problemă la limită [1]:

$$(1+\gamma)\frac{y''}{(1-y')^3}+\frac{x}{(x-y)(1-\alpha^2x^2)}\left(\frac{xy'}{x-y}+\frac{1}{1-\alpha^2x^2}\right)-$$

$$-\frac{x^2}{(x-y)^3(1-\alpha^2x^2)}+\frac{\gamma}{2}\left(\frac{1}{x(1-y')^2}-\frac{x}{(x-y)^2(1-\alpha^2x^2)}\right)+$$

$$+\frac{\beta\alpha^2x}{1-\alpha^2x^2}=0,\quad 0<x<1, \tag{1}$$

$$y(0)=0, \tag{2}$$

$$(1+\gamma)\left(1-\frac{1}{[1-y'(1)]^2}\right)+1-\frac{1}{[1-y(1)]^2(1-\alpha^2)}=0, \tag{3}$$

unde α, β, γ sînt constante pozitive, cu $\alpha<1$.

St. cerc. mec. apl., tom. 43, nr. 3, 1984, p. 214—222

Mai întîi vom folosi metoda parametrului mic pentru a obține aproximarea liniară, prima aproximare neliniară și a doua aproximare neliniară a problemei la limită (1)—(3). Acest lucru realizăm presupunînd că soluția exactă y poate fi scrisă în forma

$$y = \varepsilon u + \varepsilon^2 z + \varepsilon^3 v + \dots \tag{4}$$

unde ε este un parametru real, mic în valoare absolută.

Punînd în final $\varepsilon = 1$, rezultă că funcțiile

$$y^1 = u, \quad y^2 = u + z, \quad y^3 = u + z + v, \tag{5}$$

reprezintă aproximarea liniară, prima și respectiv a doua aproximare neliniară a soluției exacte.

Folosind relația (4) în (1) și neglijînd puterile lui ε mai mari ca trei, obținem, după ordonarea în raport cu puterile lui ε,

$$\left[L(v) + 3(u'^2u'' + u''z' + u'z'') + \frac{3}{1+\gamma}\cdot\frac{1}{x^2(1-\alpha^2x^2)}\left(2\frac{u^2u'}{x} + u'z + uz'\right) - \right.$$

$$- \frac{2}{1+\gamma}\cdot\frac{1}{1-\alpha^2x^2}\left(\gamma + \frac{3-5\alpha^2x^2}{1-\alpha^2x^2}\right)\frac{u^3}{x^4} - \frac{3}{1+\gamma}\cdot\frac{1}{1-\alpha^2x^2}\times$$

$$\left.\times\left(\gamma + \frac{2-4\alpha^2x^2}{1-\alpha^2x^2}\right)\frac{uz}{x^3} + \frac{\gamma}{1+\gamma}(3z' + 2u'^2)\frac{u'}{x}\right]\varepsilon^3 +$$

$$+\left[L(z) + \frac{1}{1+\gamma}\left(\frac{1}{1-\alpha^2x^2} + \gamma\right)\frac{z'}{x} + \frac{1}{1+\gamma}\cdot\frac{1}{1-\alpha^2x^2}\left(\frac{3\alpha^2x^2-1}{1-\alpha^2x^2} - \gamma\right)\times\right.$$

$$\times\frac{z}{x^3} + 3u'u'' + \frac{3}{1+\gamma}\cdot\frac{1}{1-\alpha^2x^2}\cdot\frac{uu'}{x^2} - \frac{3}{1+\gamma}\cdot\frac{1}{1-\alpha^2x^2}\left(\frac{\gamma}{2} + \frac{1-2\alpha^2x^2}{1-\alpha^2x^2}\right)\times$$

$$\left.\times\frac{u^2}{x^3} + \frac{3}{1+\gamma}\cdot\frac{\gamma}{2}\frac{u'^2}{x}\right]\varepsilon^2 + L(u)\varepsilon + \frac{1}{1+\gamma}\cdot\frac{\alpha^2x}{1-\alpha^2x^2}\left(\frac{1}{1-\alpha^2x^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\gamma}{2} + \beta\right) = 0, \tag{6}$$

unde

$$L(w) = w'' + \frac{1}{1+\gamma}\left(\gamma + \frac{1}{1-\alpha^2x^2}\right)\frac{w}{x} +$$

$$+ \frac{1}{1+\gamma}\cdot\frac{1}{1-\alpha^2x^2}\left(\frac{3\alpha^2x^2-1}{1-\alpha^2x^2} - \gamma\right)\frac{w}{x^2}. \tag{7}$$

În mod analog se procedează şi cu condiţia la limită (3), obţinîndu-se

$$\left[v'(1)+\frac{1}{1+\gamma}\cdot\frac{1}{1-\alpha^2}v(1)+3u'(1)z'(1)+2u'^2(1)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{1+\gamma}\cdot\frac{1}{1-\alpha^2}(u(1)z(1)+2u^3(1))\right]\varepsilon^3+\left[z'(1)+\frac{1}{1+\gamma}\cdot\frac{1}{1-\alpha^2}z(1)+\right.$$

$$\left.+\frac{3}{2}u'^2(1)+\frac{3}{2(1+\gamma)}\cdot\frac{1}{1-\alpha^2}u^2(1)\right]\varepsilon^2+\left[u'(1)+\frac{1}{1+\gamma}\cdot\frac{1}{1-\alpha^2}u(1)\right]\varepsilon+$$

$$+\frac{\alpha^2}{2(1+\gamma)}\cdot\frac{1}{1-\alpha^2}=0. \tag{8}$$

3. DETERMINAREA SOLUŢIEI ÎN APROXIMAŢIA LINIARĂ

Aflarea soluţiei, în aproximaţia liniară, revine la rezolvarea următoarei probleme la limită:

$$L(u)=\frac{1}{1+\gamma}\cdot\frac{\alpha^2x}{1-\alpha^2x^2}\left(\frac{\gamma}{2}-\beta-\frac{1}{1-\alpha^2x^2}\right),\quad 0<x<1, \tag{9}$$

$$u'(1)+\frac{1}{1+\gamma}\cdot\frac{1}{1-\alpha^2}u(1)=-\frac{1}{2(1+\gamma)}\cdot\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}, \tag{10}$$

$$u(0)=0.$$

a) *Cazul clasic.* Cazul clasic, nerelativist corespunde neglijării termenilor care conţin mărimea $\alpha^2=\frac{a^2\omega^2}{c^2}$, cu excepţia produsului $\beta\alpha^2$, întrucît $\beta\alpha^2=\frac{c^2\rho}{\lambda}\cdot\frac{a^2\omega^2}{c^2}=\frac{\rho a^2w^2}{\lambda}$.

Deci în acest caz avem de rezolvat problema la limită

$$u''+\frac{u'}{x}-\frac{u}{x^2}=-\frac{\beta\alpha^2x}{1+\gamma},\quad 0<x<1,$$

$$u'(1)+\frac{1}{1+\gamma}u(1)=0,\qquad u(0)=0, \tag{11}$$

care are soluţia exactă

$$u=\frac{\beta\alpha^2}{8(1+\gamma)}x\left(\frac{4+3\gamma}{2+\gamma}-x^2\right), \tag{12}$$

ce a fost obţinută şi de Suresh [2].

b) *Cazul relativist.* În cazul relativist sîntem conduși la o problemă la limită care se poate rezolva numai prin metode numerice. Vom folosi metoda diferențelor finite. De fapt soluția în cazul clasic va fi obținută și prin această metodă, pe de o parte pentru a o compara cu soluția exactă (12) în vederea estimării erorii metodei diferențelor finite, iar pe de altă parte, pentru a elimina influența metodelor folosite cînd se compară cazul clasic cu cel relativist.

Introducem notațiile

$$p_j(x) = \frac{1}{1+\gamma}\left(\gamma + \frac{1}{1-(j-1)\alpha^2x^2}\right)\frac{1}{x}, \qquad j=1,2,$$

$$q_j(x) = \frac{1}{1+\gamma}\cdot\frac{1}{1-(j-1)\alpha^2x^2}\left(\frac{3(j-1)\alpha^2x^2-1}{1-(j-1)\alpha^2x^2} - \gamma\right)\frac{1}{x^2}, \quad j=1,2, \tag{13}$$

$$f_j^1(x) = \frac{1}{1+\gamma}\cdot\frac{\alpha^2x}{1-(j-1)\alpha^2x^2}\left[(j-1)\left(\frac{\gamma}{2} - \frac{1}{1-(j-1)\alpha^2x^2}\right) - \beta\right], \quad j=1,2.$$

Se observă că pentru $j=1$ avem cazul clasic, iar pentru $j=2$, cazul relativist. După ce introducem notațiile (13) în ecuația (9) și ținem seama de notația prescurtată (7), obținem

$$L_j(u) = u'' + p_j(x)u' + q_j(x)u = f_j^1(x), \qquad j=1,2. \tag{14}$$

Luăm o diviziune pe segmentul $[0, 1]$

$$x_0 = 0; \quad x_1 = h; \quad x_2 = 2h; \quad \ldots; \quad x_i = ih; \quad \ldots; \quad x_N = Nh = 1.$$

Notăm

$$u''(ih) = u_i''; \quad u'(ih) = u_i'; \quad u(ih) = u_i; \quad p_j(ih) = p_{ji};$$

$$q_j(ih) = q_{ji}; \quad f_j^1(ih) = f_{ji}^1 \qquad j=1,2$$

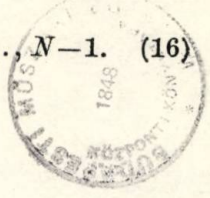
și scriem sistemul de ecuații liniare algebrice

$$u_i'' + p_{ji}u_i' + q_{ji}u_i = f_{ji}^1, \qquad i=1,2,\ldots,N-1; \quad j=1,2, \tag{15}$$

care aproximează ecuația (14).

Aproximăm derivatele prin relațiile

$$u_i' = \frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h}; \quad u_i'' = \frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}, \quad i=1,2,\ldots,N-1. \tag{16}$$



După înlocuire în (15) şi unele calcule intermediare, ajungem la sistemul liniar algebric

$$A_{ji}u_{i-1} + B_{ji}u_i + C_{ji}u_{i+1} = F^1_{ji} \quad i = 1, 2, \ldots, N-1; \quad j = 1, 2, \tag{17}$$

unde

$$A_{ji} = 2 - hp_{ji}; \quad B_{ji} = 2h^2q_{ji} - 4; \quad C_{ji} = 2 + hp_{ji}; \quad F^1_{ji} = 2h^2f^1_{ji}. \tag{18}$$

Acum problema constă în rezolvarea sistemului (17), completat cu condiţia la limită

$$u'_N + \frac{1}{1+\gamma} \cdot \frac{1}{1-(j-1)\alpha^2x^2} u_N =$$

$$= -\frac{(j-1)\alpha^2}{2(1+\gamma)[1-(j-1)\alpha^2]} = CL^1_j, \quad j = 1, 2, \tag{19}$$

şi cu restricţia

$$u(0) = 0.$$

Urmînd calea obişnuită de rezolvare [3], punem $E_1 = D_1 = 0$ şi scriem formula de recurenţă

$$u_{i-1} = E_{ji}u_i + D_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{20}$$

Înlocuind pe u_{i-1} şi u_{i+1} din (20) în ecuaţiile (17) şi impunînd ca acestea să fie satisfăcute identic, obţinem formulele de recurenţă,

$$E_{ji+1} = \frac{-C_{ji}}{A_{ji}E_{ji} + B_{ji}},$$

$$D_{ji+1} = \frac{F_{ji} - A_{ji}D_{ji}}{A_{ji}E_{ji} + B_{ji}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, N-1; \quad j = 1, 2. \tag{21}$$

Avînd în vedere faptul că E_1 şi D_1 sînt cunoscute, aceste formule determină toţi coeficienţii E_i şi D_i, $i = 1, 2, \ldots, N$.

După determinarea coeficienţilor E_i şi D_i, $i = 1, 2, \ldots, N$ se scrie ultima ecuaţie (20), adică $u_{n-1} = E_nu_n + D_n$ şi după ce se cunoaşte u_n, deci valoarea funcţiei pe frontieră, se poate afla (vezi [3], p. 62), u_{n-1} şi deci din aproape în aproape şi celelalte necunoscute. În realitate, noi nu cunoaştem pe u_n, în schimb pe frontieră avem condiţia (19), în care facem înlocuirea

$$u'_N = \frac{3u_N - 4u_{N-1} + u_{N-2}}{2h}. \tag{22}$$

Ultimele două dintre relațiile de recurență (20), adică

$$u_{N-2} = E_{jN-1}u_{N-1} + D_{jN-1} \text{ și } u_{N-1} = E_{jN}u_N + D_{jN}, \qquad j = 1, 2,$$

permit eliminarea lui u_{N-1} și u_{N-2} din ecuația (20). Rezolvată în raport cu u_N, ecuația (20) ne dă

$$u_N = \frac{2hCL_j^1 + 4D_{jN} - E_{jN-1}D_{jN} - D_{jN-1}}{\dfrac{2h}{(1+\gamma)[1-(j-1)\alpha^2]} - 1 + E_{jN-1}E_{jN}}, \qquad j = 1, 2. \quad (23)$$

Toate celelalte necunoscute se obțin din formula de recurență

$$u_{N-i} = E_{jN+1-i}u_{N+1-i} + D_{jN+1-i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, N; \quad j = 1, 2. \quad (24)$$

În rezolvarea numerică s-a luat $N = 100$.

4. DETERMINAREA SOLUȚIEI ÎN PRIMA ȘI ÎN A DOUA APROXIMAȚIE NELINIARĂ

Aflarea soluției problemei la limită (1)—(3) în prima și a doua aproximație neliniară, revine la rezolvarea numerică a ecuațiilor ce se obțin prin egalarea cu zero a coeficienților lui ε^2 și respectiv ε^3 din ecuația (6); avem

$$L_j(z) = \frac{3}{1+\gamma}\cdot\frac{1}{1-(j-1)\alpha^2x^2}\left(\gamma + \frac{1-2(j-1)\alpha^2x^2}{1-(j-1)\alpha^2x^2}\right)\frac{u^2}{x^3} - 3u'u'' -$$

$$- \frac{3}{1+\gamma}\cdot\frac{1}{1-(j-1)\alpha^2x^2}\cdot\frac{uu'}{x^2} - \frac{3\gamma}{2(1+\gamma)}\cdot\frac{u'^2}{x} = f_j^2; \quad j = 1, 2, \quad (25)$$

și, respectiv,

$$L_j(v) = \frac{3}{1+\gamma}\cdot\frac{1}{1-(j-1)\alpha^2x^2}\left(\gamma + \frac{2-4(j-1)\alpha^2x^2}{1-(j-1)\alpha^2x^2}\right)\frac{uz}{x^3} + \frac{2}{1+\gamma}\times$$

$$\times\frac{1}{1-(j-1)\alpha^2x^2}\left(\gamma + \frac{3-5(j-1)\alpha^2x^2}{1-(j-1)\alpha^2x^2}\right)\frac{u^3}{x^4} - \frac{3}{1+\gamma}\times$$

$$\times\frac{1}{x^2[1-(j-1)\alpha^2x^2]}\left(2\frac{u^2u'}{x} + u'z + uz'\right) - \frac{\gamma}{1+\gamma}(3z' + 2u'^2)\frac{u'}{x} -$$

$$- 3(2u'^2u'' + u''z' + u'z'') = f_j^3, \qquad j = 1, 2. \quad (26)$$

Evident, în (25), u și derivatele sale sînt considerate cunoscute.

Din relaţia (8) se obţin condiţiile la limită în prima şi în a doua aproximaţie neliniară :

$$z'(1) + \frac{1}{1+\gamma} \cdot \frac{1}{1-(j-1)\alpha^2} z(1) = -\frac{3}{2} u'^2(1) -$$

$$- \frac{3}{2(1+\gamma)} \cdot \frac{1}{1-(j-1)\alpha^2} u^2(1) = CL_j^2, \qquad j = 1, 2 \tag{27}$$

şi, respectiv,

$$v'(1) + \frac{1}{1+\gamma} \cdot \frac{1}{1-(j-1)\alpha^2} v(1) = -3u'(1)z'(1) - 2u'^3(1) -$$

$$- \frac{1}{1+\gamma} \cdot \frac{1}{1-(j-1)\alpha^2} [u(1)z(1) + 2u^3(1)] = CL_j^3, \quad j-1, 2. \tag{28}$$

Notînd

$$w^1 = u, \quad w^2 = z, \quad w^3 = v, \tag{29}$$

se observă că ecuaţiile (14), (25) şi (26) se pot scrie concentrat astfel

$$L_j(w^k) = f_j^k, \qquad j = 1, 2, \qquad k = 1, 2, 3. \tag{30}$$

Asemănător, condiţiile la limită (19), (27) şi (28) se scriu

$$w'^k(1) + \frac{1}{1+\gamma} \cdot \frac{1}{1-(j-1)\alpha^2} w^k(1) = CL_j^k, \quad j = 1, 2, \quad k = 1, 2, 3. \tag{31}$$

Rezultă astfel că procedeul de rezolvare aplicat în cazul aproximaţiei liniare poate fi utilizat şi în vederea găsirii soluţiilor în cazul primei şi a celei de a doua aproximaţii neliniare.

Se recomandă ca în programul pentru calculator mărimile

$$F_{ji}^k \text{ şi } CL_j^k, \qquad j = 1, 2, \qquad k = 1, 2, 3.$$

să se scrie sub forma

$$F_{ji}^k = \frac{1}{2}(2-k)(3-k)F_{ji}^1 + (k-1)(3-k)F_{ji}^2 + \frac{1}{2}(k-1)(k-2)F_{ji}^3,$$

$$j = 1, 2; \qquad k = 1, 2, 3,$$

$$CL_j^k = \frac{1}{2}(2-k)(3-k)CL_j^1 + (k-1)(3-k)CL_j^2 + \frac{1}{2}(k-1)(k-2)CL_j^3,$$

$$j = 1, 2, \qquad k = 1, 2, 3.$$

Tabelul 1 prezintă valorile deplasărilor relative în cazul relativist în a doua aproximație neliniară. Se observă că deplasările prezintă un maxim situat, față de axa de rotație, la o distanță egală cu 79 % din raza cilindrului. Această constatare este valabilă în toate cele șase cazuri. Figura 1,

Tabelul 1

Cilindrul elastic în rotație uniformă.
Valorile deplasărilor în cazul relativist în a doua aproximație neliniară

0,0006135466	0,0012269432	0,0018400113	0,0024525803	0,0030644808
0,0036755436	0,0042855995	0,0048944793	0,0055020139	0,0061080341
0,0067123705	0,0073148519	0,0079153084	0,0085135667	0,0091094567
0,0097028063	0,0102934411	0,0108811930	0,0114658761	0,0120473232
0,0126253568	0,0131998019	0,0137704777	0,0143372032	0,0148998013
0,0154580936	0,0160118926	0,0165610184	0,0171052850	0,0176445087
0,0181784984	0,0187070646	0,0192300190	0,0197471716	0,0202583260
0,0207632885	0,0212618601	0,0217538450	0,0222390381	0,0227172419
0,0231882521	0,0236518559	0,0241078450	0,0245560107	0,0249961368
0,0254280030	0,0258513962	0,0262660916	0,0266718669	0,0270684924
0,0274557444	0,0278333851	0,0282011745	0,0285588730	0,0289062432
0,0292430349	0,0295689950	0,0298838717	0,0301874078	0,0304793409
0,0307594038	0,0310273251	0,0312828304	0,0315256428	0,0317554691
0,0319720290	0,0321750271	0,0323631528	0,0325391103	0,0326995893
0,0328452655	0,0329758154	0,0330909169	0,0331902192	0,0332733884
0,0333400772	0,0333899249	0,0334225573	0,0334376027	0,0334346916
0,0334134253	0,0333734076	0,0333142285	0,0332354805	0,0331367425
0,0330175791	0,0328775407	0,0327161635	0,0325329853	0,0323275294
0,0320993036	0,0318478005	0,0315725136	0,0312729038	0,0309484319
0,0305985422	0,0302226614	0,0298201994	0,0293905633	0,0289331260

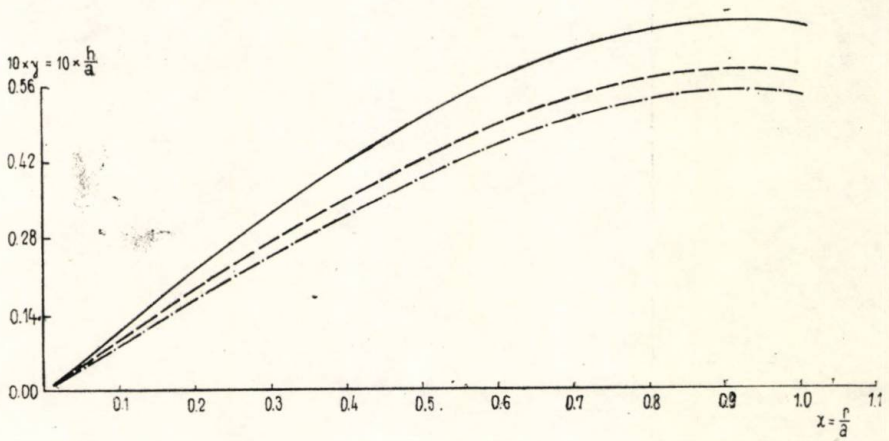


Fig. 1. — Deplasarea radială în cazul clasic :
——— aproximația liniară
—·—·— prima aproximație neliniară
— — — — a doua aproximație neliniară

obținută la calculator, reprezintă deplasările relative în cazul clasic în cele trei aproximări. Mai precizăm că din analiza rezultatelor numerice urmează că deplasările în cazul relativist sînt mai mari, decît în cel clasic. În ceea ce privește compararea cu rezultatele obținute de Suresh [2], menționăm

că soluţia numită de el clasică coincide cu soluţia liniară în cazul clasic din această lucrare. Soluţia din cadrul teoriei relativităţii restrînse, Suresh a obţinut-o liniarizînd ecuaţia (1) şi neglijînd în toţi termenii, cu excepţia ultimului, mărimea α^2. În fine, soluţia considerată de Suresh ca fiind corespunzătoare cazului teoriei relativităţii generale, coincide cu soluţia neliniară în cazul relativist de la noi. Menţionăm că aproximaţia lui Suresh din cadrul teoriei relativităţii restrînse nu are justificare.

Primită la redacţie la 27 octombrie 1983

BIBLIOGRAFIE

1. ŞTEFAN GYÉRESI, *Cilindrul elastic în cîmp gravitaţional. I. Formularea problemei la limită*, St. cerc. mec. apl., **42** (1984).
2. A. SURESH, *The elastic rotating cylinder*, Lett. Appl. Engng. Sci., **18**, 885–888 (1980).
3. S. K. GODUNOV, V. S. REABENKI, *Scheme de calcul cu diferenţe finite*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1977 (trad. din limba rusă).

ALGORITM ȘI PROGRAM PENTRU CALCULUL VIBRAȚIILOR LA TORSIUNE ALE ARBORILOR

de N. POSEA, AL. ANGHEL, ST. DĂRVĂREANU
Institutul de petrol și gaze Ploiești

Lucrarea prezintă un algoritm detaliat pentru calculul vibrațiilor proprii și forțate la torsiune ale arborilor în trepte, luînd în considerație inerția de rotație a maselor distribuite ale tronsoanelor, a masei discurilor și influența cuplurilor de torsiune distribuite și concentrate. Algoritmul a fost transpus într-un program, denumit VIBTOR, pentru calculatoare electronice cifrice.
Metoda elaborată conduce la rezultate exacte pentru pulsațiile proprii la torsiune (turațiile critice), formele proprii de oscilație, rotirile și momentele de torsiune dinamice în orice nod al arborelui.

1. CONSIDERAȚII GENERALE

Arborii constituie principalele elemente de mașini pentru transmisia de puteri la diferite turații. Studiul dinamic al arborilor și în special a celor din construcția compresoarelor centrifugale, turbinelor, pompelor centrifugale etc., prezintă o mare importanță teoretică și practică, pentru buna funcționare a subansamblelor rotorului și a mașinii din care fac parte.

În lucrare se analizează cazul general al vibrațiilor proprii și forțate la torsiune ale arborilor cu variații în trepte ale secțiunilor transversale și cu orice număr de discuri (rotori). La vibrațiile proprii se iau în considerație inerția de rotație a masei tronsoanelor și a masei discurilor, iar la vibrațiile forțate, cuplurile de torsiune distribuite și cuplurile concentrate.

Pe baza algoritmului elaborat se determină valorile pulsațiilor proprii la torsiune, formele proprii de oscilație, rotirile și momentele de torsiune dinamice în orice nod al tronsoanelor în care a fost divizat sistemul. Din compararea rotirilor dinamice maxime cu valorile admisibile se poate aprecia modul în care este satisfăcută condiția de rigiditate a arborelui. De asemenea, prin compararea tensiunilor dinamice maxime cu cele admisibile se apreciază modul de îndeplinire al condiției de rezistență.

2. STABILIREA ECUAȚIEI DIFERENȚIALE CARE DESCRIE VIBRAȚIILE TORSIONALE PENTRU UN TRONSON DE BARĂ DREAPTĂ

Se consideră un element $\mathrm{d}x$ (fig. 2.1) separat dintr-o bară dreaptă prin secțiunile 1 și 2. Pe fețele 1 și 2 acționează momentele de torsiune M^x și $M^x + \frac{\partial M^x}{\partial x}\mathrm{d}x$, considerate pozitive, iar pe element se aplică cuplurile de torsiune perturbatoare distribuite $m^x(xt)$ și cuplul forțelor de inerție $m^{x,t}\mathrm{d}x$, care sînt pozitive cînd au vectorii în lungul axei x. De asemenea, rotirea φ^x este pozitivă cînd are vectorul în sensul axei x (fig. 2.1). Relația dintre momentul de torsiune și rotire (cunoscută din rezistența materialelor [3]) este

$$M^x = -GI_t \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \tag{2.1}$$

St. cerc. mec. apl., tom 43, nr. 3, 1984, p. 223–237

Din ecuaţia de momente faţă de axa x pentru toate cuplurile de pe elementul dx (fig. 2.1), se obţine relaţia

$$\frac{\partial M^x}{\partial x} = m^{x,i} + m^x(x\,t). \tag{a}$$

Cunoscînd intensitatea cuplului de inerţie

$$m^{x,i} = -\bar{\mathcal{I}}\ddot{\varphi}, \tag{b}$$

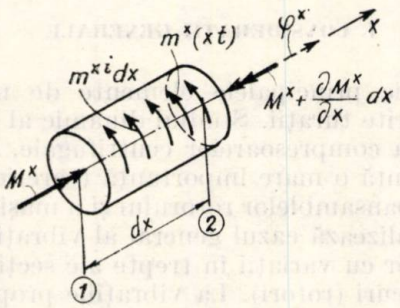


Fig. 2.1

unde $\bar{\mathcal{I}}$ reprezintă momentul de inerţie masic al unităţii de lungime din bară faţă de axa de oscilaţie la torsiune (axa x), iar $\ddot{\varphi}$ derivata de ordinul doi în raport cu timpul a rotirii, şi introducînd relaţiile (2.1) şi (b) în (a), se obţine ecuaţia diferenţială

$$GI_t\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \bar{\mathcal{I}}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -m^x(xt), \tag{2.2}$$

care descrie vibraţiile torsionale ale unui tronson de bară dreaptă cu secţiune constantă.

3. MATRICE DINAMICE DE TRANSMITERE

3.1. MATRICEA DINAMICĂ DE TRANSMITERE PENTRU UN TRONSON

Din (2.2), făcînd $m^x(xt) = 0$, se obţine ecuaţia diferenţială a vibraţiilor proprii

$$GI_t\varphi'' - \bar{\mathcal{I}}\ddot{\varphi} = 0. \tag{3.1}$$

Alegînd soluţia de tip Fourier,

$$\varphi(xt) = \varphi_x\cos(pt - \theta), \tag{3.2}$$

se obține ecuația diferențială a vibrațiilor libere

$$\varphi_x'' + a^2\varphi_x = 0, \tag{a}$$

unde

$$a^2 = \frac{\bar{\mathcal{J}}p^2}{GI_t} \quad \text{sau} \quad p = a\sqrt{\frac{GI_t}{\bar{\mathcal{J}}}}. \tag{3.3}$$

Soluția ecuației (a) este

$$\varphi_x = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax, \tag{3.4}$$

iar din (2.1) rezultă expresia momentului de torsiune

$$M^x = GI_t a(C_1 \sin ax - C_2 \cos ax). \tag{3.5}$$

Determinarea constantelor C_1 și C_2 se face din condiții la limită, care se pot pune în rotiri sau în momente.

Folosind parametrii în origine φ_0, M_0^x, constantele C_1 și C_2 se înlocuiesc în funcție de aceștia și relațiile (3.4), (3.5) devin :

$$\varphi_x = \varphi_0 \cos ax - \frac{M_0^x}{GI_t a} \sin ax, \tag{3.4'}$$

$$M^x = \varphi_0 GI_t a \sin ax + M_0^x \cos ax. \tag{3.5'}$$

Considerînd un tronson de bară dreaptă $(i-1)-(i)$ (fig. 3.1), notat cu indicele capătului din dreapta (i) și notînd cu

$$\underset{\sim}{S}_{i-1} = \begin{bmatrix} \varphi_{i-1} \\ M^x_{i-1} \end{bmatrix}, \quad \underset{\sim}{S}_i = \begin{bmatrix} \varphi_i \\ M^x_i \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

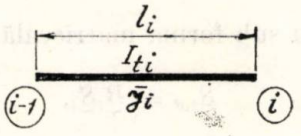


Fig. 3.1

parametrii de la capete, pe baza relațiilor (3.4') și (3.5'), relațiile de legătură dintre $\underset{\sim}{S}_i$ și $\underset{\sim}{S}_{i-1}$ se scriu matriceal sub forma :

$$\underset{\sim}{S}_i = \underset{\sim}{A}_i \underset{\sim}{S}_{i-1}, \tag{3.7}$$

unde

$$\underset{\sim}{A}_i = \begin{bmatrix} \cos(a_i l_i) & -\dfrac{1}{GI_t a_i} \sin(a_i l_i) \\ GI_t a_i \sin(a_i l_i) & \cos(a_i l_i) \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

reprezintă matricea de transmitere pentru tronson.

Conform relaţiei (3.3), prin a_i se înţelege mărimea

$$a_i = \sqrt{\frac{\mathcal{I}p^2}{GI_{ti}}}. \tag{3.9}$$

3.2. MATRICEA DE TRANSMITERE PESTE UN DISC

Dacă între două tronsoane există un disc, necunoscutele nodului respectiv (j) se definesc la stînga şi la dreapta acestuia ca în figura 3.2.

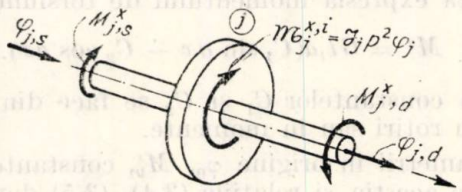


Fig. 3.2

Ţinînd seama că în vibraţia proprie $\varphi = \varphi(xt) = \varphi_x \cos(pt - \theta)$, un disc cu moment de inerţie masic $\mathcal{I}_j$ conduce la un cuplu de inerţie

$$\mathfrak{M}^{x,i}_j = -\mathcal{I}_j \ddot{\varphi}_j = \mathcal{I}_j p^2 \varphi_j, \tag{a}$$

necunoscutele din dreapta nodului sînt:

$$\varphi_{j,d} = \varphi_{j,s},$$

$$M^x_{j,d} = \mathfrak{M}^{x,i}_j + M^x_{j,s} = \mathcal{I}_j p^2 \varphi_j + M^x_{j,s}. \tag{b}$$

Relaţiile (b) se scriu sub forma matriceală:

$$\underset{\sim}{S}_{j,d} = \underset{\sim}{B}_j \underset{\sim}{S}_j, \tag{3.10}$$

unde $\underset{\sim}{B}_j$ are expresia

$$\underset{\sim}{B}_j = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \mathcal{I}_j p^2 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

şi reprezintă matricea de trecere peste disc.

4. ALGORITM GENERAL PENTRU STUDIUL VIBRAŢIILOR TORSIONALE ALE ARBORILOR ÎN TREPTE CU DISCURI

Se consideră un arbore cu secţiuni variind în trepte, avînd discuri în nodurile de trecere dintre tronsoane (fig. 4.1).

Pentru fiecare tronson $(i-1)-(i)$ se determină momentul de inerție geometric la torsiune (I_{ti}) și momentul de inerție masic pentru unitatea de lungime față de axa $x(\mathcal{J}_i)$.

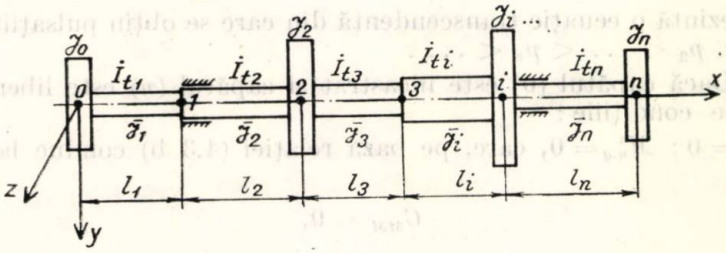


Fig. 4.1

Pentru fiecare disc se determină momentele de inerție masice față de axa x: $\mathcal{J}_0$, $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$, ..., $\mathcal{J}_n$.

Se notează cu $\underset{\sim}{S}_0$ vectorul parametrilor din capătul stîng (0) și cu $\underset{\sim}{S}_n$ vectorul parametrilor capătului din dreapta (n):

$$\underset{\sim}{S}_0 = \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ M_0^x \end{bmatrix}; \quad \underset{\sim}{S}_n = \begin{bmatrix} \varphi_n \\ M_n^x \end{bmatrix}. \tag{a}$$

Aplicînd succesiv relațiile (3.7) și (3.10), se obține relația de legătură dintre vectorii $\underset{\sim}{S}_n$ și $\underset{\sim}{S}_0$, sub forma:

$$\underset{\sim}{S}_{n,d} = (\underset{\sim}{B}_n\underset{\sim}{A}_n\underset{\sim}{B}_{n-1}\underset{\sim}{A}_{n-1} \cdots \underset{\sim}{B}_i\underset{\sim}{A}_i \cdots \underset{\sim}{B}_1\underset{\sim}{A}_1\underset{\sim}{B}_0)\underset{\sim}{S}_{0,s}. \tag{4.1}$$

Notînd cu $\underset{\sim}{C}_{n-0}$ matricea rezultantă,

$$\underset{\sim}{C}_{n-0} = \underset{\sim}{B}_n\underset{\sim}{A}_n\underset{\sim}{B}_{n-1}\underset{\sim}{A}_{n-1} \cdots \underset{\sim}{B}_i\underset{\sim}{A}_i \cdots \underset{\sim}{B}_1\underset{\sim}{A}_1\underset{\sim}{B}_0, \tag{4.2}$$

de dimensiuni (2×2), relația (4.1) se scrie dezvoltat sub forma:

$$\begin{bmatrix} \varphi_n \\ M_{n,d}^x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{\varphi\varphi} & C_{\varphi M} \\ C_{M\varphi} & C_{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ M_{0,s}^x \end{bmatrix}. \tag{4.3}$$

Relația matriceală (4.3) conduce la următoarele relații scalare:

$$\varphi_n = C_{\varphi\varphi} \cdot \varphi_0 + C_{\varphi M} \cdot M_{0,s}^x, \tag{4.3a}$$

$$M_{n,d}^x = C_{M\varphi} \cdot \varphi_0 + C_{MM} \cdot M_{0,s}^x. \tag{4.3b}$$

4.1. DETERMINAREA PULSAȚIILOR PROPRII

Se pun condițiile la limită în funcție de legăturile capetelor (0) și (n).

a) Dacă capetele (0) și (n) sînt libere, condițiile la limită sînt:

$$M_{0,s}^x = 0; \quad M_{n,d}^x = 0$$

și din relația (4.3 b), întrucît $\varphi_0 \neq 0$, rezultă

$$C_{M\varphi} = 0, \tag{4.4}$$

care reprezintă o ecuație transcendentă din care se obțin pulsațiile proprii $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots < p_n < \ldots$.

b) Dacă capătul (0) este încastrat și capătul (n) este liber, trebuie îndeplinite condițiile :

$\varphi_0 = 0$; $M^x_{n,d} = 0$, care, pe baza relației (4.3 b) conduc la

$$C_{MM} = 0, \tag{4.5}$$

care este o ecuație transcendentă din care se obțin pulsațiile proprii $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots < p_n < \ldots$.

c) Dacă capătul (0) este liber și capătul (n) este încastrat, din condițiile la limită,

$$\varphi_n = 0 \; ; \quad M^x_{3,s} = 0,$$

și relația (4.3 a) rezultă

$$C_{\varphi\varphi} = 0, \tag{4.6}$$

care este o ecuație transcendentă din care se obțin pulsațiile proprii $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots < p_n < \ldots$.

4.2. DETERMINAREA FORMELOR PROPRII DE OSCILAȚIE

Fiecărei pulsații proprii îi corespunde o formă proprie de oscilație. Se consideră situațiile analizate în paragraful 4.1.

a) Capetele (0) și (n) sînt libere.

Se ia o valoare arbitrară pentru φ_0, de exemplu

$$\varphi_0 = 1, \tag{4.7}$$

și se calculează parametrii $\underset{\sim}{S}_i$ în toate nodurile ($i = 0, 1, \ldots, n$) pentru fiecare pulsație $p_1, p_2, \ldots p_\alpha, \ldots, p_n$, aplicînd relația de legătură dintre parametrii $\underset{\sim}{S}_i$, $\underset{\sim}{S}_0$ și introducînd pe rînd în (3.8) și (3.11) valorile $p = p_1, p_2, \ldots, p_\alpha, \ldots, p_n$.

Introducînd $p = p_1$ și aplicînd succesiv relațiile (3.7) și (3.10), se obțin expresiile :

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{S}_{0,d} &= \underset{\sim}{B}_0 \underset{\sim}{S}_{0,s}, \\
\underset{\sim}{S}_1 &= \underset{\sim}{B}_1 \underset{\sim}{A}_1 \underset{\sim}{B}_0 \underset{\sim}{S}_{0,s}, \\
\underset{\sim}{S}_2 &= \underset{\sim}{B}_2 \underset{\sim}{A}_2 \underset{\sim}{B}_1 \underset{\sim}{A}_1 \underset{\sim}{B}_0 \underset{\sim}{S}_{0,s}, \\
&\vdots \\
\underset{\sim}{S}_n &= \underset{\sim}{B}_n \underset{\sim}{A}_n \ldots \underset{\sim}{B}_1 \underset{\sim}{A}_1 \underset{\sim}{B}_0 \underset{\sim}{S}_{0,s},
\end{aligned} \tag{4.8}$$

din care rezultă valorile $\varphi_{0,1} = 1$, $\varphi_{1,1} = \ldots$, $\varphi_{2,1} = \ldots, \ldots$, $\varphi_{n-1} = \ldots$, care precizează forma proprie I (corespunzătoare pulsației p_1).

Folosind $p = p_2$ și aplicînd din nou relațiile (4.8), rezultă forma proprie II, adică

$$\varphi_{0,2} = 1, \quad \varphi_{1,2} = \ldots, \quad \varphi_{2,2} = \ldots, \ldots, \quad \varphi_{n,2} = \ldots .$$

Pentru $p = p_\alpha$, aplicarea relațiilor (4.8) conduce la forma proprie α,

$$\varphi_{0,\alpha} = 1, \quad \varphi_{1,\alpha} = \ldots, \quad \varphi_{2,\alpha} = \ldots, \ldots, \quad \varphi_{n,\alpha} = \ldots .$$

b) Capătul (0) încastrat și (n) liber.

Se ia o valoare arbitrară pentru $M^x_{0,s}$ (de obicei unitară),

$$M^x_{0,s} = 1, \tag{4.9}$$

și se calculează parametrii $\underset{\sim}{S}_i$ în toate nodurile pentru fiecare pulsație $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$.

De exemplu, pentru $p = p_\alpha$ se obține succesiunea de valori

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{S}_{0,s} &= \underset{\sim}{B}_0 \underset{\sim}{S}_{0,s}, \\ \underset{\sim}{S}_1 &= \underset{\sim}{B}_1 \underset{\sim}{A}_1 \underset{\sim}{B}_0 \underset{\sim}{S}_{0,s}, \\ &\vdots \\ \underset{\sim}{S}_n &= \underset{\sim}{B}_n \underset{\sim}{A}_n \ldots \underset{\sim}{B}_1 \underset{\sim}{A}_1 \underset{\sim}{B}_0 \underset{\sim}{S}_{0,s} \end{aligned} \tag{4.10}$$

identică formal cu (4.8), din care rezultă $\varphi_{0,\alpha} = \ldots$, $\varphi_{1,\alpha} = \ldots$, $\varphi_{2,\alpha} = \ldots, \ldots$, $\varphi_{n,\alpha} = \ldots$ care este forma proprie de oscilație α.

c) Capătul (0) liber și capătul (n) încastrat

Se ia o valoare arbitrară pentru $\varphi_{0,s}$,

$$\varphi_{0,s} = 1, \tag{4.11}$$

și se calculează parametrii $\underset{\sim}{S}_i$ în toate nodurile pentru fiecare pulsație $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$.

De exemplu, pentru $p = p_\alpha$, aplicînd (4.10), rezultă forma proprie de oscilație α.

4.3. CALCULUL VIBRAȚIILOR FORȚATE STABILIZATE

În nodurile barei (0), (1), (2), ..., ($i-1$), (i), ..., (m) (fig. 4.2) se consideră aplicate cupluri perturbatoare de pulsație ω în fază: $\mathfrak{M}^x_0(t) = \mathfrak{M}^{x,0}_0 \cos \omega t$; $\mathfrak{M}^x_1(t) = \mathfrak{M}^{x,0}_1 \cos \omega t, \ldots$; $\mathfrak{M}^x_i(t) = \mathfrak{M}^{x,0}_i \cos \omega t, \ldots$; $\mathfrak{M}^0_n = \mathfrak{M}^{x,0}_n \cos \omega t$, unde ω reprezintă pulsația cuplurilor de torsiune perturbatoare, iar $\mathfrak{M}^{x,0}_0, \mathfrak{M}^{x,0}_1, \ldots, \mathfrak{M}^{x,0}_n$ intensitățile lor maxime.

Se determină a_ω pentru fiecare tronson cu relaţia :

$$a_{\omega i} = \omega \sqrt{\frac{\bar{\mathcal{J}}_i}{GI_{ti}}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{4.12}$$

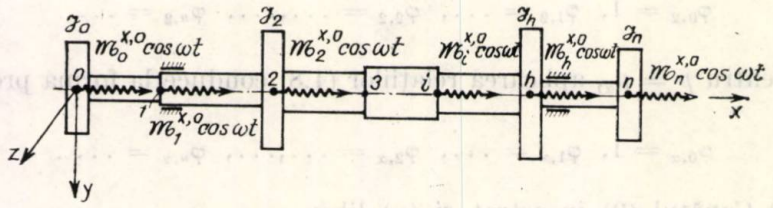


Fig. 4.2

Se determină pentru fiecare tronson matricea de tronson cu relaţia

$$A_i^* = \begin{bmatrix} \cos(a_{\omega i} l_i) & -\dfrac{1}{GI_{ti} a_{\omega i}} \sin(a_{\omega i} l_i) \\ GI_{ti} a_{\omega i} \sin(a_{\omega i} l_i) & \cos(a_{\omega i} l_i) \end{bmatrix}. \tag{4.13}$$

De asemenea, se calculează pentru fiecare nod (0), (1), (2), ..., (i),... ..., (k),..., (n) în care există disc, matricea de nod

$$B_k^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \mathcal{J}_k \omega^2 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.14}$$

Dacă într-un nod h există un disc şi cuplul perturbator $\mathfrak{M}_h^{x,0} \cos \omega t$, necunoscutele nodului se definesc la stînga şi la dreapta acestuia, ca în figura 4.3.

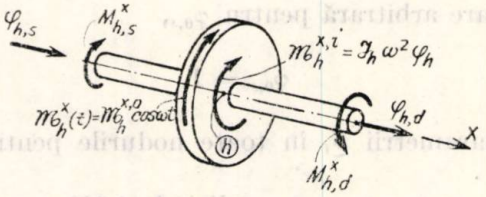


Fig. 4.3

Rezultă relaţiile :

$$\varphi_{h,d} = \varphi_{h,s},$$

$$M_{h,d}^x = M_{h,s}^x + \mathfrak{M}_h^{x,i} + \mathfrak{M}_h^x = M_{h,s}^x + \mathcal{J}_h \omega^2 \varphi_h + \mathfrak{M}_h^{x,0} \cos \omega t. \tag{4.15}$$

Cunoscînd matricea de nod

$$B_h^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \mathcal{J}_h \omega^2 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.14'}$$

relațiile (4.15) se scriu sub forma matriceală

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\varphi_{h,d}\\ M^x_{h,d}\end{bmatrix}}_{S^*_{h,d}} = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1\\ \mathscr{I}_h\omega^2 & 0\end{bmatrix}}_{B^*_h}\underbrace{\begin{bmatrix}\varphi_{h,s}\\ M^x_{h,s}\end{bmatrix}}_{S^*_{h,s}} + \underbrace{\begin{bmatrix}0\\ \mathfrak{M}^{x,0}_h\cos\omega t\end{bmatrix}}_{\mathfrak{M}^*_h}. \tag{4.15'}$$

Folosind matricea (4.13) și (4.14), parametrii capătului din dreapta $\underset{\sim}{S}_{h,d}$ se exprimă în funcție de parametrii capătului din stînga $\underset{\sim}{S}_{0,s}$ prin relațiile :

$$\underset{\sim}{S}^*_{0,d} = \underset{\sim}{B}^*_0\underset{\sim}{S}^*_{0,s} + \mathfrak{M}^x_0;\ \underset{\sim}{S}^*_{1,s} = \underset{\sim}{A}_1\underset{\sim}{S}^*_{0,d};\ \underset{\sim}{S}^*_{1,d} = \underset{\sim}{B}^*_1\underset{\sim}{S}^*_{1,s} + \mathfrak{M}^x_1;\ \ldots\ \underset{\sim}{S}^*_{i,s} = \underset{\sim}{A}^*_i\underset{\sim}{S}^*_{i-1,d},$$

$$\underset{\sim}{S}^*_{i,d} = \underset{\sim}{B}^*_i\underset{\sim}{S}^*_{i,s} + \mathfrak{M}^x_i;\ \ldots\ \underset{\sim}{S}^*_{n,s} = \underset{\sim}{A}^*_n\underset{\sim}{S}^*_{n-1,d};\ \underset{\sim}{S}^*_{n,d} = \underset{\sim}{B}^*_n\underset{\sim}{S}^*_{n,s} + \mathfrak{M}^x_n. \tag{b}$$

Aplicarea acestora conduce la relațiile de legătură dintre $\underset{\sim}{S}_{n,d}$ și $\underset{\sim}{S}_{0,s}$ sub forma :

$$\underset{\sim}{S}^*_{n,d} = (\underset{\sim}{B}^*_n\underset{\sim}{A}^*_n\underset{\sim}{B}^*_{n-1}\underset{\sim}{A}^*_{n-1}\ldots\underset{\sim}{B}^*_i\underset{\sim}{A}^*_i\ldots\underset{\sim}{B}^*_2\underset{\sim}{A}^*_2\underset{\sim}{B}^*_1\underset{\sim}{A}^*_1\underset{\sim}{B}^*_0)\underset{\sim}{S}^*_{0,s} + (\underset{\sim}{B}^*_n\underset{\sim}{A}^*_n\underset{\sim}{B}^*_{n-1}\underset{\sim}{A}^*_{n-1}\ldots$$

$$\underset{\sim}{B}^*_i\underset{\sim}{A}^*_i\ldots\underset{\sim}{B}^*_2\underset{\sim}{A}^*_2 + \underset{\sim}{B}^*_1\underset{\sim}{A}^*_1)\mathfrak{M}^x_0 + (\underset{\sim}{B}^*_n\underset{\sim}{A}^*_n\underset{\sim}{B}^*_{n-1}\underset{\sim}{A}^*_{n-1}\ldots\underset{\sim}{B}^*_i\underset{\sim}{A}^*_i\ldots\underset{\sim}{B}^*_3\underset{\sim}{A}^*_3 +$$

$$+\underset{\sim}{B}^*_2\underset{\sim}{A}^*_2)\mathfrak{M}^x_1 + \ldots + (\underset{\sim}{B}^*_n\underset{\sim}{A}^*_n\underset{\sim}{B}^*_{n-1}\underset{\sim}{A}^*_{n-1}\ldots\underset{\sim}{B}^*_h\underset{\sim}{A}^*_h\ldots\underset{\sim}{B}^*_{i+1}\underset{\sim}{A}^*_{i+1})\mathfrak{M}^x_i + \ldots +$$

$$+ (\underset{\sim}{B}^*_n\underset{\sim}{A}^*_n\underset{\sim}{B}^*_{n-1}\underset{\sim}{A}^*_{n-1})\mathfrak{M}^x_{n-2} + (\underset{\sim}{B}^*_n\underset{\sim}{A}^*_n)\mathfrak{M}^x_{n-1} + \mathfrak{M}^x_n. \tag{4.16}$$

Notînd în expresia (4.16) prima paranteză cu $\underset{\sim}{C}^*_{n-0}$, a doua cu $\underset{\sim}{C}^*_{n-1}$, a treia cu $\underset{\sim}{C}^*_{n-2}, \ldots, \underset{\sim}{C}^*_{n-1}, \underset{\sim}{C}^*_{n-(i+1)}, \ldots, \underset{\sim}{C}^*_{n-(n-1)}, \underset{\sim}{C}^*_{n-n}$, aceasta se scrie astfel:

$$\underset{\sim}{S}^*_{n,d} = \underset{\sim}{C}^*_{n-0}\underset{\sim}{S}^*_{0,s} + \underset{\sim}{C}^*_{n-1}\mathfrak{M}^x_0 + \underset{\sim}{C}^*_{n-2}\mathfrak{M}^x_1 + \ldots +$$

$$+ \underset{\sim}{C}^*_{n-(i+1)}\mathfrak{M}^x_i + \ldots + \underset{\sim}{C}^*_{n-n}\mathfrak{M}^x_{n-1} + \mathfrak{M}^x_n. \tag{4.16'}$$

Ținînd seama de componentele lui S_0 și S_n, relația (4.16') poate fi scrisă și sub forma :

$$\begin{bmatrix}\varphi_n\\ M^x_{n,d}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}C^*_{n-0,\varphi\varphi} & C^*_{n-0,\varphi M}\\ C^*_{n-0,M\varphi} & C^*_{n-0,MM}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\varphi_0\\ M^x_{0,s}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}C^*_{n-1,\varphi\varphi} & C^*_{n-1,\varphi M}\\ C^*_{n-1,M\varphi} & C^*_{n-1,MM}\end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix}0\\ \mathfrak{M}^{x,0}_0\cos\omega t\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}C^*_{n-2,\varphi\varphi} & C^*_{n-2,\varphi M}\\ C^*_{n-2,M\varphi} & C^*_{n-2,MM}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\ \mathfrak{M}^{x,0}_1\cos\omega t\end{bmatrix} + \ldots +$$

$$+\begin{bmatrix}C^*_{n-n,\varphi\varphi} & C^*_{n-n,\varphi M}\\ C^*_{n-n,M\varphi} & C^*_{n-n,MM}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\ \mathfrak{M}^{x,0}_{n-1}\cos\omega t\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \mathfrak{M}^{x,0}_n\cos\omega t\end{bmatrix}, \tag{4.17}$$

care pune în evidență componentele parametrilor din noduri.

Pentru studiul vibrațiilor forțate ale arborilor interesează doar cazul cînd capetele 0 și n sînt libere.

În acest caz se cunosc condițiile

$$M^x_{0,s} = M_{n,d} = 0, \tag{4.18}$$

care, folosite împreună cu (4.17), conduc la determinarea necunoscutelor φ_0 și φ_n. Rezultă

$$\varphi_0 = -\frac{1}{C_{n-0,M\varphi}} [\mathfrak{M}^{x,0}_n + C^*_{n-n,MM}\mathfrak{M}^{x,0}_{n-1} + C_{n-(n-1)MM}\mathfrak{M}^{x,0}_{n-2} + \ldots +$$

$$+ C^*_{n-2,MM}\mathfrak{M}^{x,0}_1 + C^*_{n-1,MM}\mathfrak{M}^{x,0}_0] \cos \omega t, \tag{4.19}$$

$$\varphi_n = C^*_{n-0,\varphi\varphi}\varphi_0 + [C^*_{n-1,\varphi M}\mathfrak{M}^{x,0}_0 + C^*_{n-2,\varphi M}\mathfrak{M}^{x,0}_1 + \ldots +$$

$$+ C^*_{n-n,\varphi M}\mathfrak{M}^{x,0}_{n-1}] \cos \omega t. \tag{4.20}$$

Observație. Din cele două necunoscute interesează doar φ_0, și deci nu este nevoie să se determine φ_n (determinarea lui φ_n este utilă la verificare).

Avînd parametrii în origine :

$$\underline{S}_0(t) = \underline{S}^0_0 \cos \omega t = \begin{bmatrix} \varphi^0_0 \\ \mathfrak{M}^{x,0}_{0,s} \end{bmatrix} \cos \omega t = \begin{bmatrix} \varphi^0_0 \\ 0 \end{bmatrix} \cos \omega t, \tag{4.21}$$

se pot determina, cu relațiile (4.17), parametrii în toate celelalte noduri (1), (2), ... ,(n) pornind de la nodul (0) către (n).

5. TRANSPUNEREA ALGORITMULUI ÎN PROGRAM DE CALCULATOR

Algoritmul elaborat pentru calculul la vibrații torsionale ale arborilor cu secțiune variind în trepte, cu aplicații la rotoarele compresoarelor centrifugale și a utilajelor similare, a fost transpus într-un program denumit VIBTOR scris în limbaj FORTRAN, pentru calculatoare FELIX C-256.

În figura 5.1 se prezintă schema generală a setului de programe VIBTOR.

În prima parte a programului se calculează pulsațiile proprii, în numărul cerut prin cartelele de intrare ale programului. Pe o zonă de disc magnetic (fișier) se reține matricele de transfer și pulsațiile proprii.

De asemenea, tot în prima parte a programului, se determină formele proprii de oscilație, care sînt afișate la imprimantă, împreună cu pulsațiile corespunzătoare.

În partea a doua a programului se face calculul vibrațiilor forțate stabilizate, prin procedeul folosirii formelor proprii de oscilație.

SCHEMA GENERALA SET PROGRAME VIBTOR

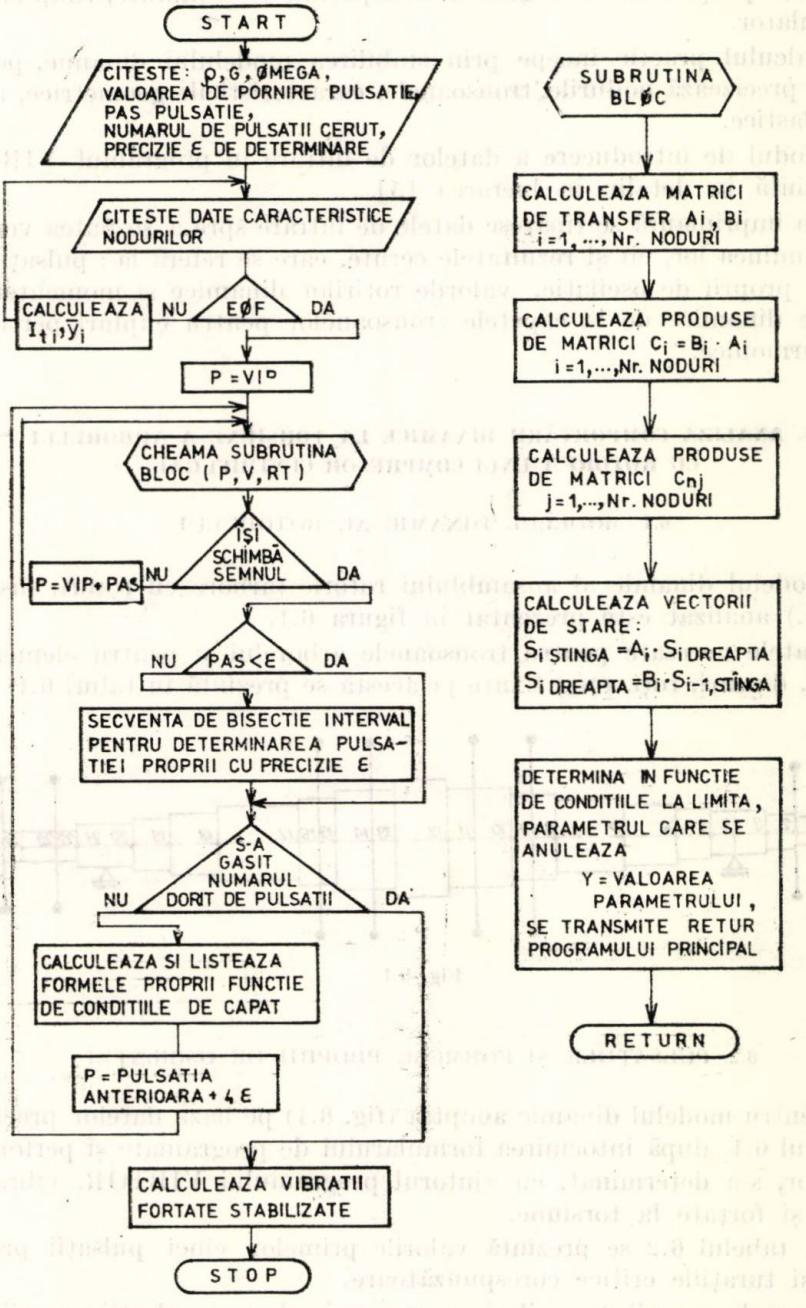

START
CITESTE: ρ, G, ØMEGA, VALOAREA DE PORNIRE PULSATIE, PAS PULSATIE, NUMARUL DE PULSATII CERUT, PRECIZIE Ɛ DE DETERMINARE
CITESTE DATE CARACTERISTICE NODURILOR
CALCULEAZA $I_{t\,i}, \bar{y}_i$
NU
EØF
DA
P = VIP
CHEAMA SUBRUTINA BLOC (P, V, RT)
P = VIP + PAS
NU
ȘI SCHIMBĂ SEMNUL
DA
NU
PAS < Ɛ
DA
SECVENTA DE BISECTIE INTERVAL PENTRU DETERMINAREA PULSATIEI PROPRII CU PRECIZIE Ɛ
S-A GASIT NUMARUL DORIT DE PULSATII
NU
DA
CALCULEAZA SI LISTEAZA FORMELE PROPRII FUNCTIE DE CONDITIILE DE CAPAT
P = PULSATIA ANTERIOARA + 4 Ɛ
CALCULEAZA VIBRATII FORTATE STABILIZATE
STOP
SUBRUTINA BLØC
CALCULEAZA MATRICI DE TRANSFER Ai, Bi i = 1, ..., Nr. NODURI
CALCULEAZA PRODUSE DE MATRICI $C_i = B_i \cdot A_i$ i = 1, ..., Nr. NODURI
CALCULEAZA PRODUSE DE MATRICI C_{nj} j = 1, ..., Nr. NODURI
CALCULEAZA VECTORII DE STARE:
$S_{i\,STINGA} = A_i \cdot S_{i\,DREAPTA}$
$S_{i\,DREAPTA} = B_i \cdot S_{i-1,STÎNGA}$
DETERMINA IN FUNCTIE DE CONDITIILE LA LIMITA, PARAMETRUL CARE SE ANULEAZA
Y = VALOAREA PARAMETRULUI,
SE TRANSMITE RETUR PROGRAMULUI PRINCIPAL
RETURN

Fig. 5.1

Durata de execuţie pe calculator depinde atît de structura arborelui (numărul de tronsoane al acestuia, rotori sau alte mase), cît şi de numărul de pulsaţii proprii cerut, în general nedepăşind 4—5 minute, timp efectiv de calculator.

Calculul practic începe prin stabilirea modelului dinamic, pentru care se precizează nodurile, tronsoanele, caracteristicile geometrice, masice şi elastice.

Modul de introducere a datelor de intrare în programul VIBTOR se prezintă în detaliu în lucrarea [5].

La imprimantă se tipăresc datele de intrare spre a se putea verifica corectitudinea lor, cît şi rezultatele cerute, care se referă la : pulsaţiile şi formele proprii de oscilaţie, valorile rotirilor dinamice şi momentele de torsiune dinamice de la capetele tronsoanelor pentru cupluri perturbatoare armonice.

6. ANALIZA COMPORTĂRII DINAMICE LA TORSIUNE A ARBORELUI CU ROTORI A UNUI COMPRESOR CENTRIFUGAL

6.1. MODELUL DINAMIC AL ROTORULUI

Modelul dinamic al ansamblului rotoric (arbore cu rotori, discuri, roţi etc.) analizat este prezentat în figura 6.1.

Datele necesare pentru tronsoanele arborelui şi pentru elementele (ro tori, discuri, roţi, etc.) fixate pe acesta se prezintă în tabul 6.1.

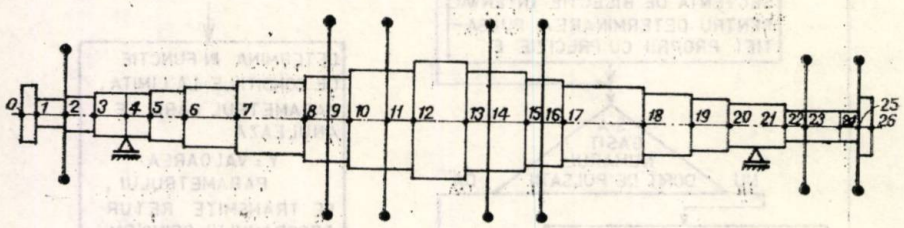


Fig. 6.1

6.2. PULSAŢIILE ŞI FORMELE PROPRII DE OSCILAŢIE

Pentru modelul dinamic adoptat (fig. 6.1) pe baza datelor precizate în tabelul 6.1, după întocmirea formularului de programare şi perforarea cartelelor, s-a determinat, cu ajutorul programului VIBTOR, vibraţiile proprii şi forţate la torsiune.

În tabelul 6.2 se prezintă valorile primelor cinci pulsaţii proprii cerute şi turaţiile critice corespunzătoare.

Formele proprii de oscilaţie pentru primele trei pulsaţii proprii sînt reprezentate în figura 6.2.

Tabelul 6.1

Nr. tronson (nod)	Diametru D_e cm	Lungime l cm	Moment de inerție masic $\mathcal{J}$ daN s²cm	Cuplu perturbator $\mathfrak{M}_x$ daN cm
1	8,00	1,20	0,23	
2	6,50	5,00		
3	6,70	5,00		
4	7,00	6,00		
5	7,00	4,20		
6	8,50	5,60		
7	9,00	9,10		
8	12,00	17,10		
9	14,03	7,80	2,88	15000
10	14,03	3,20		
11	15,53	10,53	2,90	
12	14,53	3,02		
13	18,6	10,31		
14	17,03	3,02	3,00	24000
15	17,03	9,73		
16	16,03	3,02	2,95	27000
17	16,03	5,79		
18	12,00	24,96		
19	9,00	9,10		
20	8,50	5,60		
21	7,00	4,20		
22	7,00	5,50		
23	5,00	2,50	0,04	
24	5,00	6,00		
25	5,00	3,00	0,05	
26	8,00	2,20		

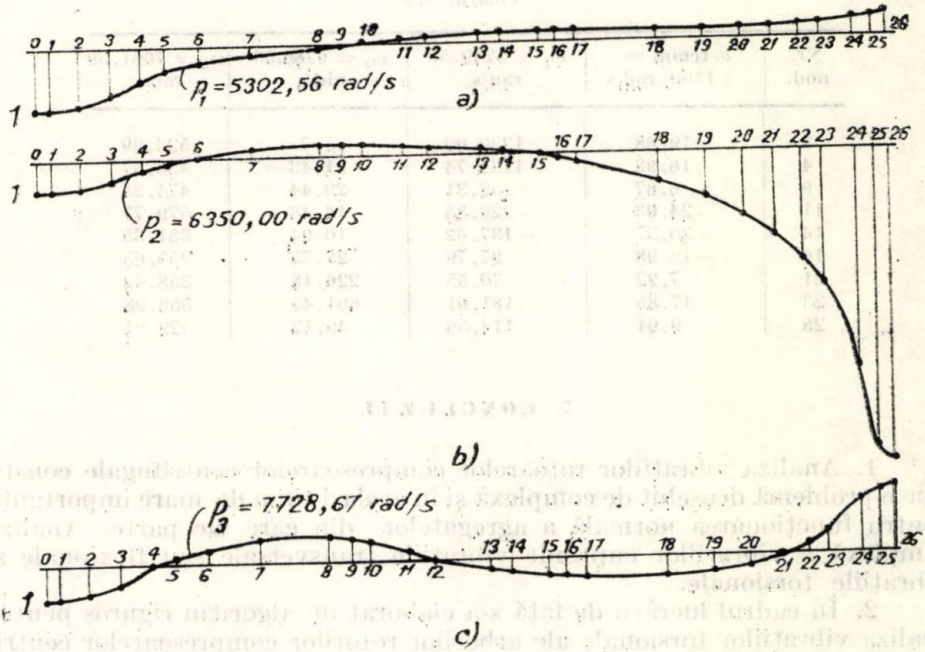


Fig. 6.2.

Tabelul 6.2

Pulsaţii proprii, în rad/s		Turaţii critice, în rot/min	
p_1	5302,56	n_1	50635,72
p_2	6350,00	n_2	60638,03
p_3	7728,67	n_3	73803,36
p_4	13233,62	n_4	126371,76
p_5	15613,10	n_5	149094,12

6.3. VIBRAŢIA FORŢATĂ STABILIZATĂ

Pentru determinarea vibraţiilor forţate stabilizate s-au considerat cuplurile perturbatoare armonice, de pulsaţie ω, în fază, care acţionează în nodurile 8, 14 şi 16, avînd intensităţile maxime date în tabelul 6.1. Valoarea pulsaţiei ω s-a considerat pentru turaţia de regim ($m = 11000$ rot/min) şi pentru valori cu 10% sub valorile pulsaţiilor proprii.

S-a efectuat calculul vibraţiilor forţate stabilizate ale arborelui cu programul VIBTOR şi ca date de ieşire la imprimantă au rezultat : valorile rotirilor (φ_s, φ_d) ; momentele de torsiune dinamice (M_s^*, M_d^*) din stînga şi din dreapta fiecărui nod.

În tabelul 6.3 sînt date valorile tensiunilor dinamice (τ_{dim}) rezultate, în daN/cm^2, în secţiunile cele mai solicitate ale arborelui.

Tabelul 6.3

Nr. nod.	ω regim = 1100 rad/s	$\omega_1 = 5249,53$ rad/s	$\omega_2 = 6286,50$ rad/s	$\omega_3 = 7661,39$ rad/s
2	−19,68	1330,00	25,7	523,99
4	−16,98	1134,74	21,43	435,97
9	− 6,67	−239,31	20,44	474,28
11	−24,03	−229,83	16,46	579,77
14	−20,37	−137,62	10,94	351,35
16	−13,98	97,79	28,75	255,63
21	7,22	70,55	226,18	258,42
23	17,85	181,01	601,45	556,98
25	9,91	114,56	49,12	529,01

7. CONCLUZII

1. Analiza vibraţiilor rotoarelor compresoarelor centrifugale constituie o problemă deosebit de complexă şi în acelaşi timp de mare importanţă pentru funcţionarea normală a agregatelor din care fac parte. Analiza complexă a vibraţiilor cuprinde vibraţiile transversale sau flexionale şi vibraţiile torsionale.

2. În cadrul lucrării de faţă s-a elaborat un algoritm riguros pentru analiza vibraţiilor torsionale ale arborilor rotorilor compresoarelor centrifugale, aplicabil însă la orice sistem elastic cu caracteristici similare. Se

precizează că algoritmul permite luarea în considerație a tuturor particularităților geometrice și masice ale sistemului atît la determinarea pulsațiilor și a formelor proprii de oscilație, cît și la calculul dinamic al rotirilor și eforturilor produse de cupluri perturbatoare distribuite sau concentrate.

3. Algoritmul a fost transpus într-un program denumit VIBTOR scris în limbaj FORTRAN, care poate fi rulat pe calculatorul FELIX C-256.

Datele de intrare pentru rularea programului sînt ușor de completat, iar datele de ieșire cuprind:

— pulsațiile proprii (în numărul cerut);
— formele proprii corespunzătoare;
— rotirile dinamice în toate nodurile modelului de calcul;
— momentele dinamice de torsiune în nodurile modelului;
— tensiunile tangențiale maxime din încărcările dinamice considerate.

4. Algoritmul și programul elaborat pentru vibrațiile torsionale împreună cu algoritmul și programul pentru analiza vibrațiilor flexionale [6] constituie un algoritm general pentru analiza dinamică completă și exactă a structurilor de tip arbore în orice configurație geometrică și masică. Cunoașterea pulsațiilor și a formelor proprii flexionale și torsionale în numărul dorit dă posibilitatea determinării eforturilor dinamice și stabilirii corecte a turației de regim, evitîndu-se fenomenele de rezonanță. De asemenea, așa cum s-a arătat în [5, 6, 7, 8], pe baza formelor proprii se stabilesc masele și planele de echilibrare optime.

Primită la redacție la 3 octombrie 1983

BIBLIOGRAFIE

1. N. POSEA, *Vibrații mecanice*, Curs litografiat, I.P.G. Ploiești, 1980.
2. M. BIALLOWONS, *Bending- and torsional-critical speeds of shaft systems*, GHH Sterkrade, March, 1977, p. 1—9.
3. N. POSEA, *Rezistența materialelor*, E.D.P., București, 1979.
4. A. HAROVÁTII, *Les problèmes des vibrations de torsion pouvant apparaître dans la ligne d'arbores d'un moteur synchrone à pôles saillants entrainant un turbocompresseur, lors du démarrage en asynchrone*, Revue Brown Boveri, **50**, 6/7, p. 417—429 (1963).
5. N. POSEA, AL. ANGHEL, ȘT. DĂRVĂREANU, I. DUMITRU, *Cercetări teoretice, algoritm și program pentru studiul vibrațiilor la torsiune ale arborilor rotorilor compresoarelor centrifugale*, Contract nr. 3/1983 între I.P.G. Ploiești și C. P. Pitești.
6. N. POSEA, AL. ANGHEL, ȘT. DĂRVĂREANU, I. DUMITRU, *Algoritm și program pentru calculul dinamic la încovoiere al arborilor*, St. cerc. mec. apl. **42**, 4, p. 367—388 (1983).
7. N. POSEA, AL. ANGHEL, ȘT. DĂRVĂREANU, *Cercetări privind vibrațiile arborilor în trepte*, Al III-lea Simpozion Național de Tensometrie, Timișoara, 1983.
8. N. POSEA, AL. ANGHEL, ȘT. DĂRVĂREANU, I. DUMITRU, *Echilibrarea modală a rotorilor compresoarelor centrifugale*, Contract nr. 120/1980, între I.P.G. Ploiești și C. P. Pitești.
9. GH. BUZDUGAN, LUCIA FETCU, M. RADEȘ, *Vibrațiile sistemelor mecanice*, Edit. Academiei R.S.România, 1975.
10. A. RIPIANU, I. CRĂCIUN, *Osii, arbori drepți și arbori cotiți*, E.D.P., București, 1977.
11. F. HOLZWEISSIG, S. LIEBIG, *Programmpaket zur Berechnung von Torsionsschwingungen*, Maschinenbautechnik **26**, 6, p. 260—271 (1977).
12. L. BOUCIANI, P. FERRARA, A. TIMORI, *Aero-induced vibrations in centrifugal compressors*, Quaderni Pignone, **29**, p. 5—14.

ANALIZA NEUNIFORMITĂȚII CÎMPULUI DE VITEZE ÎN CIRCUITUL HIDRAULIC AL HIDROGENERATOARELOR DE JOASĂ CĂDERE

de I. SETEANU, M. ERHAN
Institutul politehnic, București

A. ERHAN
Liceul industrial nr. 15, București

Se evaluează pierderile de sarcină hidraulică în circuitul hidroagregatelor de joasă cădere, insistîndu-se asupra cauzelor care produc neuniformitatea epurei vitezelor la intrare. Efectul hidrodinamic al pilelor intermediare și al colmatării neuniforme a grătarului sînt analizate separat, obținîndu-se factorii de corecție corespunzători în calculul pierderilor de sarcină. Rezultatele teoretice obținute sînt comparate cu măsurătorile experimentale, constatîndu-se o bună concordanță.

1. INTRODUCERE

Aprecierea corectă a ordinului de mărime a pierderilor de energie în circuitul hidraulic al grupurilor hidroenergetice are o importanță deosebită atît pentru estimarea randamentului global, cît și pentru interpretarea adecvată a rezultatelor măsurătorilor în funcționarea de regim. Se analizează cauzele care produc neuniformitatea cîmpului de viteze în secțiunea grătarului prizelor amenajărilor hidroenergetice de joasă cădere.

2. CALCULUL PIERDERILOR DE SARCINĂ HIDRAULICĂ ÎNTRE BIEFUL AMONTE ȘI INTRAREA ÎN ROTORUL HIDROGENERATORULUI DE JOASĂ CĂDERE

Expresia generală a pierderilor de sarcină hidraulică liniare și locale se scrie :

$$h_w = \sum_i \alpha_i \left(\lambda_i \frac{l_i}{D_i} + \zeta_i \right) \frac{v_i^2}{2g}, \tag{1}$$

unde α_i reprezintă coeficienții Coriolis ai energiei cinetice, λ_i și ζ_i sînt coeficienții Darcy ai pierderilor liniare respectiv locale, iar v_i reprezintă vitezele medii în tronsoanele de tub de curent de lungime l_i și diametru D_i. În cazul analizat în prezenta lucrare (fig. 1), prezența pilei intermediare are ca rezultat scindarea tubului de curent în două ramificații paralele. Alegînd ca viteză de referință viteza de intrare în secțiunea amonte de intrarea în rotor, ω_0, se obține :

$$h_w = \frac{v_0^2 \omega_0^2 \Sigma_1 \Sigma_2}{2g(\sqrt{\Sigma_1} + \sqrt{\Sigma_2})}, \tag{2}$$

unde Σ_1 și Σ_2 reprezintă mărimea rezistenței hidraulice de calcul :

$$\Sigma_r = \sum_i \frac{\alpha_i^{(r)} (\lambda_i^{(r)} l_i^{(r)} / D_i^{(r)} + \zeta_i^{(r)})}{\omega_i^{(r)2}}, \tag{3}$$

estimate pe cele două ramuri separate de pila mediană.

St. cerc. mec. apl., tom 43, nr. 3, 1984, p. 238—250

Pierderile hidraulice sînt compuse din :

A. *Pierderi locale la intrarea în priză*, de forma :

$$h_w^{(1)} = \alpha \frac{v^2}{2g}, \tag{4}$$

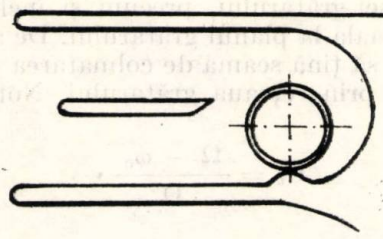


Fig. 1

cu α aproximativ egal cu unitatea.

B. *Pierderile între secțiunea de intrare în priză și secțiunea de intrare în camera spirală* sînt compuse din :

a) *pierderea de sarcină în grătar*,

$$h_w^{(2)} = \alpha \zeta_g \frac{v^2}{2g}, \tag{5}$$

unde v este viteza medie în amonte de grătar, iar coeficientul lui Coriolis α se determină experimental [1].

Coeficientul de pierderi locale ζ_g depinde, cum se va detalia mai jos, de înclinația grătarului, de unghiul de deviație al curentului în plan orizontal față de axa grătarului, de forma și mărimea ochiurilor, precum și de geometria rețelei de bare. În ipoteza colmatării uniforme a grătarului, coeficientul de rezistență crește apreciabil, fiind necesară introducerea unui coeficient de corecție specific. Dacă grătarul nu este colmatat uniform, se mărește suplimentar coeficientul lui Coriolis, ca urmare a amplificării gradului de neuniformitate a curgerii. De exemplu [1], cînd este colmatată doar partea superioară a grătarului, coeficientul lui Coriolis atinge valoarea $\alpha = 1{,}42$, ajungind la $\alpha = 1{,}70$ dacă este colmatată partea sa inferioară.

Coeficientul de pierderi locale în grătarul curat se poate calcula, într-o primă aproximație, după Kirschmer, cu relația [2] :

$$\zeta_g = \beta_k \left(\frac{s}{b}\right)^{4/3} \sin \alpha, \tag{6}$$

unde α este unghiul de înclinare al planului grătarului față de orizontală, s este lățimea barei rețelei (transversal pe curent), b este lățimea ochiului, iar coeficientul β_k depinde de forma barei.

După Berezinski [2], coeficientul de pierderi locale în grătar se scrie :

$$\zeta_g = \beta_b \left(\frac{s}{s+b}\right)^{1,6} \left(2{,}3\,\frac{l}{b} + 8 + 2{,}4\,\frac{b}{l}\right) \sin\alpha, \tag{7}$$

unde l reprezintă lungimea barei în plan orizontal (în lungul curgerii). Formula lui Berezinski se poate corecta cu efectul pierderilor suplimentare datorate formei carcasei grătarului, precum și înclinației de unghi δ a curentului față de normala la planul grătarului. De asemenea, se poate introduce o corecție care să țină seama de colmatarea parțială (pînă la 25%) a secțiunii de curgere prin rețeaua grătarului. Notînd cu :

$$C_p = \frac{\Omega - \omega_0}{\Omega}, \tag{8}$$

unde ω_0 este aria cumulată a barelor care obturează curgerea în grătarul curat și prin :

$$C_{p_1} = \frac{\omega_0 + \omega_m}{\Omega}, \tag{9}$$

unde ω_m este aria suplimentar obturată datorită colmatării grătarului, formula completă pentru coeficientul de rezistență locală se scrie :

$$\zeta_g = \sigma\beta_F C p_1^{1,16} \left(1{,}16\,\frac{l}{b} + 4{,}03 + 1{,}21\,\frac{b}{l}\right) \sin\alpha, \tag{10}$$

unde

$$\sigma = \frac{\zeta_g|_{\delta \neq 0}}{\zeta_g|_{\delta = 0}} \tag{11}$$

este un coeficient ce ține seamă de influența abaterii curentului de la axa grătarului în plan orizontal.

Coeficientul C_{p_1} depinde de factorul C_p prin relația :

$$C_{p_1} = 1 - (1 - p)(1 - C_p), \tag{12}$$

unde p este gradul de colmatare :

$$p = 1 - \frac{\Omega - \omega_0 - \omega_m}{\Omega - \omega_0} = \frac{\omega_m}{\Omega - \omega_0}. \tag{13}$$

b) *Pierderile de sarcină hidraulică datorită contracției între pile.* Există două zone de contracție :

— între pilele de bază ;

— între pila de bază și cea intermediară.

b_1) *Pierderile de sarcină hidraulică datorită contracției între pilele de bază* se calculează, după Sliski [2], cu relația :

$$h_w = \alpha \zeta_k \frac{v_k^2}{2g}, \tag{14}$$

unde v_k reprezintă viteza în secțiunea contractată datorită prezenței pilelor de bază, iar coeficientul de pierdere locală ζ_k are expresia :

$$\zeta_k = \left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right)\left(\frac{\eta}{\varepsilon}\right)^2, \tag{15}$$

unde coeficientul η reprezintă raportul dintre secțiunea contractată și secțiunea intermediară :

$$\eta = \frac{\omega_{fin}}{\omega_0},$$

ω_0 fiind secțiunea corespunzătoare biefului amonte, iar coeficientul de contracție ε depinde de raza r de racordare a pilelor, conform expresiei [4] :

$$\varepsilon = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{0{,}4}{e^{16K}}(1 - \beta)}}, \tag{16}$$

unde $K = (r_1 + r_2)/(2b)$, b fiind distanța între pile în plan orizontal, iar $\beta = b/B$ (B — distanța între axele pilelor).

b_2) *Pierderile de sarcină hidraulică datorită contracției între pila de bază și cea intermediară.* După Idelcik [4], coeficientul de pierdere locală datorită contracției între pilele de bază și pila intermediară, raportat la sarcina cinetică dinainte de pila intermediară, se scrie :

$$\zeta = 1{,}15\, C_x \frac{\eta}{(1 - \eta)^3}, \tag{17}$$

unde $\eta = d/b$, d fiind grosimea pilei intermediare, iar b distanța dintre pilele de bază. Coeficientul C_x se alege 0,66.

Pe lîngă pierderile locale de sarcină hidraulică, datorită contracției, este necesar să se adauge pierderile de sarcină liniare în zona pilelor. Definind diametrul hidraulic echivalent prin relația :

$$D_e = \frac{4\omega_{int}}{\chi}, \tag{18}$$

unde χ este perimetrul udat, iar rugozitatea adimensională prin :

$$\overline{\Delta} = \frac{\Delta}{D_e}, \tag{19}$$

unde Δ este rugozitatea absolută ($\Delta \sim 0{,}0025$ m), corespunzînd unei suprafeţe de beton cu condiţii medii, coeficientul redus de pierderi de sarcină este :

$$\zeta_f = \lambda \frac{1}{D_e}. \tag{20}$$

Coeficientul de frecare λ depinde de rugozitatea relativă [2].

c) *Pierderile de sarcină hidraulică datorită lărgirii curentului aval de pila intermediară* se pot calcula cu formula lui Borda prin analogie cu forma unui con. Tangenta semiunghiului din vîrful conului echivalent se scrie :

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = (\sqrt{\omega_{fin}} - \sqrt{\omega_2})/(l\sqrt{\pi}), \tag{21}$$

unde ω_2 este aria secţiunii de intrare în camera spirală, iar l este lungimea zonei de trecere. Coeficientul de rezistenţă se scrie :

$$\zeta = \frac{\lambda}{8 \sin \frac{\alpha}{2}} (1 - (\omega_2/\omega_{fin})^2). \tag{22}$$

d) *Pierderile de sarcină hidraulică în nişele şi puţul vanei cu închidere rapidă* se datoresc lărgirii curentului în nişe şi contracţiei sale ulterioare. După Cepaikin [2], pierderile în nişă se calculează cu relaţia :

$$h_w = 0{,}0274 \; l_n \left(\frac{1}{L_1} + \frac{4}{L_2} \right) \frac{v_1^2}{2g}, \tag{23}$$

unde l_n este lungimea nişei în sensul curgerii, L_1 este grosimea curentului în dreptul nişei superioare, iar L_2 este grosimea curentului în dreptul nişei laterale.

e) *Pierderile de sarcină în nişele batardoului aval* se admit egale cu cele de la punctul d).

C. *Sarcina dinamică la ieşirea din tubul de aspiraţie* se calculează cu relaţia :

$$h_d = \alpha \frac{v^2}{2g}, \tag{24}$$

unde coeficientul lui Coriolis $\alpha = 2$ corespunde funcţionării în regim combinatoriu.

D. *Pierderile de sarcină hidraulică cumulate* se obţin prin însumarea tuturor pierderilor de sarcină examinate. De exemplu, pentru cazul cînd curentul atacă frontal grătarul ($\delta = 0$, curat) se obţin, pentru hidrogeneratorul de la U.H.E. Porţile de Fier I, valorile din următorul tabel.

Q (m³/s)	200	300	400	500	600	700	800
h_{wt}(cm)	8,99	20,24	35,98	56,22	80,95	110,18	143,91

3. INFLUENȚA COLMATĂRII NEUNIFORME A GRĂTARULUI ASUPRA CÎMPULUI DE VITEZE

Întrucît coeficienții pierderilor de sarcină hidraulică în cele două ramificații separate de pila intermediară sînt aproximativ egali în ipoteza aceleiași colmatări a celor două segmente de grătar, se obțin aceleași debite parțiale, adică viteze medii egale în secțiunea de intrare în camera spirală.

Pe de altă parte, măsurătorile pe model ale debitelor parțiale indică o asimetrie a repartiției debitului total; prin secțiunea din stînga trece un debit cu circa 20% mai mare. Epurele vitezelor în cele două ramificații diferă, iar folosirea unui singur punct de măsură pentru aprecierea pierderilor de sarcină în grătar poate da erori apreciabile. Printre cauzele posibile ale neuniformității repartiției debitului total între cele două ramuri separate de pila intermediară se numără influența colmatării neegale a secțiunilor grătarului, precum și structura curgerii între bieful amonte și intrarea în rotor.

Notînd prin ζ_s și ζ_d coeficienții de pierderi locale de sarcină hidraulică în derivația stîngă și dreaptă, în care s-au inclus și pierderile liniare, se obține:

$$h_s = \Sigma\zeta_s \frac{v_s^2}{2g} \text{ și } h_d = \Sigma\zeta_d \frac{v_d^2}{2g}. \tag{25}$$

În circuitul hidraulic cu ramificație, pierderea de sarcină este aceeași pe ambele ramuri:

$$h_s = h_d \text{ și } Q = Q_s + Q_d. \tag{26}$$

Analizînd expresia concretă a pierderilor de sarcină, detaliate anterior, rezultă:

$$h_s = (k_0 + k_1(a + bp_s)^{1,6})Q_s^2, \tag{27}$$

$$h_d = (k_0 + k_1(a + bp_d)^{1,6})Q_d^2. \tag{28}$$

Se obține din sistemul (26) pierderea de sarcină hidraulică:

$$h_s = (k_{am} + AB/(\sqrt{A} + \sqrt{B})^2 + k_{av})Q^2, \tag{29}$$

unde

$$A = k_0 + k_1(a + bp_s)^{1,6}, \qquad B = k_0 + k_1(a + bp_d)^{1,6}.$$

Debitele Q_s și Q_d au expresiile:

$$Q_s = \frac{Q}{1 + \sqrt{B/A}}, \qquad Q_d = \frac{Q}{1 + \sqrt{A/B}}. \tag{30}$$

Din aceste relații se obține raportul debitelor în cele două ramificații create de prezența pilei intermediare :

$$\frac{Q_s}{Q_a} = \sqrt{\frac{B}{A}} = \sqrt{\frac{k_0 + k_1(a + bp_s)^{1,6}}{k_0 + k_1(a + bp_a)^{1,6}}}. \tag{31}$$

Se constată că repartiția debitelor în cele două ramuri este asimetrică în cazul gradelor de colmatare diferite, avînd ca rezultat epure de viteze diferite în cele două secțiuni separate de pila intermediară. Întrucît însă în cazul unei colmatări uniforme sau în absența colmatării grătarului se obțin debite egale în cele două ramuri, rezultă că existența unui debit mai mare cu circa 20 % în secțiunea din stînga, semnalat de cercetările experimentale, nu se poate explica prin colmatarea neuniformă a grătarului ci prin procesul hidraulic de curgere între bieful amonte și intrarea în rotor.

4. SPECTRUL HIDRODINAMIC ÎN ZONA DE INTRARE A HIDROGENERATORULUI DE JOASĂ CĂDERE

Manifestarea unei diferențe între debitele parțiale în ramificațiile paralele separate de pila intermediară, chiar în absența colmatării secțiunilor grătarului, este legată de procesul de curgere între bieful amonte și intrarea în rotor. Poziția mediană a pilei intermediare în secțiunea transversală de curgere nu are ca rezultat realizarea de debite egale în cele două secțiuni de aceeași arie, deși sînt considerate astfel în condițiile de proiectare. Măsurătorile de viteze pe modele de laborator au indicat că prin secțiunea din stînga, privind spre aval, trece un debit cu circa 20 % mai mare decît prin secțiunea din dreapta. În consecință, epurele de viteze în cele două subsecțiuni diferă atît prin valoarea vitezei medii, cît și prin formă, impunîndu-se o analiză amănunțită a punctelor de măsură în vecinătatea grătarului pentru a aprecia corect mărimea pierderilor de sarcină locale în acesta. În același timp, este rațional să se admită că epura vitezei în secțiunea de intrare în rotor este aproximativ uniformă.

Într-o primă aproximație, se poate neglija total influența pierderilor de sarcină hidraulică și caracterul spațial al curgerii. Faptul că chiar în aceste condiții simplificatoare se obține o asimetrie a densității liniilor de curent în dreptul pilei intermediare, arată că acest efect este o consecință a inerției fluidului, fiind legat de condițiile concrete de curgere, spectrul hidrodinamic realizat fiind condiționat atît de epura vitezei amonte, cît și de forma domeniului de curgere și de condițiile de funcționare ale turbinei (debit, turație, poziția paletelor statorice etc.).

Prezența rotorului se poate modela fie prin transformarea domeniului de curgere într-un domeniu dublu conex, impunînd pe secțiunea de intrare înclinații cunoscute și egale ale vitezei absolute pe raza locală, fie prin înlocuirea rotorului printr-o sursă și un vîrtej suprapuse în centrul acestuia, de debit Q și intensitate turbionară Γ alese în conformitate cu regimul de exploatare al turbinei :

$$Q = 2\pi r_1 v_{1r}, \quad \Gamma = 2\pi r_1 v_{1u}, \tag{32}$$

unde r_1 reprezintă raza de intrare în rotor, iar v_{1r} și v_{1u} sînt componentele meridiană și tangențială ale vitezei absolute la intrarea în rotor. Debitul Q din relațiile (32) este numeric egal cu raportul dintre debitul hidrogeneratorului și lățimea secțiunii de intrare în rotor. În schema de calcul, tratată adimensional, intervine însă raportul dintre circulația Γ și debitul specific Q:

$$\frac{\Gamma}{Q} = \frac{v_{1u}}{v_{1r}} = \frac{v_1 \cos \alpha_1}{v_1 \sin \alpha_1} = \operatorname{ctg} \alpha_1, \tag{33}$$

unde α_1 este unghiul dintre viteza absolută și tangenta la intrarea în rotor, aproximativ egal cu unghiul corespunzător al înclinării paletelor statorice.

Spectrul hidrodinamic al liniilor de curent, cu condiția intrării ortogonale în secțiunea amonte (în dreptul grătarului), presupune și influența pilei intermediare, materializată conform principiului solidificării, printr-o linie de curent pe axul median al curgerii. Condiția de intrare ortogonală are loc, riguros vorbind, doar în cazul în care grupul funcționează izolat, deoarece în condițiile funcționării grupurilor vecine, datorită interacțiunii jeturilor înecate, se produce o interdependență între liniile de curent, avînd ca rezultat intrarea înclinată de unghi δ prin secțiunea grătarului, modificînd totodată și mărimea pierderilor locale în acesta.

Alegînd o rețea ortogonală pentru discretizarea numerică a algoritmului de analiză, celulele situate în vecinătatea frontierei vor avea forma unui dreptunghi curbiliniu. În diferențe finite, relația de calcul a funcției de curent ψ_0 în nodul central, în funcție de valorile $\psi_i (i = 1,4)$ în nodurile adiacente, aflate la distanțele $h_i (i = 1,4)$, neegale în general (fig. 2), se scrie:

$$\psi_0 = \frac{h_1 h_2 h_3 h_4}{h_1 h_3 + h_2 h_4} \left(\frac{\psi_1}{h_1 (h_1 + h_3)} + \frac{\psi_2}{h_2 (h_2 + h_4)} + \frac{\psi_3}{h_3 (h_1 + h_3)} + \frac{\psi_4}{h_4 (h_2 + h_4)} \right). \tag{34}$$

Pentru rezolvarea problemei s-a folosit metoda rezidualului (Allen). Admițînd valori arbitrare ale funcției de curent în nodurile rețelei, dar cu valori impuse pe frontieră din considerente fizice, se recalculează în treceri succesive valorile în nodurile interioare pînă cînd este satisfăcută condiția (minimizarea rezidualului):

$$\max_{i \in N} |\psi_i^{(k+1)} - \psi_i^{(k)})| \leqslant \varepsilon, \tag{35}$$

unde k și $k + 1$ semnifică ordinul trecerilor, iar N este mulțimea nodurilor rețelei. Parametrul ε, arbitrar de mic, caracterizează precizia de calcul.

Întrucît spectrul hidrodinamic cuprinde singularități (sursa și vîrtejul care modelează rotorul turbinei), soluția analitică a mișcării potențiale admite puncte singulare, în vecinătatea cărora olomorfia potențialului complex este infirmată. Deoarece schema numerică este stabilă și convergentă doar pentru funcții care sînt analitice în domeniul de studiu, notînd prin ψ_s funcția de curent singulară care descrie spectrul hidrodi-

namic al unui cuplu sursă-vîrtej în spaţiul infinit, se va reprezenta funcţia de curent căutată sub forma :

$$\psi = \psi_1 + \psi_s, \tag{36}$$

unde $\psi_1 = \psi - \psi_s$ reprezintă partea regulată a funcţiei de curent ψ.

În coordonate adimensionale (debit $Q = 1$), funcţia de curent a sursei se scrie (fig. 3) :

$$\psi_{sr} = \begin{cases} 1 - (\theta + \theta_0)/(2\pi) & \text{pentru } \theta \in (0,\ 2\pi - \theta_0], \\ 2 - (\theta + \theta_0)/(2\pi) & \text{pentru } \theta \in (2\pi - \theta_0,\ 2\pi], \end{cases} \tag{37}$$

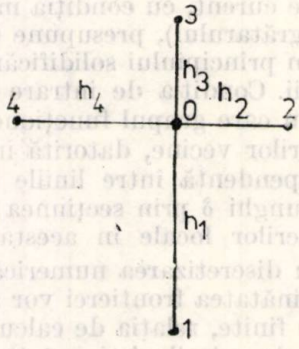


Fig. 2

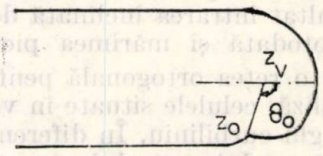


Fig. 3

unde

$$\theta_0 = -\operatorname{arctg}\left|\frac{y_0 - y_v}{x_0 - x_v}\right| + \pi, \tag{38}$$

iar z_0 şi z_v sînt afixele punctului de bifurcare al camerei spirale şi al centrului rotorului.

Funcţia de vîrtej asociată este

$$\psi_v = \frac{GQ}{2\pi}\ln(R/R_0), \tag{39}$$

unde

$$R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}; \quad R_0 = \sqrt{(x - x_v)^2 + (y - y_v)^2};$$

$$GQ = \frac{\Gamma}{Q} = \operatorname{ctg}\alpha_1.$$

Factorul GQ depinde de turaţia rotorului, fiind egal cu zero cînd rotorul este blocat.

Spectrul hidrodinamic obținut (fig. 4) evidențiază o tendință clară a liniilor de curent de concentrare în ramura din stînga avînd ca efect creșterea relativă a debitului în această derivație. În figură este reprezentată linia $\psi = 0{,}5$ pentru cîteva valori ale parametrului GQ. Se constată, în conformitate cu observațiile experimentale, o influență redusă a rotației rotorului asupra repartiției debitului în ramificațiile paralele.

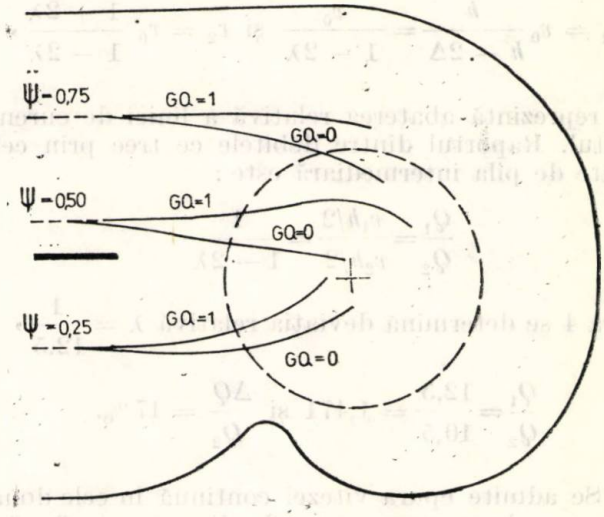


Fig. 4

Existența neuniformității în repartiția debitului în ramurile separate de pila intermediară se poate exprima cantitativ în funcție de deviația liniei $\psi = 0{,}5$ în raport cu axa pilei intermediare. Dacă această deviație este notată prin Δ, iar h reprezintă lățimea în planul orizontal al secțiunii transversale în zona pilei intermediare, coeficientul de neuniformitate al debitului poate fi evaluat în următoarele două ipoteze extreme relativ la epura de viteze :

a) epurele de viteze sînt relativ uniforme dar diferite în cele două secțiuni de bifurcare ;

b) epura de viteze este liniară și continuă în cele două subsecțiuni.

Cazul a. Notînd prin v_1 și v_2 vitezele în secțiunea din stînga, respectiv dreapta (fig. 5), condiția de continuitate se scrie :

$$v_1 \frac{h}{2} + v_2 \frac{h}{2} = v_0 h, \tag{40}$$

unde v_0 reprezintă viteza medie amonte.

Debitul parțial între pila din stînga și linia $\psi = 0{,}5$ este :

$$\frac{Q}{2} = v_1 \left(\frac{h}{2} - \Delta \right), \tag{41}$$

în timp ce între aceeași linie și pila din dreapta trece un debit egal:

$$\frac{Q}{2} = v_2 \frac{h}{2} + v_1 \Delta. \tag{42}$$

Din aceste relații se obține:

$$v_1 = v_0 \frac{h}{h - 2\Delta} = \frac{v_0}{1 - 2\lambda} \text{ și } v_2 = v_0 \frac{1 + 2\lambda}{1 - 2\lambda}, \tag{43}$$

unde $\lambda = \Delta/h$ reprezintă abaterea relativă a liniei de curent care reprezintă semidebitul. Raportul dintre debitele ce trec prin cele două subsecțiuni separate de pila intermediară este:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{v_1 h/2}{v_2 h/2} = \frac{1}{1 - 2\lambda}. \tag{44}$$

Din figura 4 se determină deviația relativă $\lambda = \frac{1}{12,5}$, deci

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{12,5}{10,5} = 1,471 \text{ și } \frac{\Delta Q}{Q_2} = 47\ \%.$$

Cazul b. Se admite epura vitezei continuă în cele două subsecțiuni (formă de trapez cu baza mare spre pila din stînga) (fig. 6). Se notează prin v_1 și v_2 vitezele extreme din vecinătatea pilelor, iar prin α unghiul de înclinație al epurei. Se obține:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_1 - v_2}{h}, \quad v_1 = v_2 + h \operatorname{tg} \alpha. \tag{45}$$

Dacă v^* este viteza corespunzătoare liniei $\psi = 0,5$, rezultă că

$$v^* = v_2 + \left(\frac{h}{2} - \Delta\right) \operatorname{tg}\alpha$$

$$v_0 \frac{h}{2} = \frac{v_1 + v}{2}\left(\frac{h}{2} - \Delta\right) = \frac{v_2 + v^*}{2}\left(\frac{h}{2} + \Delta\right). \tag{46}$$

Din relațiile de mai sus se obține:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2v_0}{\frac{h^2}{4} - \Delta^2}, \quad v_2 = v_0\left(1 - \frac{4h\Delta}{h^2 - 4\Delta^2}\right);$$

$$v_1 = v_0\left(1 + \frac{4h\Delta}{h^2 - 4\Delta^2}\right); \quad v^* = v_0\left(1 + \frac{8\Delta^2}{h^2 - 4\Delta^2}\right). \tag{47}$$

Raportul debitelor ce trec prin secțiunile separate de pila intermediară se scrie :

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{1 - 4\lambda^2 + 2\lambda}{1 - 4\lambda^2 - 2\lambda} \qquad \left(\lambda = \frac{\Delta}{h}\right). \tag{48}$$

Pentru $\lambda = 1/12{,}5$, rezultă $Q_1/Q_2 = 1{,}393$, adică diferența dintre debitele parțiale în valoare relativă este

$$\frac{\Delta Q}{Q_2} = 39{,}3\,\%.$$

În acest fel, cu ipoteze simplificatoare, se constată că asimetria debitelor prin secțiunile separate de pila intermediară poate fi acceptabil explicată prin efectul inerției fluidului, nefiind o consecință directă a neuniformității pierderilor de sarcină în ramificație. În cele două subsecțiuni se stabilește o epură neuniformă de viteze, iar neglijarea acestui efect prin amplasarea nejudicioasă a punctelor de măsură poate să conducă la erori apreciabile de evaluare a pierderilor de sarcină în grătar.

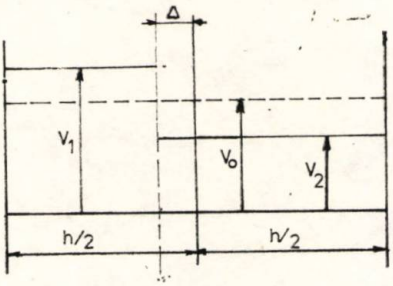


Fig. 5

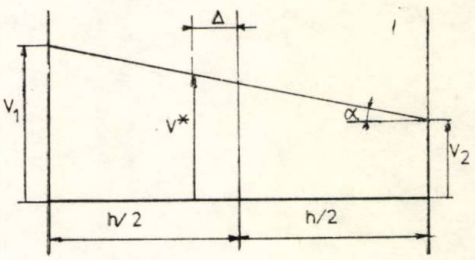


Fig. 6

5. CONCLUZII

Aprecierea cantitativă satisfăcătoare a randamentului hidraulic al grupurilor hidroenergetice de joasă cădere presupune o evaluare realistă a pierderilor liniare și locale de sarcină hidraulică. În particular, mărimea acestor pierderi în grătar depinde de estimarea corectă a influenței formei rețelei de bare, precum și de nerespectarea condiției de atac frontal a suprafeței grătarului de către curent. Gradul de colmatare uniformă a ochiurilor grătarului este de asemenea un parametru important. O pondere însemnată în expresia pierderilor cumulate de sarcină hidraulică o are sarcina dinamică remanentă în tubul de aspirație.

Colmatarea neuniformă a grătarului are ca efect direct perturbarea uniformității epurei vitezelor în secțiunea de intrare, ca urmare a asimetrizării traseului hidraulic pentru tuburile de curent corespunzătoare. Chiar în cazul colmatării uniforme, din motive hidrodinamice, se manifestă o repartiție inegală a debitului total prin cele două subsecțiuni ale grătarului separate de planul median vertical.

Pentru a aprecia corect prin măsurători „in situ" pierderile de sarcină hidraulică și a evalua astfel gradul de colmatare al grătarului, se propune amplasarea unor prize suplimentare de măsură în secțiunea transversală și o estimare corespunzătoare a vitezei medii în secțiunea de intrare.

Primită la redacție la 30 noiembrie 1983

BIBLIOGRAFIE

1. AL. DIACON, I. SETEANU, M. ERHAN, V. COLIBAN, *Studiul neuniformităților vitezei de intrare în prizele amenajărilor hidroenergetice de joasă cădere*, Conferința Națională de Energetică, București, nov., 1983.
2. S. M. SLISKI, *Ghidravlika zdanii ghidroelektrostanții*, Moskva, 1970.
3. K. F. HIMINITKII, *O formulah dlea coeffițienta sjatia strui*, Teploenerghetika, *3* (1975).
4. I. C. IDELCIK, *Spravocinik po ghidravliceskim soprotivleniam*, Moskva, 1975.

DETERMINAREA RAPOARTELOR DE TRANSMITERE ALE SCHIMBĂTORULUI DE VITEZE AL AUTOVEHICULULUI DUPĂ CRITERIUL TIMPULUI MINIM DE DEMARARE

de AUREL P. STOICESCU

În lucrare se prezintă metoda de determinare a rapoartelor de transmitere ale schimbătorului de viteze al autovehiculului astfel încît să se obțină timpul de demarare minim între două viteze date. Pentru rezolvarea problemei puse se aplică metoda programării dinamice, într-o exprimare analitică care permite să se înlăture dificultățile multidimensionalității. Se prezintă algoritmul de calcul și particularitățile programului elaborat, care a fost codificat în FORTRAN.

1. INTRODUCERE

La obținerea de viteze de deplasare medii cît mai ridicate, un rol deosebit de însemnat îl are capacitatea de demarare a autovehiculului, care este în strînsă legătură cu numărul treptelor din schimbătorul de viteze și cu rapoartele lor de transmitere. Problema determinării acestor rapoarte astfel încît să se obțină capacitate de demarare sporită a fost abordată în literatura de specialitate, adoptîndu-se o serie de simplificări [2, 4, 11, 12], astfel încît rezultatele obținute au mai degrabă un caracter calitativ. Prin folosirea mijloacelor automate de calcul a devenit posibilă rezolvarea problemei menționate fără a fi necesare simplificări importante, așa cum se procedează în lucrarea [8], în care, însă, se dau puține informații în legătură cu algoritmul de optimizare aplicat. O rezolvare interesantă a problemei minimizării timpului de demarare se poate obține prin metoda programării dinamice [7, 9]. În prima din aceste lucrări, însă, algoritmul de calcul este schițat doar în linii mari, iar numărul variantelor considerate nu este fundamentat. O prezentare mai completă a algoritmului programării dinamice în cazul în speță este făcută în [9], în care se folosește integrarea numerică a ecuației de mișcare a autovehiculului. Nu se dau, însă, informații mai concrete asupra modului în care se iau în considerație vitezele de trecere dintr-o treaptă în alta.

În lucrarea de față se prezintă un procedeu de determinare a rapoartelor de transmitere ale schimbătorului de viteze al autovehiculului astfel încît să se obțină timpul de demarare minim între două viteze date. În acest scop se va aplica metoda programării dinamice, folosindu-se metoda analitică de integrare a ecuației de mișcare a autovehiculului. Se vor trata următoarele situații : (1) motorul autovehiculului este fără regulator — limitator de turație ; (2) motorul autovehiculului este cu regulator-limitator de turație. În situația (2) se are în vedere și cazul cînd, pentru o viteză maximă dată, puterea maximă a motorului are valori arbitrare mai mari decît o anumită valoare ce asigură viteza maximă menționată. Se prezintă algoritmul de calcul și particularitățile programului întocmit care a fost codificat în limbaj FORTRAN.

În prealabil se fac următoarele notații : P [kW] — puterea motorului ; P_{max}[kW] — puterea maximă a motorului ; $P_{v\,max}$[kW] — puterea motorului la viteza maximă ; M_{max}[daN.m] — momentul maxim al motorului ; F_t, $F_{t\,max}$ [daN] — forța de tracțiune, respectiv forța de tracțiune

St. cerc. mec. apl., tom 43, nr. 3, 1984, p. 251—266

la viteza maximă ; R_a[daN] — rezistența aerului ; G_a [daN] — greutatea autovehiculului ; n, n_{min}, n_{max}, n_P, $n_{V\,max}$[l/min] — turația arborelui cotit al motorului, respectiv turația acestuia minimă, maximă, la puterea maximă și la viteza maximă în ultima treaptă a schimbătorului de viteze ; v[m/s], V, V_{max}[km/h] — viteza autovehiculului, respectiv viteza sa maximă ; ψ — rezistența specifică a drumului ; α_p — unghiul pantei căii de rulare ; $\psi_0 = f_0 \cos\alpha_p + \sin\alpha_p$; f — coeficientul de rezistență la rulare ; f_0 — coeficientul de rezistență la rulare pentru viteză nulă ; f_{01}, f_{02} — coeficienți de influență a vitezei asupra coeficientului de rezistență la rulare, k [daN.m^{-4} s^2] — coeficientul aerodinamic ; A [m^2] — aria secțiunii transversale maxime a autovehiculului ; α, β, γ — coeficienții din expresia puterii motorului ; I_m[daN.m.s^2] — momentul de inerție al pieselor în mișcare de rotație ale motorului ; I_r[daN.m.s^2] — momentul de inerție al tuturor roților autovehiculului ; r_r[m] — raza de rulare a roților motoare a autovehiculului ; η_t — randamentul transmisiei autovehiculului ; i_0 — raportul de transmitere al transmisiei principale ; i_{sj} — raportul de transmitere al treptei j ; a[m/s^2] — accelerația autovehiculului ; g[m/s^2] — accelerația gravitațională ; N_c — numărul de cilindri ai motorului ; t_{dj}[s] — timpul de demarare în treapta j ; t_d[s] — timpul total de demarare ; t_{sj}[s] — timpul de schimbare la trecerea din treapta j în $j+1$; N — numărul treptelor schimbătorului de viteze.

2. FUNCȚIA TIMPULUI DE DEMARARE ȘI ECUAȚIA LUI BELLMAN

Fie v_{0j}, v_{fj} ($j = 1, 2, \ldots N$) viteza inițială și, respectiv, viteza finală în etajul j. Timpul total de demarare corespunzător creșterii de la v_{01} la v_{fN} va fi

$$t_d = \sum_{j=1}^{N-1} t_{sj} + \sum_{j=1}^{N} \int_{v_{0j}}^{v_{fj}} \frac{\mathrm{d}v}{a(v,\ i_{sj})}. \qquad (1)$$

Evident, întrucît se urmărește minimizarea timpului de demarare, motorul trebuie să funcționeze pe caracteristica exterioară, deci $a(v,\ i_{sj})$ corespunde caracteristicii accelerațiilor.

Notînd

$$F(v_{0j},\ v_{fj},\ i_{sj}) = \int_{v_{0j}}^{v_{fj}} \frac{\mathrm{d}v}{a(v,\ i_{sj})},$$

relația (1) devine

$$t_d = \sum_{j=1}^{N-1} t_{sj} + \sum_{j=1}^{N} F(v_{0j},\ v_j,\ i_{sj}). \qquad (2)$$

În timpul schimbării treptelor, legătura dintre motor și transmisie este întreruptă, astfel că autovehiculul se deplasează în virtutea inerției.

Din studiul mișcării autovehiculului rezultă sub forma generală relația

$$v_{0j} = f(v_{f,j-1},\ t_{sj-1}),\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N, \tag{3}$$

astfel că relația (2) devine :

$$t_d = \sum_{j=1}^{N-1} t_{sj} + F(v_{01},\ v_{f1},\ i_{s1}) + \sum_{j=2}^{N} \mathcal{F}(v_{fj-1},\ v_{fj},\ i_{sj},\ t_{sj-1}), \tag{4}$$

unde

$$\mathcal{F}(v_{fj-1},\ v_{fj},\ i_{sj},\ t_{sj-1}) = F(f(v_{f,j-1},\ t_{sj-1}),\ v_j,\ i_{sj}). \tag{4'}$$

Viteza inițială în prima treaptă se alege, ea trebuind să nu fie mai mică decît viteza minimă de deplasare a autovehiculului după cuplarea ambreiajului. De asemenea, și viteza finală se consideră ca o mărime dată, aleasă de la început. În fine, mărimile t_{sj} se presupun cunoscute, ele fiind dependente în primul rînd de tipul dispozitivelor de cuplare a treptelor.

Raportul de transmitere al ultimei trepte se presupune cunoscut, el fiind determinat din condiția obținerii vitezei maxime impuse, în palier. În cazul că există etaj de supraviteză, de regulă viteza maximă impusă se obține în etajul de priza directă, iar demararea se efectuează pînă în această treaptă (autovehiculul este încărcat cu sarcina maximă constructivă). În această situație, N reprezintă numărul treptelor, exclusiv ultima treaptă. Raportul de determinare al primei trepte este, în general, cunoscut, fiind determinat, de regulă, din condiția urcării unei pante maxime impuse.

Așadar, ținînd seama de cele de mai sus, din relația (1) se deduce că timpul de demarare este o funcție de $i_{sj}(i = 2,\ 3,\ \ldots,\ N - 1)$ și $v_{fj}(j = 1,\ 2,\ \ldots\ N - 1)$, adică de $2N - 3$ variabile. Se pune problema determinării acestor mărimi astfel încît t_d să fie minim. Evident, se poate considera și situația cînd i_{s1} nu este dat dinainte, astfel ca el să fie determinat din condiția minimizării timpului de demarare, numărul variabilelor fiind $2(N - 1)$.

Din examinarea relației (4) rezultă că procesul de demarare se efectuează în N pași, la fiecare pas intervenind doar o parte din mărimile în raport cu care se efectuează minimizarea. Structura aceasta particulară a funcției obiectiv permite aplicarea metodei programării dinamice cu avantajele cunoscute. Se remarcă, însă, că funcția $\mathcal{F}$ este dependentă de trei variabile, apărînd problema multidimensionalității [3], care face dificilă aplicarea metodei programării dinamice. Se poate ocoli această dificultate în modul următor.

Condiția necesară de minim a lui t_d în raport cu v_{fj} se scrie

$$\frac{\partial t_d}{\partial v_{fj}} = 0, \qquad j = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ N - 1. \tag{5}$$

Ținînd seama de (1) și de relația generală

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \varphi(x)\mathrm{d}x = \varphi(x_2)\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}y} - \varphi(x_1)\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}y},$$

condiția de minim (5) devine

$$\frac{\partial t_d}{\partial v_{fj}} = \frac{1}{a(v_{fj}\,,\ i_{sj})} - \frac{1}{a(v_{0,j+1},\ i_{s,j+1})} \cdot \frac{\mathrm{d}v_{0,j+1}}{\mathrm{d}v_{fj}} = 0. \tag{6}$$

Dar, ținînd seama de (3), din relația (6) rezultă

$$a(v_{fj},\ i_{sj}) \cdot \frac{\partial f(v_{fj},\ t_{s,j+1})}{v_{fj}} = a(f(v_{fj},\ t_{s,j+1}),\ i_{s,j+1}), \tag{7}$$

astfel că, în general,

$$v_{fj} = \nu(i_{sj},\ i_{s,j+1},\ t_{sj+1}). \tag{8}$$

Cu relația (8), funcția timpului de demarare devine

$$t_d = \sum_{j=1}^{N-1} t_{sj} + G(v_{10},\ i_{s1},\ i_{s2}) + \sum_{j=2}^{N-1} \mathcal{G}(i_{sj-1},\ i_{sj},\ i_{sj+1}) + \mathcal{G}_N(i_{sN-1},\ i_{sN},\ v_{fN}). \tag{9}$$

Funcțiile G, $\mathcal{G}$ și $\mathcal{G}_N$ se obțin în mod corespunzător prin substituția lui v_{fj} dat de (8) în F și $\mathcal{F}$.

Deci timpul de demarare s-a exprimat în funcție numai de rapoartele de transmitere, astfel încît numărul variabilelor este de $N - 2$ și, respectiv, $N - 1$, în cazul cînd i_{s1} nu se determină din alte considerente.

Se constată din structura relației (9) că dacă se determină timpul de demarare prin metode numerice, dificultatea multidimensionalității nu este înlăturată. În schimb, aplicarea metodei analitice permite depășirea acestei dificultăți, așa cum se va arăta în continuare.

Puterea motorului se exprimă cu relația cunoscută [14]

$$P = P_{max}\left[\alpha\frac{n}{n_P} + \beta\left(\frac{n}{n_P}\right)^2 - \gamma\left(\frac{n}{n_P}\right)^3\right]. \tag{10}$$

Se mai notează

$$\zeta = n_{V_{max}}/n_P,\ x = V/V_{max}. \tag{11}$$

În continuare, x se va numi viteză relativă, astfel că vitezelor v_{0j}, $v_{fj}(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N)$ le vor corespunde, respectiv, vitezele relative x_{0j}, $x_{fj}(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N)$.

Se poate scrie, pentru etajul j,

$$\frac{n}{n_P} = \frac{n}{n_{V_{max}}} \cdot \zeta = \frac{V}{V_{max}} \cdot \frac{i_{sj}}{i_{sN}}. \tag{12}$$

Există relațiile cunoscute

$$P \cdot \eta_t = \frac{F_{tj}V}{360}, \qquad D_j = \frac{F_{tj} - R_a}{G_a}, \tag{13}$$

astfel că, ținînd seama de (10), (11), (12) și (13), rezultă

$$D_j - \psi = P_j + Q_j x - R_j x^2, \tag{14}$$

unde

$$P_j = \frac{360\ P_{max}\alpha\ \zeta\eta_t}{G_a V_{max}} \cdot \frac{i_{sj}}{i_{sN}} - (f_0 \cos\alpha_p + \sin\alpha_p),$$

$$Q_j = \frac{360\ P_{max}\beta\zeta^2\eta_t}{G_a V_{max}} \cdot \frac{i_{sj}^2}{i_{sN}^2} - f_{01}\cos\alpha_p \cdot V_{max}, \tag{15}$$

$$R_j = \frac{360\ P_{max}\gamma\zeta^3\eta_t}{G_a V_{max}} \cdot \frac{i_{sj}^3}{i_{sN}^3} + \frac{kA V_{max}^2}{13\ G_a} + f_{02}\cos\alpha_p \cdot V_{max}^2.$$

Avînd în vedere (14), prin utilizarea ecuației generale a mișcări rectilinii a autovehiculului [15], se obține

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{3{,}6\ g}{\delta_j V_{max}} (P_j + Q_j x - R_j x^2), \tag{16}$$

unde δ_j reprezintă coeficientul care ține seamă de influența maselor în mișcare de rotație. Acest coeficient se determină cu relația cunoscută [14]

$$\delta_j = 1 + (\zeta_1 + \zeta_2 \cdot i_{sj}^2)\frac{G_{an}}{G_a}, \tag{17}$$

unde ζ_1 și ζ_2 sînt mărimi adimensionale, iar G_{an} este greutatea totală maximă constructivă a autovehiculului. Mărimile ζ_1, ζ_2 fie se aleg direct, fie se calculează cu relațiile [14],

$$\zeta_1 = \frac{I_r}{r_r^2} \cdot \frac{g}{G_a}, \qquad \zeta_2 = \frac{I_m i_0^2 \eta_t}{r_r^2} \cdot \frac{g}{G_a}. \tag{18}$$

Pentru determinarea lui I_m se pot aplica relații empirice, una dintre acestea, pentru motoarele de autoturisme cu cilindrii în linie fiind următoarea [1]:

$$I_m = 5{,}41 \frac{P_{max}}{N_e n_{max}}. \tag{19}$$

Procedînd în mod similar celui folosit la deducerea relației (16), se obține

$$a_j = \frac{g}{\delta_j}(P_j + Q_j x - R_j x^2). \tag{20}$$

Plecînd de la relaţia (16), prin integrare se obţine expresia timpului de demarare (a se vedea [13]) în treapta j,

$$t_{dj} = \frac{\delta_j V_{max}}{3{,}6\, g\sqrt{Q_j^2 + 4\, P_j R_j}} \cdot \left(\ln \left| \frac{x_{0j} - x_{1j}}{x_{0j} - x_{2j}} \right| - \ln \left| \frac{x_{fj} - x_{1j}}{x_{fj} - x_{2j}} \right| \right), \quad (21)$$

în care

$$x_{1j} = \frac{Q_j + \sqrt{Q_j^2 + 4\, P_j R_j}}{2R_j}, \qquad x_{2j} = \frac{Q_j - \sqrt{Q_j^2 + 4\, P_j R_j}}{2R_j}. \quad (22)$$

De remarcat faptul că întotdeauna $P_j > 0$, $R_j > 0$.

Pentru precizarea funcţiei f, din relaţia (3) se folosesc rezultatele corespunzătoare din [15], astfel că se poate scrie

$$t_{sj-1} = \frac{\delta'}{g} \sqrt{\frac{G_a}{\psi k A}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{kA}{13\psi G_A}} \cdot V_{fj-1} \right) - \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{kA}{13\psi G_a}} \cdot V_{0j} \right), \quad (23)$$

unde

$$\delta' = 1 + \zeta_1 \frac{G_{an}}{G_a}. \quad (24)$$

Notînd

$$\theta = t_{sj-1} \cdot \frac{g}{\delta'} \sqrt{\frac{\psi k A}{G_a}},$$

din relaţia (23) se obţine cu uşurinţă

$$x_{0j} = \frac{x_{fj-1} - \theta \sqrt{\dfrac{13\psi\, G_a}{kA\, V_{max}^2}}}{1 + \theta \sqrt{\dfrac{kA\, V_{max}^2}{13\, \psi G_a}}\, x_{fj-1}}. \quad (25)$$

La deducerea acestei ecuaţii s-a admis că ψ nu se modifică cu viteza, ceea ce se justifică prin aceea că viteza variază relativ puţin în timpul schimbării treptei. Pentru a ţine seama de influenţa vitezei asupra lui ψ se poate considera, cu o aproximaţie destul de bună, $\psi = \psi(V_{max\,j})$, unde $V_{max\,j}$ este viteza în treapta j, corespunzătoare turaţiei n_{max}, avînd în vedere că viteza finală este apropiată de $V_{max\,j}$.

Folosind relaţia precedentă, cu indicele adecvat, rezultă

$$\frac{dv_{0j+1}}{dv_{fj}} = \frac{dx_{0j+1}}{dx_{fj}} = \frac{1 + \theta^2}{\left(1 + \dfrac{\theta^2}{X} \cdot x_{fj}\right)^2}, \quad (26)$$

unde

$$X = \theta \sqrt{\frac{13\,\psi G a}{k A V_{max}^2}}. \tag{27}$$

Ținînd seama de relațiile (20) și (26), relația (7) capătă forma :

$$\frac{1}{\delta_j}(P_j + Q_j x_{fj} - R_j x_{fj}^2) = \frac{1}{\delta_{j+1}}(P_{j+1} + Q_{j+1} x_{0j+1} -$$

$$- R_{j+1} x_{0j+1}^2) \frac{1+\theta^2}{\left(1 + \frac{\theta^2}{X} x_{fj}\right)^2}.$$

Dacă se înlocuiește x_{0j+1} dat de (25), prin schimbarea adecvată a indicelui, în relația precedentă, și după efectuarea calculelor și gruparea termenilor, se obține în final expresia

$$B x_{fj}^2 + C x_{fj} + D = 0, \tag{28}$$

în care

$$B = R_j + \left(\frac{\theta^4}{X^2} \cdot P_{j+1} + \frac{\theta^2}{X} Q_{j+1} - R_{j+1}\right) \frac{\delta_j}{\delta_{j+1}(1+\theta^2)},$$

$$C = \left(2\frac{\theta^2}{X} P_{j+1} + Q_{j+1} - Q_{j+1}\theta^2 + 2X R_{j+1}\right) \frac{\delta_j}{\delta_{j+1}} \cdot \frac{1}{1+\theta^2} - Q_j, \tag{29}$$

$$D = (P_{j+1} - X Q_{j+1} - X^2 R_{j+1}) \frac{\delta_j}{\delta_{j+1}} \cdot \frac{1}{1+\theta^2} - P_j.$$

Se remarcă faptul că, pentru $t_{sj-1} = 0$, se obțin $\theta = 0$, $X = 0$, astfel că relațiile (29) devin :

$$B = R_j - R_{j+1}\frac{\delta_j}{\delta_{j+1}}; \quad C = -Q_j + Q_{j+1}\frac{\delta_j}{\delta_{j+1}};$$

$$D = -P_j + P_{j+1}\frac{\delta_j}{\delta_{j+1}}. \tag{29'}$$

S-au obținut astfel coeficienții ecuației care determină vitezele la care accelerațiile sînt egale în două trepte succesive, ceea ce se poate verifica și direct. Caracteristica accelerațiilor este astfel încît întotdeauna există o asemenea viteză.

Se verifică ușor că $P_{j+1} < P_j$, $Q_{j+1} < Q_j$, $R_{j+1} < R_j$.

Chiar dacă $\delta_j > \delta_{j+1}$, întotdeauna $B > 0$, $C < 0$, $D < 0$, ceea ce este în concordanță și cu concluzia anterioară. Cînd $t_{sj-1} \neq 0$, viteza x_{fj} se

modifică față de cea corespunzătoare cazului $t_{sj-1} = 0$, dar nu substanțial, așa încît, în general, concluzia privitoare la semnele coeficienților B, C și D rămîne valabilă.

Deci ecuația (28) are o rădăcină pozitivă și una negativă, prima din ele fiind cea care corespunde vitezei finale relative în etajul j.

Este posibil ca vitezei x_{fj} să-i corespundă o turație mai mare decît n_{max}. Datorită faptului că în domeniul turațiilor mari accelerația este o funcție monoton descrescătoare de viteză, pentru a avea timp minim de demarare trebuie ca trecerea în treapta următoare să se facă la o viteză cît mai mare (evident, mai mică decît x_{fj}), respectiv la viteze corespunzătoare turației n_{max}.

Deci, în situația aceasta, se va impune ca

$$x_{fj} = 0{,}377 \frac{r_r n_{max}}{i_0 i_{sj} V_{max}}. \tag{30}$$

Relațiile (15) sînt valabile pentru cazul cînd vitezei relative îi corespunde un punct de funcționare pe caracteristica exterioară. În cazul motorului fără regulator-limitator de turație, P_{max} se determină cu relațiile cunoscute [13],

$$P_{max} = \frac{F_{tvmax} V_{max}}{360 \eta_t}, \tag{31}$$

unde

$$F_{tvmax} = \psi_0 G_a + f_{01} V_{max} + \left(\frac{kA}{13} + f_{02} \right) V_{max}^2, \tag{32}$$

$$\xi = (\alpha + \beta\zeta - \gamma\zeta^2). \tag{33}$$

De asemenea, se mai determină și

$$i_0 = 0{,}377 \frac{r_r}{V_{max}} \cdot n_p \cdot \zeta. \tag{34}$$

În cazul motorului cu regulator-limitator de turație, puterea maximă a motorului, la o viteză maximă dată, poate să fie mai mare decît cea calculată cu relațiile (31), (32) și (33).

Pentru motor se presupun cunoscute caracteristica exterioară (cu puterea maximă cel puțin egală cu cea dată de (31)), turația de intervenție a regulatorului n_r și turația maximă de mers în gol permisă de regulator n_{max}. Viteza maximă fiind dată, va trebui să se aleagă raportul de transmitere i_0 adecvat (se presupune i_{SN} cunoscut, de pildă, $i_{SN} = 1{,}0$).

În acest scop se procedează după cum urmează. Se aproximează ramura de regulator din caracteristica momentului motor cu o dreaptă. Ca urmare, se poate scrie

$$M = M_{ir} \frac{n_{max}}{n_{max} - n_{ir}} - M_{ir} \frac{n}{n_{max} - n_{ir}}, \quad n \in [n_{ir}, n_{max}], \tag{35}$$

unde M_{ir} este cuplul motor pe caracteristica exterioară corespunzător turației n_r. Prin folosirea relațiilor cunoscute dintre turație și viteză, pe de o parte, și forță de tracțiune și moment, pe de altă parte, din (35) rezultă

$$F_t = M_{ir} \frac{n_{max}}{n_{max} - n_{ir}} \cdot \frac{i_{SN} \cdot \eta_t}{r_r} \cdot i_0 - \frac{M_{ir}}{n_{max} - n_{ir}} \cdot \frac{V i_{SN}^2 \eta_t}{0{,}377\, r_r^2} i_0^2. \tag{36}$$

Înlocuind în (35) V cu V_{max} și având în vedere (32), se obține în final

$$i_0^2 - 0{,}377 \frac{r_r n_{max}}{V_{max}} i_0 + 0{,}377 \frac{r_r n_{max}}{V_{max}} \cdot \frac{F_{tvmax}\, r_r\, \eta_t^{-1}}{M_{ir} \dfrac{n_{max}}{n_{max} - n_{ir}}} = 0. \tag{37}$$

O analiză mai detaliată, care nu se dă aici, arată că ecuația (37) are rădăcini reale, ambele pozitive, soluția care convine fiind dată de rădăcina cea mai mare.

Este de observat că, de această dată, pentru aplicarea relațiilor (31), (32) și (33), va trebui ca ζ să se înlocuiască cu

$$\zeta_r = n_r / n_p.$$

Valoarea efectivă a lui ζ nu poate fi impusă, ea rezultînd astfel

$$\zeta = i_0 V_{max} / (0{,}377 \cdot r_r \cdot n_P), \tag{38}$$

i_0 fiind determinat cum s-a arătat mai sus.

În practică, de regulă, dacă nu se urmărește modificarea relativ însemnată a vitezei maxime, la echiparea autovehiculului cu motoare avînd puteri maxime diferite, se menține aceeași transmisie principală. Elementele inițiale fiind respectiv aceleași ca și în situația analizată anterior, trebuie să se determine viteza maximă efectivă V_{maxe}. În acest scop se folosesc ecuația (37) și relația (32), înlocuindu-se V_{max} cu V_{maxe}. Rezultă astfel ecuația de gradul doi în V_{maxe}:

$$\left(\frac{kA}{13} + f_{02}\right) V_{maxe}^2 + \left(f_{01} + \frac{M_{ir}}{n_{max} - n_{ir}} i_0^2\right) V_{maxe} +$$

$$+ \psi_0 G_a - \frac{M_{ir} n_{max}}{n_{max} - n_{ir}} \frac{i_{sN} \eta_t}{r_r} i_0 = 0. \tag{39}$$

Ecuația de mai sus are doi coeficienți pozitivi, iar al treilea este negativ, rădăcinile ei fiind de semne contrarii. Rădăcina pozitivă este tocmai viteza maximă căutată.

Pentru calculul lui ζ se aplică relația (38) în care se înlocuiește V_{max} cu V_{maxe}.

În cazul motorului cu regulator-limitator de turație mai trebuie să se țină seama că apar modificări ale expresiei accelerației la funcționarea pe ramura de regulator. Se constată ușor că, întrucît momentul motor are o variație liniară, accelerația autovehiculelor variază parabolic în raport cu viteza. Ca atare, rămîn valabile relațiile scrise în cazul precedent, fiind necesară determinarea expresiilor corespunzătoare pentru coeficienții P_j, Q_j și R_j.

Dacă V_{maxp} este viteza în etajul N corespunzătoare turației n_{max}, atunci este evident că se cunosc punctele $(V_{max}, F_{tv\,max})$ și $(V_{maxp}, 0)$, astfel că se poate scrie ecuația dreptei forței de tracțiune corespunzătoare pentru etajul ultim și, prin transformări simple, pentru oricare alt etaj. În final se obțin următoarele expresii:

$$P_j = -\left(\frac{F_{tv\,max}}{G_a} \cdot \frac{\frac{n_{max}}{n_P}}{1 - \frac{n_{max}}{n_P}} \cdot \frac{i_{sj}}{i_{sN}} + \psi_0\right),$$

$$Q_j = \frac{F_{tv\,max}}{G_a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{n_{max}}{n_P}} \cdot \frac{i_{sj}^2}{i_{sN}^2} - f_{01} \cos\alpha_p V_{max},$$

$$R_j = \left(\frac{kA}{13G_a} + f_{02} \cos\alpha_p\right) V_{max}^2. \tag{40}$$

În cazul cînd i_0 este dat, se determină V_{maxe} cu relația (39) și se calculează forța de tracțiune corespunzătoare. Tocmai aceste valori vor fi utilizate în relațiile (40).

Mai trebuie făcute precizări în legătură cu determinarea vitezelor finale. Reținînd observațiile anterioare, se deduce că ecuația generală (29) și relațiile (30) își păstrează valabilitatea. În cazul a două trepte învecinate are loc intersecția dintre partea curbei forței de tracțiune aferentă ramurii de regulator de la treapta inferioară și curba forței de tracțiune aferente caracteristicii exterioare de la treapta superioară. În consecință, coeficienții P_j, Q_j și R_j se vor calcula cu relațiile (40), iar coeficienții P_{j+1}, Q_{j+1} și R_{j+1} se determină cu relațiile (15). Cum se constată din (40), rezultă că $P_j < 0$, astfel că $D > 0$. În acest caz ecuația (28) are ambele rădăcini pozitive. Din reprezentarea grafică a curbelor forței de tracțiune pentru două trepte învecinate rezultă că rădăcina cea mai mică este cea care definește viteza finală relativă.

În fine, mai este de arătat că procesul de demarare într-o treaptă cuprinde două faze: (1) de la x_{0j} la x_{rj} și (2) de la x_{rj} la x_{fj}. Prin x_{rj} se înțelege viteza relativă în etajul j corespunzătoare turației n_r. În faza (2) motorul funcționează pe ramura de regulator, astfel că va trebui să se calculeze coeficienții P_j, Q_j și R_j cu relațiile (40).

Cu toate aceste elemente precizate se poate determina timpul total de demarare.

Notînd

$$\Delta_j = \frac{\delta_j V_{max}}{3{,}6\, g \sqrt{Q_j^2 + 4 P_j R_j}} \tag{41}$$

și ținînd cont de (21), rezultă pentru $N \geqslant 5$

$$t_d = F1(i_{s1},\ i_{s2},\ x_{01}) + \sum_{j=2}^{N-3} F(i_{sj},\ i_{sj+1}) +$$

$$+ FN1(i_{sN-1},\ i_{sN-2}) + FN(x_{fN},\ i_{sN}), \tag{42}$$

unde

$$F1(i_{s1},\ i_{s2},\ x_{01}) = \Delta_1 \left(\ln \left| \frac{x_{01} - x_{11}}{x_{01} - x_{12}} \right| - \ln \left| \frac{x_{f1} - x_{11}}{x_{f1} - x_{12}} \right| \right) + \Delta_2 \ln \left| \frac{x_{02} - x_{21}}{x_{02} - x_{22}} \right|, \tag{43}$$

$$F(i_{sj},\ i_{sj+1}) = -\Delta_j \ln \left| \frac{x_{fj} - x_{j1}}{x_{fj} - x_{j2}} \right| + \Delta_{j+1} \ln \left| \frac{x_{0j+1} - x_{j+1,1}}{x_{0j+1} - x_{j+1,2}} \right|,$$

$$j = 2, \ldots, N-3, \tag{44}$$

$$FN1(i_{sN},\ i_{sN-1},\ i_{sN-2}) =$$

$$= -\Delta_{N-2} \ln \left| \frac{x_{fN-2} - x_{N-2,1}}{x_{fN-2} - x_{N-2,2}} \right| + \Delta_{N-1} \left(\ln \left| \frac{x_{ON-1} - x_{N-1,1}}{x_{ON-1} - x_{N-1,2}} \right| - \right.$$

$$\left. - \ln \left| \frac{x_{fN-1} - x_{N-1,1}}{x_{fN-1} - x_{N-1,2}} \right| \right) + \Delta_N \ln \left| \frac{x_{ON} - x_{N1}}{x_{ON} - x_{N2}} \right|, \tag{45}$$

$$FN(x_{fN},\ i_{sN}) = -\Delta_N \ln \left| \frac{x_{fN} - x_{N1}}{x_{fN} - x_{N2}} \right|. \tag{46}$$

Pentru $N = 4$, rezultă

$$t_d = F1(i_{s1},\ i_{s2},\ x_{01}) + FN1(l_{s4},\ i_{s3},\ i_{s2}) + FN(x_{f4},\ i_{s4}), \tag{47}$$

iar pentru $N = 3$ se obține

$$t_d = F1(i_{s1},\ i_{s2},\ x_{02}) + F(i_{s2},\ i_{s3}) + FN(x_{f3},\ i_{s3}). \tag{48}$$

În relațiile (43), (44), (45), vitezele $x_{fj} (j = 1, 2, \ldots, N-1)$, $x_{0j} (j = 2, \ldots, N)$ se calculează succesiv, cum s-a mai arătat, din relațiile (25), (28) și (30).

Se constată din expresiile (42), (47) și (48) ale lui t_d că s-a obținut o structură a funcției de minimizat care nu prezintă dificultatea multidimensionalității.

În definitiv, expresiile respective sînt de forma generală [6]:

$$t_d = f_d(i_{s1}, i_{s2}, \ldots, i_{sN-1}) = \sum_{j=1}^{N-2} f_j(i_{sj}, i_{sj+1}), \tag{49}$$

unde f_d este o funcție definită pe mulțimea M_t.

Dacă $i_s\{i_{s1}, i_{s2}, \ldots . i_{sN-1}\}$ este vectorul $N-1$ dimensional, problema care se pune este aceea de a găsi vectorul $i_{sm} \in M_t (i_{sj} \in M_{tj})$ astfel ca

$$f_d(i_{sm}) = \min f_d(i_s), \qquad i_s \in M_t.$$

În acest caz ecuația lui Bellman se scrie [6]:

$$T_{j-1}(i_{s,j-1}) = \min_{i_{sj} \in M_{tj}} [f_{j-1}(i_{sj-1}, i_{sj}) + T_j(i_{sj})] \tag{50}$$

pentru $j = 2, 3, \ldots . N - 2$,
cu condiția inițială

$$T_{N-2}(i_{sN-2}) = \min_{i_{sN-1} \in M_{tN-1}} f_{N-2}(i_{sN-2}, i_{sN-1}). \tag{51}$$

Rezultă astfel

$$t_{dmin} = \min f_d(i_s) = \min_{i_{s1} \in M_{t1}} T_1(i_{s1}). \tag{52}$$

3. ANALIZA CONSTRÎNGERILOR ȘI CARACTERISTICILE PROGRAMULUI DE CALCUL

În continuare se vor stabili restricțiile la care sînt supuse necunoscutele. Astfel, în primul rînd trebuie îndeplinită condiția evidentă

$$i_{sj+1} < i_{sj}, \qquad j = 1, 2, \ldots, N - 1. \tag{53}$$

Dacă se notează cu n_{0j} și n_{fj} turația inițială și, respectiv, turația finală a arborelui cotit al motorului, există inegalitățile

$$\text{(a) } n_{0j} < n_{fj}, \qquad \text{(b) } n_{0j} \geqslant n_{min}, \qquad \text{(c) } n_{fj} \leqslant n_{max}, \tag{54}$$

precum și

$$v_{fj} \geqslant v_{0j-1}. \tag{55}$$

Prin exprimarea vitezelor în funcție de turație și rapoarte de transmitere în (55) și considerarea inegalităților (b) și (c), rezultă

$$\frac{i_{sj}}{i_{sj-1}} \geqslant \frac{n_{0j}}{n_{fj-1}} \geqslant \frac{n_{min}}{n_{max}} = \lambda. \tag{56}$$

Din (56) se obțin inegalitățile

$$\text{(a)} \quad i_{sj} \geqslant \lambda i_{sj-1}, \quad \text{(b)} \quad (i_{s1})_{min}\, \lambda^{j-1} < i_{sj} < \frac{i_{sN}}{\lambda^{N-j}}. \tag{57}$$

Dacă $(i_{s1})_{min}\, \lambda^{j-1} < i_{sN}$, atunci $(i_{sj})_{min} = i_{sN}$, iar dacă are loc inegalitatea $i_{sN}\lambda^{j-N} > (i_{s1})_{max}$, atunci se alege $(i_{sj})_{max} = (i_{s1})_{max}$. De asemenea, din (57) (a), rezultă că trebuie să fie îndeplinită condiția $(i_{sj})_{min} \geqslant \lambda(i_{sj-1})_{max}$ ceea ce conduce la inegalitatea $(i_{s1})_{min} \geqslant \frac{i_{sN}}{\lambda^{N-1}}$. În cazul cînd inegalitatea ultimă nu este satisfăcută, se pune condiția $(i_{sj-1})_{max} = (i_{sj})_{min}\, \lambda^{-1}$. Pentru stabilirea marginilor rapoartelor de transmitere s-a elaborat un subprogram pe baza algoritmului de mai sus, pasul inițial corespunzînd treptei $N - 1$.

Turațiilor n_{min} și n_{max} le corespund în etajul j vitezele relative $x_{min\,j}$ și, respectiv, $x_{max\,j}$. Dacă pentru x_{fj} calculat din ecuația (28) are loc inegalitatea $x_{fj} > x_{max\,j}$, atunci există următoarele posibilități: prima, cea care a și fost discutată cînd s-a stabilit relația (30), și a doua de a proceda, în cursul efectuării programului, la mărirea raportului i_{sj+1}. Cea de a doua posibilitate echivalează cu o astfel de optimizare încît la schimbarea treptelor să nu apară salt de forță de tracțiune. În elaborarea programului s-a avut în vedere cea de a doua posibilitate.

Dacă $x_{fj} < x_{min\,j}$, atunci va trebui să se micșoreze raportul i_{sj+1}. În cazul cînd $x_{0j+1} < x_{minj+1}$, va trebui să se mărească raportul i_{sj+1}, iar dacă $x_{0j+1} > x_{min\,j+1}$, va trebui să se micșoreze raportul i_{sj+1}.

Cele prezentate mai sus se justifică într-un mod simplu dacă se are în vedere reprezentarea grafică a caracteristicii acceleraților și modul cum se modifică poziția curbelor în funcție de modificarea rapoartelor de transmitere ale treptelor.

Dacă $x_{fN-1} > x_{fN}$, atunci, evident, optimizarea trebuie să înceapă de la un raport de transmitere al treptei $N - 1$ astfel încît $x_{fN-1} < x_{fN}$. Din examinarea relațiilor (45), (46), (47) și (48) se constată că diferența dintre timpii de demarare ai oricăror două variante este independentă de valoarea vitezei finale în ultima treaptă. De asemenea, rapoartele de transmitere nu depind de x_{fN}, evident cu condiția ca aceasta să nu fie prea mică.

Mai este de observat că în mod normal, pentru x_{0j} are loc inegalitatea $da_j/dx_{0j} > da_{j-1}/dx_{0j}$. În cazul cînd inegalitatea nu este satisfăcută rapoartele de transmitere sînt prea apropiate și va trebui să se micșoreze i_{sj}.

Se definește pasul pentru fiecare variabilă

$$DIV(j) = \frac{(i_{sj})_{max} - (i_{sj})_{min}}{ND - 1}, \quad j = 1, 2, \ldots, N, \tag{58}$$

unde ND reprezintă numărul valorilor discrete, care se fixează în cadrul programului principal.

Raportul de transmitere în treapta j va fi:

$$i_{sj}(N_j) = (i_{sj})_{min} + DIV(j)\, N_j, \tag{59}$$

unde $N_j = 1, 2, \ldots, ND$

Potrivit relației (51), pentru N_{N-2} dat se determină T_{N-2}, prin metoda căutării directe, folosind valorile discrete ale lui i_{sN-1}, corespunzătoare valorilor lui N_{N-1}. În acest proces se fac toate verificările prezentate anterior cu privire la restricțiile impuse.

În mod similar se procedează în cazul relației (50).

Se definesc următoarele variabile reale indexate.

$$T(K, N_{k-1}) = T_{k-1}(i_{sk-1}) = T_{k-1}(i_{sk-1}(N_{k-1})), \tag{60}$$

$$IO(K, N_{k-1}) = (i_k)_{min} + DIV(k)\,(NM_k - 1),\ k = 2, 3, \ldots, N-1,$$

unde NM_k reprezintă valoarea lui N_k în treapta k pentru care se obține minimul funcțiilor corespunzătoare din egalitățile (50) sau (51).

Evident,

$$td_{min} = \min_{N_1} T(2, N_1). \tag{61}$$

Rapoartele de transmitere optime $RAP\,(L)$, $L = 1, \ldots, N-1$, care asigură timpul minim de demarare, se determină astfel:

$$RAP(1) = (i_1)_{min} + DIV(1)\,(NM_1 - 1), \tag{62}$$

$$RAP(L) = IO(L, NO), \tag{63}$$

unde NO este partea întreagă a expresiei:

$$E = \frac{RAP(L-1) - (i_{sL-1})_{min}}{DIV(L-1)} + 1, \quad L = 2, 3, \ldots, N-1. \tag{64}$$

În cazul cînd i_{s1} este dat, se aplică procedeul arătat mai sus, cu singura deosebire că se determină o singură valoare $T_1(i_{s1})$, astfel că

$$td_{min} = T_1(i_{s1}) = T(2, 1). \tag{65}$$

Pe baza algoritmului descris mai sus s-a, alcătuit un program de calcul în limbajul FORTRAN. El este constituit dintr-un program principal și din 11 subrutine, după cum urmează: COEF, COEFU — pentru calculul coeficienților (15) și, respectiv, (40); D — pentru calculul lui Δ_j; DELTA — pentru calculul lui δ_j; RAD — pentru calculul rădăcinilor x_{1j}, x_{2j}; VIF — pentru calculul vitezei de demarare (vezi relațiile (42) — —(46)); $F1$, F, $FN1$, FN — pentru calculul timpului de demarare (vezi relațiile (41)—(45)); VALM — pentru stabilirea marginilor rapoartelor de transmitere.

În programul principal, după citirea datelor, se determină mărimile caracteristice pentru motor și transmisie urmînd metodologia prezentată anterior și concretizată în relațiile (31)—(35), (37)—(39), aceasta în funcție și de existența regulatorului-limitator de turație.

După chemarea subrutinei VALM, se efectuează procesul de minimizare în etape cum s-a arătat mai sus, prin folosirea restricțiilor care au fost discutate în detaliu. Pentru o etapă dată, pentru j și $j-1$ fixate, la un anumit N_{j-1} se modifică N_j în sensul creșterii pînă atinge valoarea ND, după care se mărește N_{j-1} cu o unitate și se modifică N_j începînd de la 1. Procesul se repetă pînă cînd $N_{j-1} = ND$. În funcție de numărul treptelor se folosesc relațiile (42), (47) sau (48).

În program este prevăzută posibilitatea de a efectua optimizarea cînd i_{s1} este dat sau cînd acesta variază într-un interval dat. De asemenea, programul asigură tipărirea mărimilor $T(K, N_{k-1})$ și $IO(K, N_{k-1})$.

După stabilirea valorilor optime ale rapoartelor de transmitere se calculează și se tipăresc valorile timpului și ale spațiului de demarare în funcție de viteză, cu indicarea vitezelor de schimbare a treptelor. Pentru a se putea face comparații, programul elaborat stabilește caracteristica de demarare pentru cazul cînd rapoartele de transmitere ale schimbătorului de viteze sînt, respectiv, în progresie geometrică, progresie armonică și progresie aritmetică. Pentru toate cele patru cazuri se calculează și se tipăresc accelerația și viteza autovehiculului. Pentru determinarea spațiului de demarare se folosesc relațiile cunoscute [15], transformate convenabil pentru a se opera cu viteze relative.

În fine, se mai prevede posibilitatea de a stabili caracteristicile de demarare în cele patru cazuri cînd greutatea autovehiculului este diferită de cea nominală.

Programul întocmit conține circa 600 instrucțiuni, el fiind testat pentru toate variantele discutate mai sus. Pentru cazul unui autoturism, cu schimbătorul de viteze cu 5 trepte, timpul de calcul și de tipărire este de circa 5,50 minute, la rularea pe un calculator FELIX C-256. Analiza rezultatelor obținute se va face într-o altă lucrare.

4. CONCLUZII

a) Pentru minimizarea timpului de demarare a autovehiculului prin alegerea corespunzătoare a rapoartelor de transmitere ale treptelor schimbătorului de viteze se dovedește foarte adecvată metoda programării dinamice.

b) Metoda analitică de aplicare a programării dinamice prezentată în detaliu în lucrare permite să se înlăture dificultățile multidimensionalității. În același timp ea face posibilă analiza influenței particularităților caracteristicii exterioare ale motorului asupra timpului minim de demarare și a rapoartelor de transmitere. Metoda propusă evită dificultățile care pot apărea prin aplicarea altor algoritmi cunoscuți care se aplică la problemele de programare neliniară [5, 10], așa cum este și cea de față.

c) Metoda dezvoltată în lucrare are în vedere și cazul motorului cu regulator-limitator de turație, a cărui putere maximă poate fi mai mare decît cea necesară realizării vitezei maxime impuse.

d) În lucrare se discută în detaliu restricțiile care se impun și se prezintă particularitățile programului elaborat, codificat în FORTRAN, a cărui rulare pe un calculator FELIX C-256 s-a făcut în foarte bune condiții.

Primită la redacție la 3 noiembrie 1982

BIBLIOGRAFIE

1. A. I. AHMEDOV, *Analiz teagovîh kacestv avtomobilea s pomoşciu elektronno-ţifrovih vicislitelnih maşin*, Avtomobilnaia promişlennost, XXXIX, *9* p. 23 (1963).
2. L. G. ANISKIN, H. D. KVITKO, *Metodika vîbora reada peredatocinih cisel transmissii avtomobilea, obespecivaiuşcih ego razgon za minimalnoe vremea*, Avtomobilnaia promişlennost, **XXIX**, *10* p. 25—29 (1963).
3. R. E. BELLMAN, S. E. DREYFUS, *Programarea dinamică aplicată*. (trad. din l. engleză), Edit. tehnică, Bucureşti—1967.
4. R. BUSSIEN, *Automobiltechnisches Handbuch*, Berlin, Technische Verlag Herbert Cram, 1965.
5. V. DUMITRU, *Programare neliniară — algoritmi, programare, rezultate numerice*, Edit. Acad. R. S. România, Bucureşti, 1975.
6. T. GABASOV, F. M. KIRILOVA, *Osnovî dinamiceskogo programmirovaniea*, Izd-stvo BGU im. V. I. Lenina, Minsl, 1975.
7. V. G. GALUŞKO, *Nekotorîie voprosî analiticeskogo rasceta dvijeniia avtomobilea i vîbora peredatocinîh cisel korobki peredaci s ispolzovaniem ETVM*, Avtomobilnii transport (respublikanskii mejvedomstvennii naucino-tehniceskii sbornik) *1*, Izd-stvo „Teknika", Kiev p. 128—135 (1968).
8. U. GAMER, *Auslegung von Krafthrzeug-Getrieben nach der maximalen mitteleren Geschwindigkeit*, ATZ, **71**, *8*, p. 271—274 (1969).
9. D. I. GROMOV, L. H. GHILELES, *Rascet reada peredatocinih cisel transmissii po usloviiu minimuma vremeni razgona avtomobilea*, Avtomobilnaia promişlennost, **XXXIV**, *11*, p. 20—21 (1969).
10. D. HIMMELBLAU, *Prikladnoe nelineinoe programmirovanie*, Izd-stvo „Mir", Moskva, 1975.
11. N. K. KULIKOV, *Dinamiceskii read peredatocinîh cisel korobki peredaci*, Avtomobilnaia promişlennost, *12*, p. 19—22 (1958).
12. M. I. LURIE, *Vîbor peredatocinih cisel silovoi peredaci malolitrajnogo avtomobilea*, Avtomobilnaia promişlennost, *7*, p. 22—26 (1959).
13. A. P. STOICESCU, *O contribuţie la calculul de tracţiune al automobilului*, Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe-Gheorghiu-Dej", **XXXVII**, *3*, p. 105—112 (1975).
14. A. P. STOICESCU, *Dinamica autovehiculelor*, vol. I, Litografia Institutului Politehnic din Bucureşti, 1980.
15. A. P. STOICESCU, *Dinamica autovehiculelor*, vol. II, Litografia Institutului Politehnic din Bucureşti, 1982.

UNELE ASPECTE ALE MIȘCĂRII RELATIVE DINTRE ELEMENTELE ACTIVE ALE VARIATOARELOR ELASTOHIDRODINAMICE DE TURAȚIE

de I. M. CIORNEI, E. N. DIACONESCU

Institutul de Învățămînt Superior Suceava.

Lucrarea abordează mișcarea relativă între elementele deformabile ale variatoarelor, în scopul optimizării acestor transmisii din punct de vedere al capacității portante și al randamentului. După prezentarea sumară a mișcării relative între elemente, presupuse rigide, se evidențiază că deformațiile clasice produc două noi componente ale acestei mișcări : spinul și comprimarea-decomprimarea pe direcție normală. Deoarece spinul afectează negativ performanțele variatoarelor, se deduc, final, expresiile lui în cazul tipurilor uzuale cu contact punctual.

GENERALITĂȚI

În scopul optimizării proceselor tehnologice și ridicării eficienței utilajelor, mașinile se dotează cu subansamble denumite variatoare de turație, care permit reglarea continuă și în limite largi a vitezelor de lucru. Acestea sînt, de fapt, cutii de viteză cu un număr infinit de trepte și pot fi electrice, hidraulice, sau mecanice ; din această ultimă categorie se detașează variatoarele cu tracțiune elastohidrodinamică.

Principiul funcțional al acestor transmisii este simplu : cînd două elemente cu mișcare relativă de rostogolire se află în contact hertzian, apare frecare, care poate fi redusă prin introducerea de ulei în zona de contact, însă nu eliminată. Uneori ea poate fi exploatată în scopuri utile, cum ar fi transmiterea de forță tangențială între cele două corpuri, respectiv de putere mecanică. În acest caz pelicula elastohidrodinamică de ulei devine mijloc de vehiculare a puterii și constituie parte integrantă din transmisie. Varierea turației, dacă este nevoie, se obține prin modificarea fazei căilor de rulare pe unul sau mai multe dintre elementele în contact. Transmisiile care au la bază acest principiu se numesc transmisii elastohidrodinamice și presupun aplicarea celor mai noi cuceriri din lubrificația elastohidrodinamică, care ia în considerare deformațiile elastice ale corpurilor din contact precum și variația viscozității uleiului cu presiunea, referitoare nu numai la grosimea filmului de lubrifiant, dar mai ales la comportarea acestuia la forfecare, ca o consecință a stării lubrifiantului în interiorul contactului.

Pe mica arie de contact unde lubrifiantul suportă impulsuri foarte scurte de presiune, de cîțiva gigapascali, există, între corpuri, trei posibilități de alunecare relativă în plan tangențial (fig. 1) și anume :

— mișcare de alunecare longitudinală, caracterizată de viteza relativă $\Delta u = u^+ u^-$, pe direcția de rostogolire ;

— mișcare de alunecare laterală, caracterizată de viteza relativă $\Delta v = v^+ - v^-$, pe o direcție perpendiculară pe direcția de rostogolire ;

— mișcarea de spin, caracterizată de o viteză unghiulară, ω_{SP}, normală pe aria de contact.

St. cerc. mec. apl., tom 43, nr. 3, 1984, p. 267—278

Lubrifiantul se opune acestor mișcări și în el apar ca urmare două forțe de forfecare sau de tracțiune, una longitudinală și una transversală și un moment de spin, dirijate pe direcțiile vitezelor menționate mai sus.

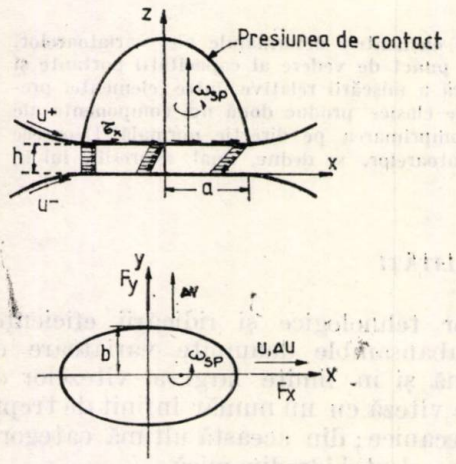


Fig. 1. — Mișcările relative existente pe aria de contact.

Dintre acestea numai tracțiunea longitudinală participă, util, la transmiterea puterii; celelalte componente reprezintă forfecări parazite ale filmului de lubrifiant și apar fie datorită erorilor de la poziția relativă corectă a arborilor elementelor în contact, fie datorită geometriei acestora.

Ca urmare, apare ca firească luarea în considerare a deformațiilor de contact, care au o influență hotărîtoare asupra mișcării relative, în plan tangențial, dintre elementele active ale variatorului.

Lucrarea prezintă unele aspecte privind această mișcare relativă, presupunînd inițial că elementele sînt rigide, apoi considerînd deformațiile lor elastice, iar final se dau cîteva relații de calcul pentru spin la variatoarele cu contact punctual.

MIȘCAREA RELATIVĂ A ELEMENTELOR DE VARIATOR, PRESUPUSE RIGIDE

Se consideră două elemente de variator, 1 și 2, la care varierea raportului de transmitere se obține prin înclinarea axei de rotație a corpului condus. Valoarea raportului de transmitere este dată de relația:

$$i_x = \frac{R_{2x}}{R_1} = \frac{R_2}{R_1 \cos \alpha},$$

în care R_1, R_2 sînt razele celor două elemente, iar α unghiul dintre axele lor de rotație.

Pentru a efectua analiza cinematică, se alege un sistem de axe cu originea în punctul de contact, C (fig. 2), definit de:

xCy — planul tangent comun la elementele în contact;

xCz — planul axelor de rotație ale ambelor elemente, care se intersectează în punctul $O(x, o, z)$.

Cu notațiile din figură se poate scrie:

$$\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_1 \bar{i},$$

$$\bar{\omega}_2 = -\omega_2 \cos\alpha \bar{i} + \omega_2 \sin\alpha \bar{k},$$

$$\bar{r} = -(R_1 + R_2)\operatorname{ctg}\alpha \bar{i} + R_1 \bar{k}.$$

Viteza punctului C, aparținînd fiecărui element, este dată de relația:

$$\bar{v}_1 = \bar{\omega}_1 \times \bar{r} = -\omega_1 R_1 \bar{j},$$

$$\bar{v}_2 = \bar{\omega}_2 \times \bar{r} = -\omega_2 R_2 \cos\alpha \bar{j}.$$

Cînd se aplică un cuplu de frînare, pe arborele elementului condus, apare o viteză de alunecare, $\bar{v}_{SL}$, între elemente, din cauza forfecării peliculei de lubrifiant, care are expresia:

$$\bar{v}_{SL} = \bar{\omega}_{SL} \times \bar{R}_2 = -\omega_{SL} R_2 \bar{j},$$

unde ω_{SL} este o mărime proporțională cu pierderea de viteză unghiulară a elementului condus, datorată prezenței vitezei de alunecare.

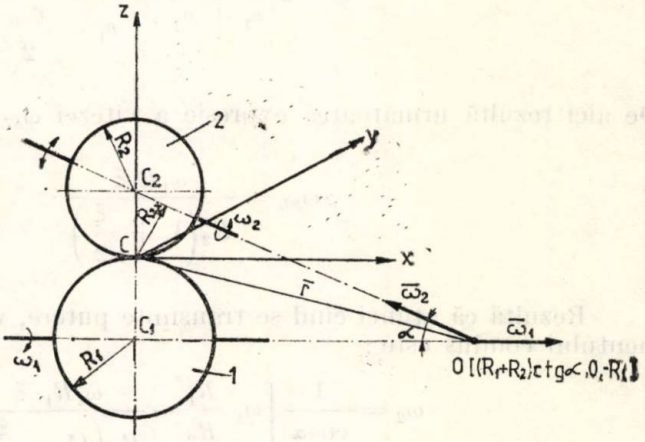


Fig. 2. — Cinematica variatorului format din elemente rigide.

În punctul de contact există relația:

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_2 + \bar{v}_{SL},$$

din care se obține ușor

$$\omega_2 = \frac{1}{\cos\alpha}\left[\omega_1 \frac{R_1}{R_2} - \omega_{SL}\right].$$

Se deosebesc două cazuri de funcționare:

a) cînd nu se transmite putere, deci nu apare forfecarea peliculei și $\omega_{SL} = 0$;

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{R_1}{R_2 \cos\alpha} = \omega_1 \frac{1}{i_x},$$

b) cînd se transmite putere, deci apare forfecarea peliculei de ulei:

$$\omega_2 = \frac{1}{\cos\alpha}\left[\omega_1 \frac{R_1}{R_2} - \omega_{SL}\right].$$

Prin înlocuirea lui ω_2 în expresia lui $\bar{v}_2$ se obține :

$$\bar{v}_2 = -\omega_1 R_1 \bar{j} + \omega_{SL} R_2 \cos\alpha \bar{j}.$$

Diferența de viteză dintre elementul conducător și cel condus, în punctul de contact, este dată de relația :

$$\Delta\bar{v} = \bar{v}_1 - \bar{v}_2 = -\omega_{SL} R_2 \cos\alpha \bar{j},$$

care reprezintă tocmai viteza de alunecare.

În cazul tracțiunii elastohidrodinamice se definește un parametru adimensional al alunecării, ξ, numit raport alunecare-rostogolire, proporțional cu momentul transmis și egal cu raportul dintre viteza de alunecare și viteza medie de rostogolire :

$$\xi = 2\frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} = \frac{v_{SL}}{v_1 - \frac{v_{SL}}{2}}.$$

De aici rezultă următoarea expresie a vitezei ω_{SL} :

$$\omega_{SL} = \frac{\omega_1 R_1 \xi}{R_2\left(1 + \frac{\xi}{2}\right)}.$$

Rezultă că atunci cînd se transmite putere, viteza unghiulară a elementului condus este :

$$\omega_2 = \frac{1}{\cos\alpha}\left[\omega_1 \frac{R_1}{R_2} - \frac{\omega_1 R_1 \cdot \xi}{R_2\left((1 + \frac{\xi}{2}\right)}\right],$$

iar pierderea de viteză, alunecarea, are expresia :

$$\Delta\bar{v} = -\frac{1}{\cos\alpha}\left[\omega_1 \frac{R_1}{R_2} - \frac{\omega_1 R_1 \cdot \xi}{R_2\left(1 + \frac{\xi}{2}\right)}\right] R_2 \cos\alpha \bar{j}.$$

Se observă că viteza unghiulară a elementului condus scade, cum e și firesc, odată cu creșterea alunecării ; celelalte mișcări relative care apar, nu s-au pus în evidență.

INFLUENȚA DEFORMAȚIILOR DE CONTACT ASUPRA MIȘCĂRII RELATIVE DINTRE ELEMENTE

Pentru a putea transmite putere utilă, elementele în contact sînt apăsate după normala comună, de forțe considerabile. Materialele reale fiind elastice, elementele se deformează local, așa cum prevede teoria con-

tactului elastic, iar punctul de contact se transformă într-o arie de contact. Ca urmare, cinematica mișcării relative dintre elemente se modifică în raport cu precizările de mai sus. Pentru a evidenția mișcarea relativă în acest caz, se adoptă, ca și în cazul precedent, un sistem convenabil de axe (fig. 3), considerîndu-se un punct arbitrar M de pe aria de contact, conform [1].

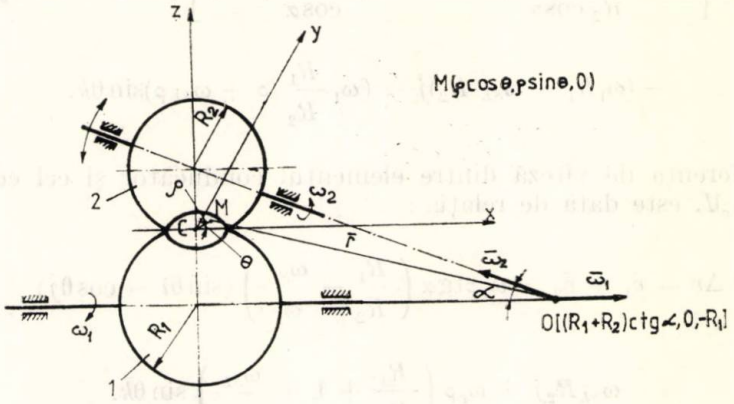


Fig. 3. — Cinematica variatorului considerat format din elemente deformabile.

În aceste condiții :

$$\bar{\omega}_1 = \omega_1 \bar{i},$$

$$\bar{\omega}_2 = -\omega_2 \cos\alpha \bar{i} + \omega_2 \sin\alpha \bar{k},$$

$$\bar{r} = [\rho\cos\theta - (R_1 + R_2)\mathrm{ctg}\alpha]\,\bar{i} + \rho\sin\theta\bar{j} + R_1\bar{k}.$$

Viteza punctului M de pe elementul conducător are expresia :

$$\bar{v}_1 = \bar{\omega}_1 \times \bar{r} = -\omega_1 R_1 \bar{j} + \omega_1 \rho \sin\theta \bar{k},$$

iar viteza aceluiași punct pe elementul condus :

$$\bar{v}_2 = -\omega_2 \rho \sin\alpha \sin\theta \bar{i} + \omega_2 \rho \sin\alpha \cos\theta \bar{j} - \omega_2 R_2 \cos\alpha \bar{j} - \omega_2 \rho \cos\alpha \sin\theta \bar{k}.$$

Întrucît elementului condus i se aplică un cuplu de frînare, apare o viteză de alunecare. În centrul contactului, punctul C, cînd $\rho = 0$, au loc relațiile :

$$\bar{v}_{1_0} = -\omega_1 R_1 \bar{j}\,; \qquad \bar{v}_{2_0} = -\omega_2 R_2 \cos\alpha \bar{j},$$

$$\bar{v}_{1_0} = \bar{v}_{2_0} + \bar{v}_{SL_0}\,; \qquad \bar{v}_{SL_0} = -\omega_{SL} R_2 \bar{j}.$$

Din aceste relații se obține:

$$\omega_2 = \frac{1}{\cos\alpha}\left[\omega_1 \frac{R_1}{R_2} - \omega_{SL}\right],$$

și în consecință:

$$v_2 = \left[-\omega_1 \frac{R_1}{R_2 \cos\alpha}\,\rho\sin\alpha + \omega_{SL}\frac{1}{\cos\alpha}\,\rho\sin\alpha\right](\sin\theta\bar{i} - \cos\theta\bar{j}) -$$

$$-(\omega_1 R_1 - \omega_{SL} R_2)\bar{j} - (\omega_1 \frac{R_1}{R_2}\,\rho + \omega_{SL}\rho)\sin\theta\bar{k}.$$

Diferența de viteză dintre elementul conducător și cel condus, în punctul M, este dată de relația:

$$\Delta\bar{v} = \bar{v}_1 - \bar{v}_2 = \omega_1 \rho \operatorname{tg}\alpha\left(\frac{R_1}{R_2} - \frac{\omega_{SL}}{\omega_1}\right)(\sin\theta\bar{i} - \cos\theta\bar{j}) -$$

$$\omega_{SL} R_2 \bar{j} + \omega_1 \rho\left(\frac{R_1}{R_2} + 1 + \frac{\omega_{SL}}{\omega_1}\right)\sin\theta\bar{k}.$$

Se observă că vectorul $\Delta\bar{v}$ are componentele;

$$\Delta\bar{v} = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C}.$$

Vectorul $\bar{A}$, dat de relația

$$\bar{A} = \omega_1 \rho \operatorname{tg}\alpha\left(\frac{R_1}{R_2} - \frac{\omega_{SL}}{\omega_1}\right)(\sin\theta\bar{i} - \cos\theta\bar{j}),$$

are direcția vectorului unitar $(\sin\theta\bar{i} - \cos\theta\bar{j})$, care, evident, este situat în planul de contact, perpendicular pe vectorul de poziție al punctului M (fig. 4). Se observă că dacă ω_1, ω_{SL}, α sînt constanți, ceea ce se întîmplă

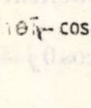


Fig. 4. — Vectorul unitar al vitezei de spin.

la o funcționare de regim, atunci vectorul $\bar{A}$ este proporțional cu vectorul $\bar{\rho}$ (în modul). Rezultă că vectorul $\bar{A}$ reprezintă, pe aria de contact, o viteză relativă de pivotare, cunoscută și sub numele de spin.

Vectorul $\bar{B}$, dat de relația

$$\bar{B} = -\omega_{SL} R_2 \bar{j},$$

reprezintă în cazul unui regim constant de funcționare o viteză pură de alunecare relativă, repartizată uniform pe întreaga suprafață de contact și orientată în sens opus direcției de rostogolire.

Vectorul $\bar{C}$, dat de relația

$$\bar{C} = -\omega_1 \rho \left(\frac{R_1}{R_2} - \frac{\omega_1 + \omega_{SL}}{\omega_1} \right) \sin\theta \bar{k},$$

indică o viteză de comprimare în zona de intrare a contactului și de decomprimare în zona de ieșire din contact. Ea este cauzată de deformațiile hertziene ale celor două elemente care nu afectează mișcarea lor relativă în plan tangențial, și ca urmare, nu se va mai lua în considerare în continuare.

Față de cazul precedent, diferența de viteză relativă dintre cele două elemente prezintă două componente suplimentare de spin și de comprimare. Alunecarea longitudinală (vectorul $\bar{B}$) este cauzată de forța tangențială prin care se transmite puterea și este determinată de comportarea la forfecare a peliculei de lubrifiant caracterizată de așa-numita curbă de tracțiune.

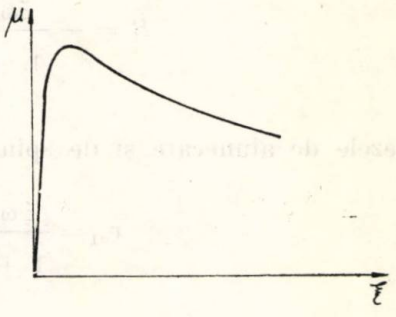


Fig. 5. — Curbă de tracțiune.

Aspectul unei curbe de tracțiune este ilustrat în figura 5. La viteze mici de alunecare curbele prezintă o porțiune liniară, urmată de o regiune neliniară ca un maxim, μ_{max}. La alunecări mai mari efectele termice în peliculă încep să fie importante și tracțiunea scade, contactul intrînd în patinare; această zonă se numește regiune termică. Întrucît alunecarea longitudinală constituie chiar principiul funcțional al acestor transmisii nu poate fi evitată, ci numai redusă, prin măsurări specifice [2], [3].

Spinul reprezintă o mișcare parazită, ducînd la scăderea pantei curbelor de tracțiune și la creșterea alunecării longitudinale mai ales cînd el depășește o anumită valoare, dependentă de viteza de rostogolire, [4], [5].

Se deosebesc două cazuri de funcționare:

a) cînd nu se transmite putere, $\omega_{SL} = 0$,

$$\bar{A} = \omega_1 \rho \frac{R_1}{R_2} \operatorname{tg}\alpha(\sin\theta\bar{i} - \cos\theta\bar{j}),$$

$$\bar{B} = 0,$$

ceea ce arată că mișcarea relativă este formată de rostogolire peste care se suprapune mișcarea de spin. Viteza unghiulară de spin are, evident, expresia :

$$\omega_{SP} = \omega_1 \rho \frac{R_1}{R_2} \operatorname{tg}\alpha,$$

ea depinde de ω_1, de raportul R_1/R_2 și de unghiul α. Cu cît R_1 este mai mare ca R_2, α și ω_1, cu atît viteza unghiulară de spin este mai mare. Pentru $\alpha = 0$, adică $i = 1$, rezultă $\omega_{SL} = 0$;

b) cînd se transmite putere,

$$\omega_{SL} = \frac{\xi \omega_1 R_1}{R_2\left(1 + \frac{\xi}{2}\right)} \neq 0 ;$$

în aceste condiții :

$$\bar{A} = \omega_1 \rho \operatorname{tg}\alpha \left[\frac{R_1}{R_2} - \frac{\xi R_1}{R_2(1 + \xi/2)}\right](\sin\theta\bar{i} - \cos\theta\bar{j}),$$

$$\bar{B} = -\frac{\xi\omega_1 R_1}{1 + \frac{\xi}{2}}\bar{j}.$$

Vitezele de alunecare și de spin au expresiile :

$$v_{a1} = \frac{\xi \omega_1 R_1}{1 + \frac{\xi}{2}},$$

$$v_{SP} = \omega_1 \rho \frac{R_1}{R_2} \operatorname{tg}\alpha \left[1 - \frac{\xi}{1 + \frac{\xi}{2}}\right].$$

Se observă că alunecarea crește cu valoarea lui ξ, ω_1 și R_1, iar viteza de spin crește cu ω_1, ρ, valoarea raportului R_1/R_2, unghiul α, ξ avînd o influență nesemnificativă.

APLICAȚIE LA DIVERSE TIPURI DE VARIATOARE ELASTOHIDRODINAMICE CU CONTACT PUNCTUAL

Așa cum s-a menționat, dintre dispozitivele mecanice de variere a raportului de transmitere, un rol important îl au variatoarele cu tracțiune prin pelicula de lubrifiant datorită atît performanțelor realizate în prezent, dar mai ales perspectivelor ce li se prevăd, după elucidare pe cale teoretică și experimentală, a necunoscutelor din funcționarea lor.

Clasificarea variatoarelor a arătat [6] că din punct de vedere al contactului, cele mai utilizate sînt cele cu contact punctual. Astfel se justifică analiza cinematică a acestora prin obținerea de relații de calcul în vederea optimizării lor. Întrucît alunecarea dintre elementele aflate în contact este chiar principiul lor de funcționare, relațiile ce se prezintă în continuare, deduse pe baza rezultatelor de mai sus, vizează mai ales mișcarea de spin, care, după cum s-a menționat, are efecte negative asupra capacității de transmitere. Relațiile permit stabilirea unor dimensiuni geometrice și a unei game de reglaj, convenabile, astfel ca spinul să nu afecteze nepermis de mult capacitatea de transmisie. Se vor prezenta relații de calcul pentru viteza de spin în cazul variatoarelor Kopp *B*, toroidal și de tip frontal cu bile, cele mai uzuale variatoare cu contact punctual.

Variator Kopp B

Schema simplificată a unui asemenea variator este prezentată în figura 6.

Discurile conice *2* și *6* sînt montate pe arborii *1* și *5*, condus, respectiv conducător. Elementele intermediare sînt bilele *3*, care au axa materializată. Reținerea radială a bilelor este realizată de inelul *4*, care îndeplinește și un important rol de ungere. Modificarea raportului de transmitere este realizată prin înclinarea axelor bilelor sferice *3*.

Pentru contactul dintre con intrare și bile, viteza de spin are expresia :

$$v_{SP} = -\omega_1 \rho \left[\sin\alpha + \right.$$

$$+ \frac{\xi R_1}{\left(1 + \frac{\xi}{2}\right) R \cos(\alpha - \beta)} X \sin(\alpha - \beta) +$$

$$\left. + Y \sin(\alpha - \beta) \right] \cdot$$

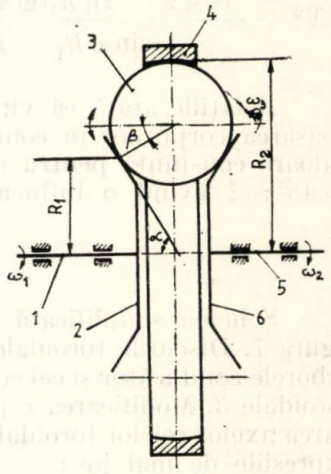


Fig. 6. — Schema cinematică a variatorului Kopp *B*.

Pentru contactul dintre bile și inelul de reținere, viteza de spin are expresia :

$$v_{SP} = \omega_1 \rho \left[\frac{\xi}{1 + \frac{\xi}{2}} \frac{X}{\cos\alpha} + Y \right] \sin\alpha.$$

Pentru contactul dintre bile și conul de ieșire, viteza de spin are expresia :

$$v_{SP} = \omega_{SL} \rho \, [X^* \sin\alpha(1 + X) - X \sin(\alpha + \beta)] - \omega_1 \rho Y [\sin(\alpha + \beta) + X^* \sin\alpha],$$

unde

$$\omega_{SL} = -\frac{\xi}{(1+\xi/2)R\cos(\alpha+\beta)}\left[\frac{\xi\omega_1 R_1}{\left(1+\frac{\xi}{2}\right)\cos(\alpha-\beta)}X+\omega_1 YR\right].$$

În relațiile de mai sus, ω_1 reprezintă viteza unghiulară de intrare, ρ — dimensiunea maximă a semiaxei elipsei de contact, ξ — alunecarea adimensională, care se recomandă să nu depășească valoarea de 0,1, pentru a nu apare efecte termice importante în peliculă, iar X, Y și X^* au expresiile de mai jos :

$$X = \frac{R\cos\alpha[\sin\alpha - \cos\alpha\,\mathrm{tg}(\alpha-\beta)]}{\cos(\alpha-\beta)[R_1\mathrm{tg}(\alpha-\beta)+R\sin\alpha]-\sin(\alpha-\beta)(R_1+R\cos\alpha)},$$

$$Y = \frac{R_1+R\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha\,\mathrm{tg}(\alpha-\beta)},$$

$$X^* = \frac{\cos(\alpha-\beta)[R_1\mathrm{tg}(\alpha+\beta)+R\sin\alpha]-\sin(\alpha-\beta)(R_1+R\cos\alpha)}{\sin\alpha(R_1+R\cos\alpha)-\cos\alpha[R_1\mathrm{tg}(\alpha+\beta)+R\sin\alpha]}.$$

Relațiile arată că viteza de spin crește cu mărimea unghiului α, cu apăsarea corpurilor în contact, cu raportul R_1/R_2 și cu unghiul β. La o valoare constantă pentru unghiul β, spinul este minim atunci cînd $\alpha = 45°$; ξ avînd o influență mai puțin semnificativă.

Variator toroidal

Schema simplificată a unui asemenea variator este prezentată în figura 7. Discurile toroidale conducător și condus, *2* și *4* sînt montate pe arborele conducător și cel condus, *1* și *5*. Elementele intermediare sînt rolele toroidale *3*. Modificarea raportului de transmitere se realizează prin înclinarea axelor rolelor toroidale. Cu notațiile din figură, viteza de spin capătă expresiile de mai jos :

— contactul de intrare :

$$v_{SP} = -\omega_1\rho\cos\beta,$$

— contactul de ieșire :

$$v_{SP} = \rho\cos\beta\left(\omega_1\frac{R}{R_1}X - 2\omega_{SL}\right);\ \omega_{SL} = \frac{\xi}{1+\frac{\xi}{2}}\left[\omega_1 X + \frac{\xi\omega_1 R_1}{\left(1+\frac{\xi}{2}\right)R}\right]$$

unde

$$X = \frac{2R\sin\beta - R_1 + 2R_1\cos^2\beta}{R}.$$

Relațiile prezentate arată că spinul crește cu dimensiunile suprafeței de contact, cu valoarea lui ω_1, cu mărimea raportului $\frac{R}{R_1}$; la raportul $i = 1$, $\beta = 0$, spinul este maxim, după care are loc o scădere a lui.

Variator frontal cu bile

Schema simplificată a unui asemenea variator este prezentată în figura 8. Discurile plane conducător, respectiv condus, *2* și *5*, sînt plasate pe arborele conducător, *1*, și cel condus, *6*. Elementele intermediare sînt

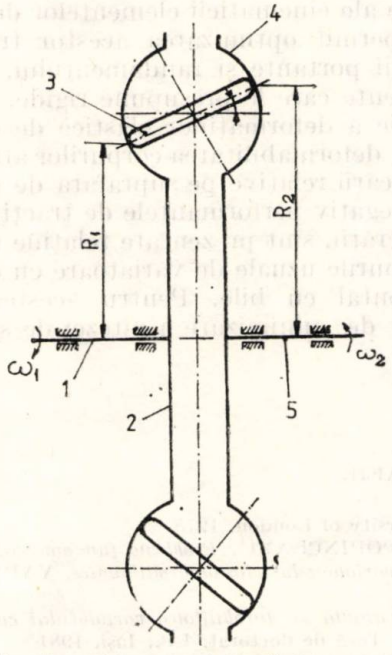


Fig. 7. — Schema cinematică a variatorului toroidal.

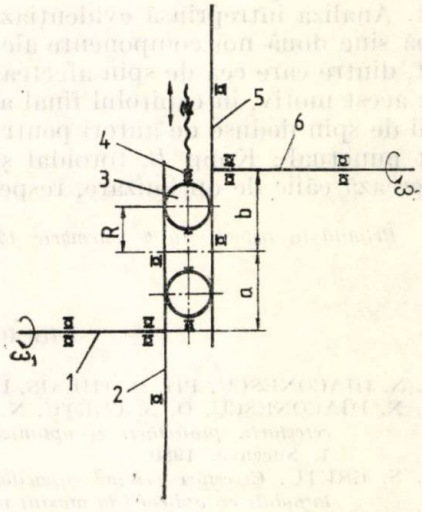


Fig. 8. — Schema cinematică a variatorului frontal cu bile.

bile, *3*, montate într-un rulment radial, *4*. Modificarea raportului de transmitere este realizată prin deplasarea indicată a coliviei cu bile. Cu notațiile din figură, viteza de spin capătă expresiile de mai jos:

— pentru contactul de intrare:

$$v_{SP} = \omega_1 \rho \frac{1}{2} \left[\frac{2 - \xi}{\frac{b}{a}(2 + \xi)} - 1 \right] \left(\frac{R}{2r} + 1 \right),$$

— pentru contactul de ieșire:

$$v_{SP} = \omega_1 \rho \frac{1}{2} \left[\frac{2 - \xi}{\frac{b}{a}(2 + \xi)} - 1 \right] \left(1 - \frac{R}{2r} \right).$$

Se observă că atunci cînd variatorul este reductor, i mai mare ca 1, b mai mare ca a, primul contact este frînă, lucru care nu deranjează întrucît puterea suplimentară se obține de la motorul de acționare. În schimb, cînd variatorul este multiplicator, i mai mic ca 1, b, mai mic ca a, al doilea contact este frînă, ceea ce conduce la scăderea randamentului transmisiei. Probabil, din acest motiv, firma PIV [7] nu le recomandă pentru regim de multiplicator, decît pînă la $i = 0{,}8$.

CONCLUZII

Lucrarea abordează cîteva aspecte ale cinematicii elementelor deformabile active ale variatoarelor, care permit optimizarea acestor transmisii din punct de vedere al capacității portante și randamentului.

Cinematica clasică a acestor elemente care le presupune rigide, este îmbunătățită prin luarea în considerație a deformațiilor elastice de contact. Analiza întreprinsă evidențiază că deformabilitatea corpurilor atrage după sine două noi componente ale mișcării relative pe suprafața de contact, dintre care cea de spin afectează negativ performanțele de tracțiune. Din acest motiv, în capitolul final al lucrării, sînt prezentate relațiile mișcării de spin deduse de autori pentru tipurile uzuale de variatoare cu contact punctual: Kopp B, toroidal și frontal cu bile. Pentru acestea se sugerează căile de optimizare, respectiv de minimizare a vitezei de spin.

Primită la redacție la 6 noiembrie 1983

BIBLIOGRAFIE

1. E. N. DIACONESCU, PH. D. THESIS, University of London, 1975.
2. E. N. DIACONESCU, O. S. CREȚU, N. G. POPINCEANU, *Probleme fundamentale ale cercetării, proiectării și optimizării variatoarelor elastohidrodinamice*, VAREHD 1, Suceava, 1980.
3. O. S. CREȚU, *Cercetări privind capacitatea portantă și durabilitatea variatorului cu role toroidale cu aplicații la mașini unelte*, Teză de doctorat, I.P., Iași, 1981.
4. I. M. CIORNEI, E. N. DIACONESCU, V. N. CONSTANTINESCU, *Posibilități de mărire a performanțelor variatoarelor elastohidrodinamice*, VAREHD 2, Suceava, 1982.
5. I. M. CIORNEI, E. N. DIACONESCU, V. N. CONSTANTINESCU, M. D. CEPLINSCHI, C. FERENTZ, *Considerații privind influența spinului asupra tracțiunii elastohidrodinamice*, VAREHD, 2, Suceava, 1982.
6. O.S. D. CREȚU, E. N. DIACONESCU, N.G. POPINCEANU, *Variatoare elastohidrodinamice uzuale*, VAREHD 1, Suceava, 1980.
7. * * * *Variable Speed Drives*, P.I.V. Antrieb Werner Reimers K D—6380 BAD Homburg V.d.H.

O NOUĂ DEMONSTRAȚIE A TEOREMEI LUI CAUCHY

de MARIUS TUCSNAK
Universitatea din București

Se dă o nouă demonstrație a existenței tensorului tensiunilor și a vectorului flux.

I. INTRODUCERE

Fundamentale în mecanica și termodinamica clasică sînt legile de bilanț de forma :

$$\int_{\partial B} f(x, \mathbf{n}(x))\mathrm{d}A_x = \int_B b(x)\mathrm{d}V_x, \tag{1}$$

unde B este un deschis din E^3, cu frontiera regulată, $\mathbf{n}(x)$ este versorul normalei exterioare în $x \in \partial B$ la ∂B, iar f și b sînt astfel încît integralele au sens.

În mecanică, $\mathbf{f}$ reprezintă vectorul tensiune care acționează într-un punct x asupra unui element de suprafață de normală $\mathbf{n}$, iar $\mathbf{b}$ este suma forțelor masice și a celor de inerție care acționează asupra lui $x \in B$, la momentul t, fixat.

În 1823 în [1] Cauchy a stabilit „ceea ce reprezintă probabil cea mai importantă teoremă în mecanica mediilor continue" (vezi [2]) și anume că dacă funcția $x \to \mathbf{f}(x, \mathbf{n})$ este continuă pe deschisul D din E^3, pentru orice versor $\mathbf{n}$, iar relația (1) este satisfăcută pentru orice submulțime B suficient de regulată a lui D, atunci $\mathbf{f}(x, \mathbf{n})$ este liniară în $\mathbf{n}$, adică

$$\mathbf{f}(x, \mathbf{n}) = \mathbf{T}(x)\,\mathbf{n}, \tag{2}$$

unde $\mathbf{T}(x)$ este o transformare liniară de la R^3 la R^3 și se numește tensorul tensiunilor.

Cauchy a demonstrat în [3] că dacă f satisface și legea de bilanț al momentului cinetic :

$$\int_{\partial B} (y - x) \times \mathbf{f}(y, \mathbf{n}(y))\mathrm{d}A_y = \int_B (y - x) \times \mathbf{b}(y)\mathrm{d}V_y \tag{3}$$

pentru orice B din D suficient de regulat, atunci $\mathbf{T}(x)$ este o transformare liniară simetrică de la R^3 la R^3.

În termodinamică, f reprezintă fluxul de căldură și este un scalar, iar relația (1) este o consecință a legii de bilanț al energiei (cum este ea formulată, de exemplu, în [4]). În acest caz, liniaritatea lui f în $\mathbf{n}$ este echivalentă cu existența vectorului flux de căldură, adică a unui vector $\mathbf{q}$ cu proprietatea :

$$f(x, \mathbf{n}) = \mathbf{q}(x) \cdot \mathbf{n}. \tag{4}$$

St. cerc. mec. apl., tom 43, nr. 3, 1984, p. 279–282

Demonstrația dată de Cauchy, ca și cea dată de Noll ([5], p. 48, 49), folosește relația (1) aplicată unor poliedre al căror volum tinde la zero. În demonstrația lui Noll, prisma folosită se reduce prin trecere la limită la o dreaptă, iar în demonstrația lui Cauchy, tetraedrul se reduce la un punct.

În cele ce urmează voi prezenta o demonstrație a teoremei lui Cauchy fără a folosi trecerea la limită și reducînd problema la cazul $b \equiv 0$.

II. DEMONSTRAȚIA TEOREMEI LUI CAUCHY

În paragraful precedent nu am precizat ce înseamnă „suficient de regulat" în problema de față. În cazul cînd $\mathbf{f}$ ia valori în R^3, relația (1) reprezintă legea de bilanț al impulsului, care, în cele mai multe lucrări (excepțiile pe care le cunosc sînt [2] și [6]), este postulată pentru orice submulțime B a lui D regulată (normală) în sens Kellog ([7], capitolul IV). Integrala $\int_{\partial B} \mathbf{f}(x, \mathbf{n}(x))\, dA_x$ nu are însă sens pentru orice B ca mai sus, doar în ipoteza că funcția $x \to \mathbf{f}(x, \mathbf{n})$ este continuă pentru orice n, fără nici o ipoteză privind regularitatea lui $\mathbf{f}$ în $\mathbf{n}$.

Pentru demonstrarea liniarității lui $\mathbf{f}$ în $\mathbf{n}$ este însă suficient să considerăm domenii B pentru care funcția $x \to \mathbf{n}(x)$, definită pe ∂B cu valori în R^3, este constantă pe porțiuni.

Teorema lui Cauchy se poate deci enunța astfel [2], [6]:

Teorema 1. Fie $f : D \times S^2 \to R$ astfel încît aplicația $x \to f(x, \mathbf{n})$ este continuă pe deschisul D din E^3 pentru orice $\mathbf{n} \in S^2 = \{\mathbf{m} \in R^3 \mid ||\mathbf{m}|| = 1\}$ și $b : D \to R$ continuă pe D. Dacă (1) are loc pentru orice poliedru $B \subset D$, atunci există un cîmp vectorial $\mathbf{q}$ pe D astfel încît

$$f(x, \mathbf{n}) = \mathbf{q}(x) \cdot \mathbf{n}. \tag{4}$$

Observația 1. Cazul tratat de Cauchy în care $\mathbf{f}$ și $\mathbf{b}$ iau valori vectoriale este un corolar imediat al acestei teoreme.

Observația 2. Teorema a fost extinsă de Gurtin, Mizel și Williams ([6]) pentru cazul în care $f(\cdot, \mathbf{n})$ (pentru orice $\mathbf{n}$) și $b(\cdot)$ sînt integrabile pe D.

Pentru a demonstra teorema 1 este suficient să demonstrăm:

Teorema 2. Fie $x \in D$ și D' o vecinătate a lui x, inclusă în D. Dacă $g : D' \times S^2 \to R$ este astfel încît $g(\cdot, \mathbf{n})$ este continuă pe D' pentru orice $\mathbf{n} \in S^2$ și

$$\int_{\partial B} g(y, \mathbf{n}(y))\, dA_y = 0 \tag{5}$$

pentru orice poliedru $B \subset D'$, atunci există un vector $\mathbf{k}(x) \in R^3$ astfel încît

$$g(x, \mathbf{n}) = \mathbf{k}(x) \cdot \mathbf{n} \qquad \forall \mathbf{n} \in S^2. \tag{5'}$$

Într-adevăr, pentru orice $x \in D$ și orice funcție $b : D \to R$ continuă pe D, există un paralelipiped dreptunghic $D_x \subset D$ cu $x \in D_x$ și o

funcție $\varphi : D_x \to R^3$ astfel încît $\operatorname{div}\varphi(y) = b(y)$; de exemplu, $\varphi(y) = \left(\int_{x_1}^{y_1} b(\zeta_1, y_2, y_3)\, d\zeta_1, 0, 0\right)$.

Relația (1) se scrie:

$$\int_{\partial B} [f(y, \mathbf{n}(y)) - \varphi(y) \cdot \mathbf{n}(y)]\, dA_y = 0$$

pentru orice poliedru $B \subset D_x$. Aplicînd teorema 2, se obține că există $\mathbf{k}(x) \in R^3$ astfel încît

$$f(x, \mathbf{n}(x)) - \varphi(x) \cdot \mathbf{n}(x) = \mathbf{k}(x) \cdot \mathbf{n}(x),$$

de unde rezultă teorema 1 cu $\mathbf{q} = \mathbf{k} + \varphi$.

Demonstrația teoremei 2

Fie $x \in D$, $\mathbf{n} \in S^2$ și $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ o bază ortonormată în R^3.

Fie tetraedrul cu un vîrf în x din care pornesc muchiile de versori $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, avînd o față normală la $\mathbf{n}$ și înălțimea h suficient de mică pentru ca tetraedrul să fie inclus în D' (fig. 1).

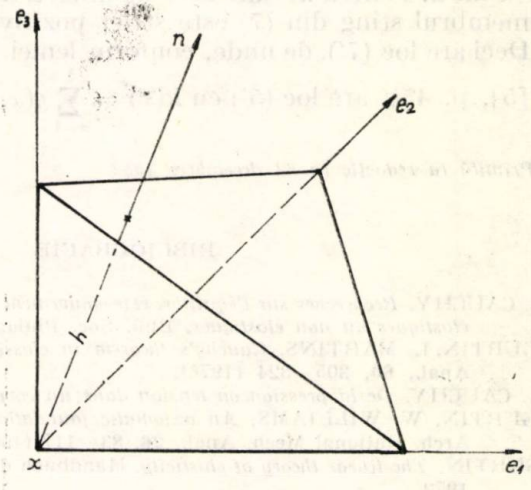


Fig. 1. — Tetraedrul lui Cauchy.

Aplicînd relația (5), se obține:

$$\int_{\mathcal{A}} \left[g(y, \mathbf{n})\, dA_y + \sum_{i=1}^{3} g(y, -\mathbf{e}_i) \right] dA_i = 0, \tag{6}$$

unde $\mathcal{A}$ este față de normală exterioară $\mathbf{n}$ și $\mathcal{A}_i$ cea de normală exterioară $-\mathbf{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$;

$\mathcal{A}_i = P_i(\mathcal{A})$, unde P_i este aplicația de proiecție a lui R^3 pe planul determinat de $\mathbf{e}_j$ și $\mathbf{e}_k$ cu $i \neq j$; $i \neq k$; $j \neq k$.

Printr-o schimbare de variabilă

$$\int_{\mathcal{A}_i} g(y, -\mathbf{e}_i)\, dA_i = \int_{\mathcal{A}} g(P_i y, -\mathbf{e}_i)\, \mathbf{n}_i\, dA$$

și din (6), rezultă

$$\int_{\mathcal{A}} [g(y, \mathbf{n}) + \sum_{i=1}^{3} \mathbf{n}_i g(P_i y, -\mathbf{e}_i)]\, dA = 0. \tag{7}$$

Evident, relația (7) se păstrează pentru orice tetraedru cu $h' < h$. Din aceasta rezultă :

$$g(x, \mathbf{n}) + \sum_{i=1}^{3} n_i\, g(x, -\mathbf{e}_i) = 0. \tag{7'}$$

Într-adevăr, dacă această relație n-ar avea loc, ar exista o vecinătate V a lui x astfel încît $g(y, \mathbf{n}) + \sum_{i=1}^{3} n_i\, g(P_i y, -\mathbf{e}_i) > 0$ sau < 0 în acea vecinătate a lui x. Pentru h' suficient de mic, tetraedrul este inclus în V, de unde membrul stîng din (7) este strict pozitiv sau strict negativ.

Deci are loc (7'), de unde, conform lemei fundamentale a lui Cauchy (vezi [5], p. 45), are loc (5') cu $\mathbf{k}(x) = \sum_{i=1}^{3} g(x, \mathbf{e}_i)\, \mathbf{e}_i$.

Primită la redacție la 24 decembrie 1983

BIBLIOGRAFIE

1. A. L. CAUCHY, *Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides, élastiques ou non élastiques*, Bull. Soc. Philomath., 9—13 (1823).
2. M. GURTIN, L. MARTINS, *Cauchy's theorem in classical physics*, Arch. Rational Mech. Anal., **60**, 305—324 (1976).
3. A. L. CAUCHY, *De la pression ou tension dans un corps solide*, Ex. Math., *2* (1827).
4. M. GURTIN, W. WILLIAMS, *An axiomatic foundation for continuum thermodynamics*, Arch. Rational Mech. Anal., **26**, 83—117 (1967).
5. M. GURTIN, *The linear theory of elasticity*, Handbuch der Phys., VI, a/2, Springer, Berlin, 1972.
6. M. GURTIN, V. MIZEL, W. WILLIAMS, *A note on Cauchy's stress theorem*, J. Math. Anal. Appl., **22**, 398—401 (1968).
7. D. KELLOG, *Potential theory*, Springer, Berlin, 1967.

RECENZII

Proceedings of the VIIth Conference on Fluid Machinery, Budapest, 1983 (Lucrările celei de-a VII-a Conferințe de turbomașini, Budapesta, 1983), Editori: L. Kisbocskói, A. Szabó, Budapest, Akadémiai Kiadó, 1983.

La a VII-a ediție, Conferința de turbomașini din anul 1983 a înregistrat un deosebit interes din partea specialiștilor din cercetare, învățămînt superior și proiectare-producție veniți din patru continente. Sub acest aspect se poate afirma că în cei aproape 25 de ani de la prima organizare, conferințele de la Budapesta s-au ridicat la rangul unei reuniuni mondiale, polarizînd specialiști cu renume la aceste discuții de înaltă ținută științifică și aplicativă.

Conferința de turbomașini de la Budapesta se organizează sub egida Asociației științifice pentru construcții de mașini și a Academiei maghiare de științe, fiind pregătită efectiv de Catedra de mașini hidraulice a Universității Tehnice din Budapesta. Ea alternează periodic, din doi în doi ani cu Conferința HYDROTURBO din Cehoslovacia, organizată de Institutul Tehnic Superior din Brno.

Din tematica lucrărilor dezbătute se menționează rezultatele cercetărilor din următoarele domenii: cavitația, teoria și aplicațiile profilelor de aripi portante singulare și în rețea, curbele caracteristice energo-cavitaționale ale mașinilor hidraulice și cu aer (ventilatoare, suflante, compresoare), regimul tranzitoriu și probleme de reglaj ș.a. Cele mai largi dezbateri s-au referit la metodele de calcul și de proiectare ale paletajelor rotorice. S-au adus contribuții deosebit de valoroase la metoda ecuațiilor diferențiale, a transformărilor conforme, a elementelor finite etc. Trebuie încă subliniate cîteva domenii de mare actualitate, cum este cel specific centralelor nucleare avînd contingențe cu fenomenele din mașinile hidraulice. Citățm astfel cercetările privind rezistența la atac cavitațional a unor aliaje speciale, de exemplu cupru-beriliu, bronzuri de aluminiu, care sînt utilizate la construcția utilajului hidromecanic din centralele nucleare. De asemenea, trebuie menționat că în cercetările prezentate un rol deosebit s-a acordat tehnicii de calcul electronic și unor tehnici noi de prezentare grafică, foarte intuitive.

Din R. S. România pe programul conferinței au fost trecute cinci lucrări: trei de la Institutul Politenic „Traian Vuia", Timișoara (E. Sișak, M. Tămaș) și două de la Centrul de cercetări și studii de inginerie tehnologică pentru echipamente hidroenergetice CCSITEH din Reșița (I. Voia, I. Kolláti).

Printre autorii care semnează lucrările cu diverse aspecte ale fenomenului de cavitație se găsesc oameni de știință cunoscuți prin activitatea lor sistematică în decursul unui lung șir de ani: Prof. J. Varga, Prof. J. Raabe, Gy. Sebestyén, A. Szabó, K. Steller, J. Noskievič, U. Pighini, G. di Francesco, P. Courbière, P. V. Rao, J. Kirejczyk, D. H. Bucley, A. Koutny.

În domeniul pompelor, cei mai mulți autori au urmărit îmbunătățirea performanțelor energetice și cavitaționale prin metode hidrodinamice și/sau constructive funcționînd în regim permanent și tranzitoriu la $Q = Q_N$ și $Q \neq Q_N$. Ca tipuri constructive sînt cercetate pompe centrifuge mono- și multietajate, pompe axiale și diagonale. Atenție deosebită s-a acordat fenomenelor de la intrarea și din zona de ieșire a rotorului și din canalele de întoarcere dintre etaje (E. Carnevale, F. Martelli, J. Csemniczky, H. J. Kleinert, V. Quaggiotti, Gy. Halász, A. Hyiri, H. Murai, S. Tezuka, R. Schilling, S. Akaide, T. Toyokura, M. Várchola, A. Satta, M. Sen, Br. Schiavello, K. Balakrishnan, T. Tanaka, R. Rey, T. Chmielniak, A. Korczak, A. Lojek, T. Fryml).

Aceleași fenomene au fost studiate atent și la ventilatoare, suflante și compresoare (J. Jendriszek, M. Gabi, G. Grabow, T. Lajos, L. Kalmár, A. Witkovski, H. Wolf, K. Majka, V. Heisler).

La rețelele de profile și stratul limită s-a urmărit perfecționarea metodelor teoretice de calcul, legătura dintre parametrii geometrici ai mașinii și distribuția de viteze pe conturul paletelor și în canalele interpaletare etc. (O. Füzy, A. Nyiri, A. Sebestyén, E. Steck, K. D. Felsch, P. Fleischner, K. Döge, P. Hergt, A. Thuma, E. Sisak, R. I. Lewis, J. Otte, V. Bothmann, J. Reffstrup, F. Lehthaus).

Fenomenele din rețelele de turbină și aplicațiile lor la calculul și proiectarea acestor mașini au fost cercetate sub aspectul metodelor de calcul în vederea optimizării variantelor cu caracteristici energo-cavitaționale superioare (I. Voia, I. Kolláti, V. Kercan, I. V. Vushkova, V. S. Obretenov, F. Martelli, G. Manfrida). Lucrări valoroase au fost prezentate și în legătură

cu fenomenul hidrodinamic din mașinile reversibile, — pompe-turbine (F. Strohmer VOEST, J. Spidla, B. Seda CKD Blansko) și din turbotransformatoarele hidrodinamice (W. Fister, Gy. Sebestyén).

Vibrațiile și fenomenele oscilatorii din conducte au fost, de asemenea, în atenția cercetătorilor (K. Bordás, R. Carolus, L. Kullmann, M. Fanelli, F. Bencze, D. Dömötör). Alte lucrări au aprofundat diverse aspecte ale fenomenului hidrodinamic din conducte și armături (M. Tămaș, A. Verba, L. Pápai, L. Kovács, S. Váradi, K. Varsamov, B. Tolvaj, K. Prikkel, M. G. Khublaryan, S. Caglar, G. Grozev, J. Illéssy, c. Ng).

Conversia energiei eoliene a format obiectul a două comunicări (E. Sisak, J. D. Burton). O nouă relație pentru efectul de scară la randamentul turbinelor hidraulice a fost dedusă de Prof. S. P. Hutton, cunoscut prin lucrările sale din acest domeniu important.

★

Lucrările prezentate schematic sînt cuprinse în cele două volume ale conferinței: Proceedings of the seventh conference on fluid machinery, editura „Akademiai Kiadó" Budapesta, 1983, publicate în timp record și în condiții grafice impecabile. Cele 108 articole constituie un valoros material de documentare pentru specialiști.

Acad. I. Anton,
E. Sisak

G. NIEMANN, H. WINTER, Maschinenelemente, (Organe de mașini), Vol. II și III. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1983.

Cele două volume reprezintă reeditarea volumului II ediția 1975 a Organelor de mașini apărute în două volume (I și II). Datorită măririi cantității de informație în ediția 1983, cuprinsul unui singur volum a devenit insuficient, iar materialul a fost prezentat în două volume și anume II și III.

Cărțile se adresează specialiștilor în proiectare în construcția de mașini dar au fost concepute de asemenea ca manual pentru uzul studenților institutelor politehnice.

Întregul material este tratat astfel încît calculele să poată fi executate pe calculatorul electronic.

Ambele volume cuprind un număr mare de tabele cu relații de calcul, diferite valori ale parametrilor care intervin în relațiile de calcul, grafice și schițe pentru exemplificarea diferitelor soluții constructive analizate.

Volumul II cuprinde capitolele:

Transmisii în general (funcționare, relații de bază, soluții constructive, dimensiuni, ecuațiile mișcării, forțe în lagăre); Bazele transmisiilor cu roți dințate (roți dințate cilindrice); Transmisii cu roți dințate cilindrice; Proiectare, calcul, alegerea formei.

Volumul III are cuprinsul următor:

Transmisii cu roți dințate cu dinți înclinați; Transmisii cu roți dințate conice, hipoide, coroane dințate; Transmisii cu roți melcate; Transmisii cu lanț; Transmisii cu curele; Transmisii prin fricțiune; Ambreiaje și frîne cu fricțiune; Ambreiaje de mers liber.

Întregul material este tratat în mod unitar, fiecare capitol cuprinzînd următoarele aspecte: privire de ansamblu asupra proprietăților și utilizării; soluții constructive; notații și unități de măsură; aspecte cinematice și dinamice; pierderi și randamente; calculul de rezistență; dimensionarea și alegerea formei; aspecte tehnologice (alegerea materialelor, prelucrări și tratamente termice, ungerea, controlul calității).

G. Winter

M. HILLER, Mechanische Systeme. Eine Einführung in die analytische Mechanik und Systemdynamik (Sisteme mecanice. O introducere în mecanica analitică și dinamica sistemelor). Springer—Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1983, 227 p.

În studiul unei științe a naturii se pune din ce în ce mai mult în evidență legătura dintre metodele moderne ale teoriei sistemelor și modelarea matematică a acestei științe. În același

timp trebuie luată în considerare și posibilitatea de cuplare a unor fenomene caracteristice diferitelor științe ale naturii (mecanică, fizică, chimie, biologie etc.).

Un sistem se definește ca o mulțime de elemente care interacționează, asupra cărora au loc acțiuni, numite intrări, și ale căror acțiuni asupra altor sisteme sînt numite ieșiri; printre cele mai importante proprietăți ale unui sistem trebuie să menționăm schimbarea, mișcarea sa, precum și posibilitatea de a fi influențat printr-o alegere convenabilă a intrărilor, a forțelor. În mecanica clasică, legătura dintre acțiunile ce se exercită asupra sistemului și schimbările survenite se numește dinamica sistemelor. Se subînțelege că aceste considerații se referă în primul rînd la sistemele mecanice; în general însă, ținînd seama de legătura dintre diferite sisteme, dinamica sistemelor este o știință interdisciplinară. Acesta este cadrul în care, în acest volum, metodele clasice ale mecanicii analitice sînt legate de dinamica sistemelor.

În legătură cu studiul acestor sisteme se pun următoarele probleme: a) construirea modelelor matematice corespunzătoare sistemului mecanic considerat; b) studiul modelului astfel construit; c) alegerea intrărilor dominante care guvernează fenomenele considerate; d) simularea comportării sistemului mecanic considerat. Autorul se ocupă mai ales de primele două probleme, accidental de a treia și mai puțin de a patra problemă. Lucrarea este divizată în opt capitole, ale căror titluri (1. Introducere; 2. Sisteme mecanice cu un număr finit de grade de libertate; 3. Sisteme olonome; 4. Sisteme neolonome; 5. Modele ale sistemelor tehnice; 6. Rezolvarea sistemelor liniare staționare; 7. Stabilitatea sistemelor liniare staționare; 8. Rezolvarea și stabilitatea sistemelor liniare olonome) pun în evidență considerațiile făcute. Bibliografia conține 53 titluri.

Volumul prezentat de Manfred Hiller, profesor la Universitatea din Stuttgart, se bazează pe lecțiile cuprinse în partea I a cursului de dinamica sistemelor tehnice, predat studenților care se specializează în cibernetică tehnică. El se adresează atît studenților, cît și tuturor celor ce doresc să abordeze problemele puse de mecanică dintr-un punct de vedere modern.

P. P. Teodorescu

P. K. BANERJEE, R. BUTTERFIELD, Boundary Element Methods in Engineering Science (Metode cu elemente de frontieră în știința inginerească). McGraw—Hill Book Company (UK) Limited, London, 1981, 452 pagini 204 figuri, 17 tabele.

Metoda elementelor finite (MEF) reprezintă cel mai puternic și cel mai general mijloc de rezolvare a problemelor de cîmp formulate diferențial. Necesitatea discretizării întregului domeniu de definiție poate conduce însă la un număr foarte mare de necunoscute. Pentru evitarea acestui lucru se apelează la formularea cu ajutorul integralelor de frontieră, discretizarea rezumîndu-se la frontiera domeniului de definiție. Prin aceasta se reduce mult numărul necunoscutelor, se pierde însă din generalitate.

Cartea de față constituie prima lucrare de sinteză privind metoda elementelor de frontieră (MEFR), prezentată intuitiv, inginerește. Astfel, concluziile practice ale vastei literaturi matematice privind ecuațiile integrale devin utilizabile în practică. Calea este inversă celei urmate de evoluția MEF, introdusă pe baze intuitive, inginerești și apoi generalizată prin matematizare.

Primele două capitole pun în evidență esența MEFR, prezentînd în primul rînd cele trei formulări de bază: cea directă, cea semiindirectă și cea indirectă. Urmează rezolvarea detaliată a problemelor unidimensionale de curgere potențială și de încovoiere a grinzilor, atît în metoda directă, cît și în cea indirectă. Evident că MEFR nu poate fi recomandată pentru rezolvarea acestor cazuri simple; ele permit însă explicarea algoritmului de calcul, ce rămîne aproape nemodificat și pentru problemele bi- și tridimensionale.

Capitolele trei și patru se referă la probleme bidimensionale de curgere potențială și de elastostatică. Metodele de calcul pentru fluide și corpuri izotrope și anizotrope sînt exemplificate prin aplicații. Se apreciază că pentru aceste probleme MEF și MEFR sînt în general la fel de utile. Situația se schimbă la problemele tridimensionale din capitolele cinci și șase cînd MEFR poate oferi soluții la un cost mai rezonabil decît MEF.

Luarea în considerare a discontinuităților geometrice și în special a colțurilor este tratată pe scurt în capitolul șapte. Se accentuează faptul că mai ales în metoda indirectă nu sînt lămurite toate aspectele problemei. Capitolul opt este rezervat reprezentării parametrice a funcțiilor și geometriei, asemănătoare celei cunoscute din MEF.

Probleme tranzitorii de curgere potențială și de elasticitate (visco- și termoelasticitatea, elastodinamica) sînt tratate în capitolele nouă și zece. Încovoierea plăcilor plane face obiectul capitolului unsprezece.

Ca și celelalte metode numerice (diferențe finite, elemente finite) și MEFR poate rezolva probleme de elastoplasticitate prin procedee incrementale sau iterative, așa cum se arată în capitolul doisprezece. Capitolul treisprezece cuprinde exemple din mecanica fluidelor, iar capitolul patrusprezece posibilități de combinare a MEFR cu metoda diferențelor finite și cu MEF.

Programarea MEFR este exemplificată în ultimul capitol. După prezentarea structurii programelor din generația a doua sînt listate programe pentru rezolvarea problemei de elastostatică bidimensională atît în metoda directă, cît și în cea indirectă. Sînt necesare eforturi suplimentare pentru crearea unor sisteme de programe comparabile cu NASTRAN, ASKA, MARC ș.a. pentru elemente finite.

Cele trei anexe ale cărții cuprind elemente de matematică mai puțin uzuală, pentru a a nu fi necesară consultarea unor cărți de specialitate.

Fiecare capitol se încheie cu concluzii și o bibliografie bogată. Cele mai multe capitole cuprind numeroase exemple de calcul. Se scoate în evidență faptul că puținele probleme ce nu pot fi rezolvate convenabil cu MEFR se referă la cazul neomogenităților pronunțate și la cel al plăcilor de grosime medie. Evaluarea termenilor matricelor în MEFR necesită mai multe operații decît în MEF; totuși MEFR consumă timpi de calcul mai reduși, mai ales la probleme cu frontiere la infinit și tridimensionale.

Prin lucrarea de față, autorii au reușit să prezinte MEFR ca o alternativă la MEF pentru rezolvarea problemelor de mecanica fluidelor și a solidelor; metoda poate fi utilizată, bineînțeles, și în alte domenii al științelor inginerești.

R. Friedrich

HANS GÜNTHER NATKE, Einführung in Theorie und Praxis der Zeitreihen- und Modalanalyse. Identifikation schwingungsfähiger elastomechanischer Systeme (Introducere în teoria și practica analizei modale și a seriilor de timp. Identificarea sistemelor elastomecanice vibratoare). F. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1983, 522 p., 184 fig.

Monografia profesorului H. G. Natke de la Universitatea din Hanovra este consacrată analizei experimentale a sistemelor vibratoare liniare. Ea reunește într-un singur volum noțiuni referitoare la reprezentarea temporală și frecvențială a funcțiilor semnal, analiza spectrală și de corelație, precum și probleme privind analiza caracteristicilor modale ale sistemelor elastice.

În capitolul introductiv se definește problematica identificării sistemelor vibratoare, se face o clasificare a metodelor și o ierarhizare a etapelor de studiu.

Capitolul al doilea este dedicat descrierii semnalelor și proceselor deterministe. Se prezintă reprezentarea în timp și în frecvență a semnalelor armonice, periodice și neperiodice. Se definesc funcția pondere și funcția de răspuns în frecvență ale sistemului cu un grad de libertate, precum și matricele acestor funcții — în cazul sistemelor discrete cu mai multe grade de libertate. Se tratează pe scurt transformatele Fourier, Laplace și transformata z.

În capitolul al treilea se descriu semnalele și procesele aleatoare. Se face definirea și clasificarea funcțiilor aleatoare, se dau elemente de teoria estimației, se prezintă detaliat estimarea parametrilor prin metoda celor mai mici pătrate cu ponderare și prin metoda variabilelor instrumentale, estimarea funcției de corelație și a densității spectrale de putere, folosirea ferestrelor de ponderare. De asemenea, se discută semnalele și procesele aleatoare discrete.

Capitolul al patrulea este consacrat identificării neparametrice, adică analizei experimentale a sistemelor pentru care nu se cunoaște structura modelului. Se descriu caracteristicile și se evaluează separat metodele de excitare a structurilor cu funcții semnal armonice, periodice, tranzitorii și aleatoare. Se prezintă metodele de analiză spectrală, cu referiri la identificarea defectelor și măsurarea răspunsului în frecvență, precum și metodele de analiză a corelației, cu referiri la detecția semnalelor contaminate de zgomot, localizarea surselor de vibrații, determinarea funcției pondere și analiza cepstrum. Un paragraf special este dedicat metodelor de determinare a caracteristicilor unui sistem fără cunoașterea mărimii de intrare, cu exemplificare prin metoda decrementului aleator.

În capitolul al cincilea se tratează pe larg identificarea parametrică a sistemelor vibratoare, accentuîndu-se asupra metodelor de estimare a parametrilor modelelor modale. După o

expunere succintă a principalelor relații din teoria vibrațiilor sistemelor liniare discrete, cu parametri invariabili în timp, cu amortizare vîscoasă sau structurală, se prezintă noțiunile de bază ale analizei modale teoretice și experimentale. Se discută metoda rezonanței de fază și metoda separării fazelor. Majoritatea rezultatelor prezentate în acest capitol au la bază cercetări originale ale autorului. Ele permit determinarea frecvențelor proprii de vibrație, a factorilor de amortizare modali, a formei modurilor proprii de vibrație și a maselor generalizate, pentru sisteme cu amortizare neproporțională, vîscoasă sau structurală, pe baza curbelor răspunsului în frecvență trasate experimental.

Capitolul al șaselea se referă la identificarea indirectă a structurilor, adică la corectarea modelului de calcul pe baza datelor experimentale, domeniu în care autorul are de asemenea multe contribuții originale.

În ultimul capitol al lucrării se fac succinte referiri la metodele de sinteză modală a sistemelor vibratoare.

Monografia se distinge prin claritate, logică și capacitate de sintetizare a unui mare volum de cunoștințe. Fiecare capitol este însoțit de o bogată bibliografie reprezentativă și de exerciții și probleme care subliniază latura aplicativă urmărită de autor în tot cuprinsul lucrării.

Cartea se adresează studenților din anii terminali ai facultăților cu profil tehnic, inginerilor din proiectare și cercetare confruntați cu probleme complexe de dinamica structurilor și a mașinilor, cadrelor didactice și doctoranzilor cu preocupări în domeniul identificării sistemelor.

M. Radeș

X. HAFER, G. SACHS, Flugmechanik. Moderne Flugzentwurfs und Steuerungskonzepte. (Mecanica zborului. Proiectarea modernă a avioanelor și conceptul de comandă), Springer-Verlag (Berlin, Heidelberg, New York) 1980, 263 pagini și 155 figuri.

Dezvoltarea avioanelor moderne de transport în ultimii douăzeci de ani a ridicat și continuă să ridice probleme noi legate de perfecționări din punct de vedere al aerodinamicii și al tehnologiei de comandă și control. Cercetările consacrate acestor probleme au dus la apariția unor concepte aerodinamice noi în proiectarea avioanelor bazate pe utilizarea aripilor cu profil supercritic și cu o tehnologie de comandă activă. Conceptul tehnologiei de comandă activă a avioanelor constă în : stabilirea artificială a avionului, comandă directă a forțelor, realizarea de aripi cu suprafețe de comandă active pentru reducerea încărcării statice și dinamice, precum și adaptarea automată a profilului aripei la valori optime ale coeficienților aerodinamici.

Prin introducerea acestei tehnologii noi în construcția avioanelor, se urmărește satisfacerea continuă a economiei de combustibil, creșterea gradului de confort și a siguranței de zbor, reducerea nivelului de zgomot.

Autorii, specialiști reputați în domeniul mecanicii avionului, fac o prezentare completă a acestor probleme într-o expunere rezumativă. Lucrarea este organizată pe trei capitole principale și două anexe :

În capitolul I intitulat „Considerații asupra proiectării avioanelor cu stabilitate naturală și artificială" (sau automată) sînt tratate următoarele probleme : poziția suprafețelor de comandă pentru stabilitatea naturală și artificială ; rezistența minimă de trimmer a avionului la centraj optim ; aranjarea centrajului și limitele de stabilitate naturală ; adoptarea centrajului optim în domeniul stabilității artificiale ; portanța maximă cu trimmer ; dinamica avionului instabil cu comenzi nereglate.

În capitolul al II-lea, „Comanda directă a forțelor", sînt prezentate soluții pentru comanda directă a portanței, forțelor laterale și rezistenței la înaintare, fără modificarea poziției avionului.

În capitolul al III-lea, intitulat „Posibilități de aplicare în continuare a tehnologiei de comandă activă", autorii tratează problemele : stabilitatea laterală automată ; voleți automați de manevră ; modificarea curburii profilului ; comanda de încărcare la manevre ; reducerea vibrațiilor și suprimarea flutterului prin comenzi active.

În cele două anexe se prezintă modul în care se introduce în calculul performanțelor efectul rezistenței de interferență aripă-ampenaj și efectul modificării poziției centrului de greutate pentru rezistență la înaintare optimă, în zborurile de manevră.

Fiecare capitol este însoțit de o listă bibliografică amplă, conținînd în principal rapoarte tehnice (AGARD, NASA, RAE) și articole recente din reviste de specialitate.

Cartea este concepută ca un curs introductiv în problemele noi de mecanica avionului, generate de utilizarea unor tehnici moderne în proiectarea generației actuale de avioane, destinată studenților de la facultățile de aviație și de asemenea inginerilor din proiectare.

Datorită utilității pe care o reprezintă pentru activitatea de proiectare, consider că traducerea acestei lucrări va însemna un sprijin important acordat constructorilor de avioane.

Horia Dumitrescu

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică :

- Studii originale de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.
- Note (lucrări mai scurte cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni),
- Referate ştiinţifice şi tehnice, în care se expun stadiul actual al unei anumite probleme subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.
- Recenzii asupra cărţilor şi studiilor române şi străine.

Domeniile de specialitate ale revistei sînt :

- Astrodinamica (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţii, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosfera rarefiată, în atmosfera densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).
- Aerodinamica (mecanica fluidelor, aerodinamica, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).
- Hidrodinamica (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).
- Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).
- Mecanica generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri stabilite, analogii electrice şi hidraulice).
- Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, stabilitatea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).
- Tehnica măsurătorilor (aparate electrice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi izotopilor radioactivi în tehnică).

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

★

Manuscrisele se vor trimite la sediul Comitetului de redacţie, Bucureşti, 70701, str. Const. Mille nr. 15, sectorul 1.

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

SERGIU T. CHIRIACESCU **Stabilitatea în dinamica aşchierii metalelor**, 1984, 188 p., 16,50 lei.

IOAN I. MUNTEANU, **Structuri pentru construcţii. Teorie şi calcul**, vol II, 1984, 254 p., 22 lei.

DRAGOŞ CIOCLOV, **Recipiente sub presiune. Analiza stării de tensiune şi deformaţie**, 1983, 354 p., 32 lei.

V. HANDRA-LUCA, **Funcţiile de transmitere în studiul mecanismelor**, 1983, 260 p., 20 lei.

IOAM I. MUNTEANU, **Structuri pentru construcţii. Teorie şi calcul**, vol. I, 1983, 198 p., 18 lei.

ŞTEFAN BĂLAN, VALERIU CRISTESCU, ION CORNEA (sub redacţia), **Cutremurul de pământ din România de la 4 martie 1977**, 1982, 516 p., 10 lei.

ALEXE MARINESCU, **Probleme optimale în dinamica zborului spaţial**, 1982, 253 p., 20 lei.

GORUN MANOLESCU, **Abordarea ierarhic structurată şi informatică**, 1982, 192 p., 14,50 lei.

VOICU DOLOCAN, **Fizica joncţiunilor cu semiconductoare**, 1982, 320 p., 30 lei.

A. CARABULEA, I. GH. CARABOGDAN, **Modele de bilanţuri energetice reale şi optime**, 1982, 326 p., 39 lei.

DAN TEODORESCU, **Modele stohastice**, 1982, 246 p., 20 lei.

ELIE CARAFOLI, V. N. CONSTANTINESCU, **Dinamica fluidelor incompresibile**, 1981, 630 p., 44 lei.

VALERIU PETCU, GEORGETA STĂNCULESCU, UMBERTO PANCALDI, **Adaptabilitatea plastică a structurilor din beton armat**, 1981, 236 p., 12 lei.

GEORGE ŞT. ANDONIE, **Istoria ştiinţelor în România: Matematica, Mecanica, Astronomia**, 1981, 168 p., 9 lei.

LIVIU DUMITRAŞCU, IOACHIM ALEXANDRU, **Tehnici de construire a programelor cu structuri alternative**, 1981, 295 p., 20,40 lei,

TITUS PETRILĂ, **Modele matematice în hidrodinamica plană. Cercetări asupra influenţei pereţilor nelimitaţi** 1981, 239 p., 10,50 lei.

ION BOLDEA, **Vehicule pe pernă magnetică**, 1981, 283 p., 16 lei.

MIHAI FLORESCU, EDMOND NICOLAU, EUGENIU NICULESCU-MIZIL, **Istoria ştiinţelor în România. Cibernetica**, 1981, 229 p., 10,50 lei.

DAN MATEESCU, IOSIF APPELTAUER, EUGEN CUTEANU, **Stabilitatea la compresiune a structurilor din bare de oţel**, 1981, 327 p., 26 lei.

HRISTACHE POPESCU, VETURIA CHIROIU, **Calculul structurilor optimale**, 1981, 239 p., 20,50 lei.

MIHAI TERTIŞCO, PETRE STOICA, **Identificarea şi estimarea parametrilor sistemelor**, 1980, 292 p., 16 lei.

D. D. SANDU, **Probleme moderne de tehnica impulsurilor**, 1980, 296 p., 18 lei.

RADU PRIŞCU şi colab., **Ingineria seismică a marilor baraje**, 1980, 356 p., 34 lei.

SANDA HANGAN, L. CRAINIC, **Concepte şi metode energetice în dinamica construcţiilor**, 1980, 306 p., 27 lei.

REVISTE PUBLICATE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
REVUE ROUMAINE DES SCIENCES TECHNIQUES
– SERIE DE MECANIQUE APPLIQUEE
– SERIE D'ELECTROTECHNIQUE ET D'ENERGETIQUE

RM – ISSN 0039 – 4017

ST. CERC. MEC. APL., TOM 43, NR. 3, 1984, P. 199–288

I. P. Informaţia c. 2153

Lei 55.–

$ 62 pour un abonnement annuel

R
F2557

5-6
TOMUL 43
sept. — dec.
1984

BIBLIOTECA CENTRALĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

Consiliul de conducere

Acad. I. ANTON, *redactor şef*

Membri:

Acad. ŞT. BĂLAN,
Acad. D. DUMITRESCU,
Acad. C. IACOB
Acad. D. MATEESCU,
Acad. R. VOINEA,
Prof. C. AVRAM, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. GH. BUZDUGAN, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Dr. ing. N. PATRAULEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. R. C. BOGDAN,
Prof. R. PRIŞCU,
Dr. ing. C. TEODORESCU,
Dr. Ing. V. VISARION,
Dr. ing. D. PANTAZOPOL,
Dr. ing. I. CRIŞAN,
Prof. CR. PELECUDI,
Prof. TR. DEMIAN,
Prof. T. OROVEANU, *secretar de redacţie.*

Colegiul de redacţie

Acad. I. ANTON, *redactor şef*

Membri:

Acad. D. MATEESCU,
Dr. ing. C. TEODORESCU,
Dr. ing. I. CRIŞAN,
Dr. ing. D. PANTAZOPOL,
Prof. TR. DEMIAN,
Prof. T. OROVEANU, *secretar de redacţie,*

Toate comenzile externe pentru lucrările apărute în Editura Academiei R.S. România se vor adresa : ROMPRESFILATELIA — sectorul export-import presă, P.O. Box 12—201, telex 10376 prsfi r, Calea Griviţei nr. 64—66, 78104 Bucureşti, România. În ţară abonamentele se primesc la oficiile poştale, agenţiile poştale, factorii poştali şi difuzorii de presă din întreprinderi şi instituţii.

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice corespondenţă se trimit pe adresa Comitetului de redacţie al revistei, 70701, str. Const. Mille nr. 15

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
79717, Calea Victoriei nr. 125, sectorul 1, Bucureşti

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 43, nr. 5—6 septembrie—decembrie 1984

SUMAR

Academicianul profesor DUMITRU T. DUMITRESCU 413

STUDII

CAIUS IACOB, Asupra generalizării teoremei lui Lazare Carnot în cazul ciocnirii a două solide rigide libere 422

DUMITRU T. DUMITRESCU, VASILE IONESCU, Preocupări şi rezultate în problema mişcării fluidelor grele cu suprafaţă liberă 430

I. ANTON, D. IONESCU, G. CĂLIN, Calculul pierderilor hidraulice într-o reţea plană de profile 439

I. ANTON L. VÉKÁS, I. POTENCZ, D. BICA, Fluide magnetice. Structura şi unele aplicaţii 451

CONSTANTIN IAMANDI, Contribuţii în problema jeturilor fluide turbulente 460

D. CIOC, Modele de calcul în mişcarea nepermanentă 484

OCTAVIAN POPA, Soluţionarea problemei mişcării homocore a fluidelor perfecte în prezenţa elicelor propulsive şi a rotoarelor eoliene 512

RADU PRIŞCU, DAN STEMATIU, Noi criterii de proiectare în domeniul marilor baraje 542

JULIETA FLOREA, GHEORGHE BĂRAN, Cercetări experimentale asupra curgerii fluidelor bifazice în conducte verticale cu aplicare la instalaţii de gaz lift 552

IOAN DAVID, Consideraţii asupra calculului hidraulic al conductelor cu debit variabil pe parcurs 564

MIRCEA CAZACU, MONICA POPOVICI, Cercetări de laborator asupra energiei valurilor 573

V. N. CONSTANTINESCU, S. GĂLEŢUŞE, P. MARINESCU, Studiul proprietăţilor aerodinamice ale unor profile flexibile 587

DAN GH. IONESCU, O mişcare lentă creată de dipolul plan 600

RECENZIE 602

INDEX ALFABETIC 604

St. Cerc. Mec. Apl., Tom 43, Nr. 5—6, 1984, P. 411—606

ACAD. PROF. DUMITRU T. DUMITRESCU

ACADEMICIANUL PROFESOR DUMITRU T. DUMITRESCU

Reputatul profesor și om de știință Dumitru T. Dumitrescu, membru al Academiei R. S. România, a încetat din viață. Mecanica fluidelor, hidraulica românească, la a căror formare și dezvoltare a avut un rol determinant, suferă o grea pierdere.

Născut la 7 septembrie 1904 în Buftea — Ilfov, urmează Liceul „Gheorghe Lazăr" din București, după care se înscrie simultan la Școala Politehnică și Universitatea din București. După absolvire, pentru amplificarea calităților evidențiate în educația sa, pleacă la Paris în anul 1930, urmînd cursurile la Ecole Supérieure d'Electricité, ca elev al profesorului P. Janet, absolvind totodată și Ecole d'Aéronautique. Își continuă studiile în Germania, la Göttingen, ca elev al celebrului profesor Ludwig Prandtl sub conducerea căruia susține teza de doctorat „Strömung an einer Luftblase in senkrechten Rohr" (Curgerea unei bule de aer într-un tub vertical). Este prima lucrare în care se determină, prin procedee deosebit de riguroase, viteza ascensională a unei bule de aer într-un tub vertical plin cu lichid, devenită clasică și citată în diferite lucrări de prestigiu. La Universitatea din Göttingen între anii 1937-1940 este angajat în calitate de cadru didactic, unde conduce lucrări practice și suplinește cursuri.

Revenind în țară, în anul 1940, activează, pînă în anul 1941, la Atelierele de construcții de avioane din București, după care continuă să lucreze la Industria aeronautică română din Brașov, pînă în anul 1944.

Activitatea didactică în țară a început-o ca asistent al profesorului Dionisie Germani, la Catedra de hidraulică, din cadrul Școlii Politehnice București, în anul 1943 devenind conferențiar la Facultatea de Construcții, unde predă cursul de Hidrodinamică plană. În continuare, între anii 1949—1950 a predat cursurile de Hidraulică, Mașini hidraulice și de Mecanica fluidelor, devenind profesor în anul 1951, la Institutul de Construcții București. În același timp a continuat activitatea de profesor la Institutul Politehnic București, unde este numit șeful Catedrei de hidraulică și mașini hidraulice pe care o conduce pînă în anul 1974. De asemenea, a fost profesor la Universitatea din București, Institutul de Mine din București și la Academia militară tehnică, fiind fondatorul școlii moderne de hidraulică în țara noastră.

În cadrul instituțiilor de învățămînt superior în care a activat și a avut mai mult de 15 000 studenți a depus o amplă activitate de înființare a laboratoarelor de hidraulică și de modernizare a procesului de învățămînt. Cadru didactic de înalt prestigiu, a desfășurat timp de aproape 35 de ani una dintre cele mai strălucite activități didactice din învățămîntul universitar românesc, caracterizată printr-un desăvîrșit spirit pedagogic,

St. cerc. mec. apl., tom 43, nr. 5—6, 1984, p. 413—421

deosebită inițiativă, sistematizare și sintetizare a modurilor de abordare și rezolvare a problemelor tehnico-științifice.

În paralel cu activitatea didactică a desfășurat o intensă și prodigioasă muncă de cercetare științifică dezvoltînd școala de hidraulică românească, recunoscută astăzi pe plan mondial.

Conducînd secția de hidromecanică a Institutului de mecanică aplicată al Academiei R. S. România creează colective largi de cercetare cu aport remarcabil, în afirmarea științei românești. În această perioadă fructuoasă de cercetare științifică orientează știința pură spre aplicații practice în direcția dezvoltării economiei naționale : în acest sens introduce în mod organizat studiul și încercarea hidraulică pe modele, aducînd contribuții importante la teoria similitudinii și a modelării, de exemplu pentru amenajările Paroșeni, Bicaz, Sadu-Sibiu, Păuliș-Mureș, Săvinești etc. în colaborare cu prof. dr. ing. Constantin Iamandi. De asemenea, are importante contribuții în studiul mișcării cu suprafață liberă a fluidelor grele, introducînd folosirea metodei rețelelor în colaborare cu prof. dr. Vasile Ionescu și în hidrodinamica fluidelor cu mare vîscozitate în colaborare cu prof. dr. ing. M. D. Cazacu.

Sub directa îndrumare a academicianului Dumitru Dumitrescu, cercetarea efectuată la Catedra de hidraulică și mașini hidraulice a Institutului Politehnic s-a dezvoltat în mai multe domenii. Astfel, în domeniul mecanicii fluidelor teoretice și aplicate, menționăm : studiul stabilității mișcării fluidelor; problema bilocală asociată ecuației Orr-Sommerfeld; studierea elementelor fluidice pe baza utilizării analogiei între curgerea sub presiune a unui fluid compresibil și curgerea cu suprafață liberă a unui fluid incompresibil; studiul hidraulic al fenomenelor laminare și turbulente care apar în acționările hidraulice și pneumatice; sisteme noi pentru aerarea apei uzate; cercetări teoretice și experimentale asupra mișcării bifazice în conducte circulare sub presiune cu aplicații practice. În domeniul hidroenergeticii și al stațiilor de pompare, se menționează : optimizarea și perfecționarea manevrării evacuatorilor de ape mari la amenajările hidroenergetice; cercetări asupra transportului de debit solid și al sedimentării în lacurile de acumulare; optimizarea exploatării hidroenergetice a sistemelor de centrale hidroelectrice; studii și cercetări privind funcționarea unor stații de pompare pentru irigații.

Studiile teoretice și experimentale efectuate de academicianul Dumitru Dumitrescu și colaboratorii săi din cadrul Academiei R. S. România, Institutului Politehnic, Institutului de Construcții, Universității București etc. reflectă o preocupare permanentă pentru rezolvarea problemelor ridicate de producție, pentru progres tehnic, cooperare științifică și competitivitate pe plan internațional.

Academicianul Dumitru Dumitrescu are peste 170 de lucrări științifice, tehnice și cultural-filozofice publicate, remarcîndu-se prin contribuții originale, de valoare, fapt pentru care în anul 1955 a fost numit membru corespondent al Academiei, la secția de științe tehnice, iar în anul 1963 membru titular.

Împreună cu colaboratorii săi apropiați, Constantin Iamandi și Vasile Ionescu, a obținut Premiul de stat, în anul 1962, pentru lucrările privind

studiul teoretic și experimental al mișcării lichidelor cu suprafață liberă cu importantă aplicație la captarea Paroșeni.

Dovedind un real spirit organizatoric și competență în rezolvarea problemelor de cercetare științifică, între anii 1963—1967 a fost secretar prim al Academiei R. S. România.

Academicianul Dumitru Dumitrescu a participat la numeroase manifestări tehnico-științifice în străinătate, cu diferite comunicări științifice sau conferințe în: U.R.S.S., S.U.A., Anglia, Franța, R.F.G., R.D.G., R.S. Cehoslovacia, Polonia, Italia, Olanda, R. P. China, Grecia, Turcia, Japonia etc., apreciate și remarcate în publicațiile de specialitate. În anul 1966 a fost ales membru corespondent al Academiei de Știință și Artă din Toulouse, Franța.

Menționăm participarea academicianului Dumitru Dumitrescu la diferite organisme interne și internaționale, de exemplu: Asociația internațională de cercetări hidraulice, PAGWASH, Comitetul național de luptă pentru pace, Asociația oamenilor de știință din R. S. România etc. cu un aport deosebit, care a sporit reputația marii sale personalități.

Pentru întreaga sa activitate didactică, științifică și obștească a fost distins cu diferite ordine, medalii și diplome de onoare ale R. S. România.

Academicianul Dumitru Dumitrescu, cadru didactic de prestigiu al învățământului superior, strălucit fiu al poporului nostru, a reprezentat o conștiință pregnantă a vieții spirituale românești, cu o puternică influență asupra științei și tehnicii contemporane.

Entuziast și profund om de știință, a orientat afirmarea tinerelor talente în spiritul înaltelor principii ale datoriei și intransigenței profesionale, în spiritul conturării esențialului în activitate. A format și perfecționat numeroase generații de specialiști, ingineri, profesori, cercetători care-i continuă opera cu rezultate considerabile la dezvoltarea hidraulicii românești.

Talent didactic desăvîrșit, prezență vie, creatoare, a insuflat elevilor săi dragostea pentru știință, dăruirea fără preget pentru marile realizări ale tehnicii, constituind un exemplu strălucit pentru oamenii de știință. De un înalt patriotism, prin munca și activitatea sa a avut un aport plenar la realizarea marilor obiective ale României de azi, la afirmarea noastră tehnico-științifică peste hotare.

Slujitor devotat al științei și învățământului, cu activitate continuă și fecundă, cu importante realizări a reprezentat un simbol al valorii. Dovedind o vastă cultură, cu o bogată și variată experiență didactică, tehnică și științifică, cu o puternică personalitate, a fost în admirația noastră, a tuturor, părinte spiritual al multor generații de specialiști.

Prezența sa tehnico-științifică va rămîne în istoria tehnicii românești, în mecanica fluidelor pentru care a manifestat o deosebită pasiune.

Cu profundă durere, cu amintiri care ne copleșesc, aducem un omagiu celui care a contribuit la afirmarea științei și tehnicii românești, dăruindu-și fără odihnă anii, elocința și talentul său creator.

CONSTANTIN IAMANDI

STUDII UNIVERSITARE

— Doktor der Naturwissenschaften (Göttingen — Germania).
— Doctor docent în ştiinţe tehnice (Ministerul Învăţământului, Bucureşti).
— Inginer diplomat (Institutul Politehnic, Secţia Mine, Bucureşti).
— Inginer diplomat (Ecole Supérieure d'aéronautique, Paris).
— Inginer diplomat (Ecole Supérieure d'éléctricité, Paris).
— Licenţiat în matematici (Universitatea Bucureşti).
— Licenţiat în litere şi filozofie (Universitatea Bucureşti).
— Licenţiat în drept (Universitatea Bucureşti).

TITLURI ŞI FUNCŢIUNI

— Secretar Prim al Academiei R. S. România (1963—1967).
— Membru titular al Academiei R. S. România.
— Membru corespondent al Academiei de Ştiinţă şi Artă din Toulouse, Franţa.
— Profesor de Hidraulică la Institutul Politehnic din Bucureşti (1941—1974).
— Şeful catedrei de Hidraulică şi Maşini Hidraulice din Institutul Politehnic din Bucureşti.
— Şeful secţiei de Hidraulică din Institutul de Mecanică Aplicată al Academiei R. S. România.
— Membru în Comitetul de Conducere al A.I.R.H. (Association Internationale de Recherche Hydraulique), Delft, Olanda.
— Vice-Preşedinte al Comitetului Naţional al Deceniului Hidrologic Internaţional al U.N.E.S.C.O., Bucureşti.
— Raportor general al Congresului A.I.R.H., Kyoto, Japonia, 1969.
— Membru al Societăţii G.A.M.M.A. (Geselschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik), R. F. Germania.
— Preşedintele Comitetului de Lupă pentru Pace al Municipiului Bucureşti.
— Membru în Comitetul Naţional al Luptei pentru Pace.

DISTINCŢII ŞI PREMIERI

— Om de Ştiinţă Emerit.
— Premiul de Stat.
— La Medaille d'Argent de la Recherche et de l'Invention de l'Académie de Toulouse.
— Premiat de două ori de Ministerul Învăţământului pentru activitate ştiinţifică.

DECORAŢII (ORDINE ŞI MEDALII)

ORDINE

— Ordinul Meritul Ştiinţific, Clasa I.
— Ordinul Muncii, Clasa a II-a.

— Ordinul Steaua Republicii Populare Române, Clasa a III-a.
— Ordinul Tudor Vladimirescu, clasa a III-a.
— Ordinul Muncii, Clasa a III-a.

MEDALII

— Medalia : *30 de ani de la Eliberarea României de sub Dominația Fascistă.*
— Medalia : *A 50-a Aniversare a Partidului Comunist Român.*
— Medalia : *In Cinstea Incheierii Colectivizării Agriculturii.*
— Medalia : *25 de ani de la Proclamarea Republicii.*
— Medalia : *A 20-a Aniversare a Eliberării Patriei.*

ARTICOLE ȘI MANUALE TEHNICO-ȘTIINȚIFICE

1. *Strömung an einer Luftblase im senkrechten Rohr*, Z.A.M.M. Bd. 23, 1943. Germania. Teza de doctorat.
2. *K voprosu ob Osesimetricinîh dvijeniah jidkostei*, Docladî Academii Nauk, **123**, *6* (1958), U. R. S. S.
3. *O nestationarnom odnomernom tecenii viaskoi jidkosti*, Isvestia Academii Nauk, *3* (1958), U. R. S. S.
4. *Sur le mouvement lent et permanent d'un fluide visqueux incompressible*, Comptes rendus Acad. des sciences, **246** (1958) Franța.
5. *Courbes caractéristiques des déversoire*, Comptes rendus. Acad. des sciences, **246** (1958), Franța.
6. *Sur le mouvement créé par un tube tourbillon de dimensions finis*, Rozpravy Ceskoslovenské Acad. ved. 1954, C. S. R.
7. *Sur le mouvement axial symetriques*, Congresul VII. AIRH. Lisabona, 1957, Portugalia.
8. *Sur le mouvement par dessus les réservoirs à mince paroi*, În colab. V. Ionescu, Congresul IX, AIRH, Dubrovnik, 1961, Iugoslavia.
9. *Contributions à l'etudes des mouvements lents et rapides*, În colab. V. Ionescu, Congresul IX, AIRH, Dubrovnik, 1961, Iugoslavia.
10. *Corelation existente entre la construction des barrages et les inondations en régime rapide*, În colab., C. Iamandi, C. Iancu. Congresul X, AIRH, Londra 1963, Anglia.
11. *L'instabilité de l'ecoulement dans les chambres d'aspiration*, În colab. C. Iamandi, C. Iancu, 8-émes journ. de l'hydraulique. S. H. F. Lille, 1964, Franța.
12. *Solutions numériques et recherches expérimentales dans l'hydrodynamique des fluides visqueux, à de nombres de Reynolds petits*, În colab. M. Cazacu, C. Crăciun. Congresul XI, IUTAM, München, 1964, R. F. Germania.
13. *Les particularités des courants à grand vitesses dans le cas de l'amenajement des torents*, În colab. C. Iamandi, C. Iancu. Congresul XI, A. I. R. H., Leningrad, 1965, U. R. S. S.
14. *Ein neues Cystosfincterometer*, În colab. C. Iamandi, Gh. Olănescu, M. Streja, Rev. de Mec. Appl., **III** *3* (1958).

MŰSZAKI EGYETEM 1848 KÖNYVTÁR

15. *Teoreticeskie i experimentalnîe issledovania dvijenia cerez vodoslivî.* În colab. V. Ionescu, C. Iancu, Rev. de Mec. Appl., **IV**, *2* (1959).
16. *Numerical Methods for studyng the axial symmetrical motion of ideal fluids*, În colab., D. Ionescu, Rev. de Mec. Appl., **IV**, *3* (1959).
17. *Uber die Bewegung unendlichen Uberfallstrahls in sencrechter Ebene.* În colab. V. Ionescu, Rev. de Mec. Appl., **V**, *3*, (1960).
18. *Die Strömung schwerer Flüssigkeiten mit freien Oberfläche in senkrechter Ebene*, În colab. V. Ionescu, C. Crăciun, Rev. de Mec. Appl., **V**, *4* (1960).
19. *Etude unitaire de mouvement des fluides pesants à surface libre*, În colab. V. Ionescu, C. Crăciun, Rev. de Mec. Appl., **VII**, *3*, (1962).
20. *Contribution à l'etude des déverssoirs en mince paroi.* În colab. C. Iancu, Rev. de Mec. Apll., **VII**, *2* (1962).
21. *Study of the spillway used in engineering works for the correction of torrents*, În colab. C. Iamandi, C. Iancu, Rev. de Mec. Appli., **III**, *4* (1964).
22. *Primenenie metoda setok pri izuzenii dvijenia tiajolîh jidcostei so svobodnoi poverhnostiu*, În colab. V. Ionescu, R. Toth, Journal, „Prikladnoi mehaniki", **I**, *2* (1956).
23. *Contribution à l'étude des mouvements des fluides pesants a surface libre*, Revue de Mec. Appl., **1**, *1* (1956).
24. *Quelle und Senke im Kreisrohr*, Mit. der. techn. Hochschule, Bucureşti, **XV**, *4* (1944).
25. *Auftrieb und Widerstand für mit u. R. Reynoldsche Zahlen*, Mit. der. techn. Hochschule, Bucureşti, **XV**, *3* (1942).
26. *Determinarea coeficientului de contracţie la ajutajele cilindrice*, Com. Acad. R. P. R., **IV**, *4*, (1952).
27. *O soluţie exactă a sistemului de ecuaţii diferenţiale Navier Stokes, pentru fluidele grele cu suprafaţă liberă*, Mit. der. techn. Hochschule, Bucureşti, IV, *4* (1954).
28. *Distribuţia vitezelor în mişcarea turbulentă a unui lichid greu cu suprafaţă liberă*, Com. Academiei, **IV**, *11* (1954).
29. *Asupra mişcării turbulente a unui fluid vîscos incompresibil între două plăci paralele infinite*, Com. Academiei, **VIII**, *5* (1958).
30. *Metode numerice în studiul scurgerii peste deversoare*, În colab. V. Ionescu, Com. Academiei **VIII**, *4* (1958).
31. *Domeniul de valabilitate al curbelor caracteristice la deversoarele cu muchie ascuţită*, În colab. C. Iancu, Com. Academiei, **X**, *3* (1960).
32. *Comportarea lamelor deversante în vecinătatea punctului de detaşare*, În colab. V. Ionescu, Com. Academiei, **X**, *3* (1960).
33. *Contribuţii la studiul mişcării fluidelor grele peste deversoare cu muchie ascuţită*, În colab. V. Ionescu, C. Crăciun, Com. Academiei, **X**, *3* (1960).
34. *Studiul mişcării fluidelor grele deversante într-un plan vertical*, În colab. V. Ionescu, Com. Academiei, **X**, *3* (1960).
35. *Mişcarea fluidelor grele deversante într-un plan vertical*, În colab. V. Ionescu, C. Crăciun, St. cerc. mec. apl., **XI**, *3* (1960).
36. *Studiul mişcării lamelor deversante infinite, într-un plan vertical*, În colab. V. Ionescu, St. cerc. mec. apl., **XI**, *2* (1960).

37. *Metode numerice pentru studiul mișcărilor axial-simetrice ale fluidelor perfecte.* În colab. D. Ionescu, St. cercet. mec. aplic., **IX**, *4* (1958).
38. *Contribuții teoretice și experimentale la studiul mișcării peste deversoare*, În colab. V. Ionescu, C. Iancu, St. cer. mec. apl., **IX**, *3* (1958).
39. *Studii asupra disipatoarelor de energie așezate în serie*, În colab. St. Zarea, R. Toth, St. cerc. mec. apl., **V**, *3—4* (1954).
40. *Studii și încercări pe modele de descărcători de ape mari*, În colab P. Georgescu. St. cerc. mec. apl., **V**, *4* (1954).
41. *Asupra mișcării turbulente într-o conductă circulară netedă*, În colab. D. Ionescu, St. cerc. mec. apl., **VI**, *3* (1955).
42. *Aplicarea metodelor rețelelor la studiul fluidelor grele cu suprafață liberă*, În colab. V. Ionescu, R. Toth, St. cerc. mec. apl., **VI**, *3* (1955).
43. *Contribuții la studiul deversoarelor cu muchie ascuțită*, În colab. C. Iancu. St. cerc. mec. apl., *6* (1961).
44. *Cercetări asupra canalelor cu evacuare laterală*, În colab. C. Iamandi, D. Ionescu, St. cerc. mec. apl., **XII**, *6* (1961).
45. *Studiul unitar al mișcării fluidelor grele cu suprafață liberă*, În colab. V. Ionescu, C. Crăciun, St. cerc. mec. apl., **XIII**, *2* (1962).
46. *Studiul deversorului folosit la lucrările de amenajarea torenților*, În colab. C. Iamandi, C. Iancu, St. cerc. mec. apl., *3* (1964).
47. *Aplicarea metodei diferențelor finite la studiul problemelor de mecanica fluidelor*, În colab. V. Ionescu. Sesiunea științifică jubiliară I. M. A., 1960.
48. *Contribuții la studiul mișcării fluidelor grele cu suprafață liberă*, În colab. C. Crăciun, C. Iancu, Sesiunea științifică jubiliară I. M. A. 1960.
49. *Contribuții la teoria încercărilor pe modele în hidraulică*, Sesiunea științifică jubiliară I. M. A., 1960.
50. *Studiul teoretic și experimental al scurgerii lichidelor reale prin labirinții turbomașinilor hidraulice*, În colab. M. Cazacu. Conferința de mașini hidraulice, Timișoara, 1964.
51. *Contributions à l'études des fluides pesants* à *surface libre*, Academia Cehoslovacă, 1954. R. S. C.
52. *Le mouvement d'un fluide pesant à double surface libre*, În colab. V. Ionescu. Al. IV-lea Congres al matematicienilor români. Lucrările Congresului. Edit. Academiei R. P. R., 1960.
53. *Asupra mișcării turbulente a unui fluid vîscos incompresibil între două plăci paralele infinite*, Comunicările Academiei, **VIII**, *5* (1958).
54. *Mișcarea fluidului vîscos în lungul unei plăci plane la numere Reynolds mici*, În colab. C. Crăciun., St. cerc. mec. apl., **23**, *3* (1969).
55. *Le rôle et les performances, des calculateurs dans l'integration numerique des équations Navier-Stokes*, În colab. M. Cazacu, G. Martin, H. Oprică. Bull. Math. de la Soc. math. de la R. S. România, 1968.
56. *Dezlocuirea negravitațională a două fluide nemiscibile într-un mediu poros* (I). În colab. I. Seteanu. St. cerc. mec. apl., **27**, *6* (1968).
57. *Displacement of fluids through nonhomogeneous porous media*, În colab. V. Ionescu. Proc. Congr. XIII A. I. R. H., Kyoto, 1969, Japonia.

58. *Dezlocuirea plană negravitațională a două fluide nemiscibile într-un mediu poros (II)*, În colab. I. Seteanu. St. cerc. mec. apl., **28**, *1* (1969).
59. *Mișcarea plană a fluidului vîscos într-un domeniu simplu conex nemărginit*, În colab. I. Seteanu. St. cerc. mec. apl., **28**, *2* (1969.)
60. *Les séries dans l'étude du fluide visqueux*, În colab. I. Seteanu. Rev. Mec. Appl., **14**, *3* (1969).
61. *L'étude de l'écoulement d'un fluide pesant a surface libre d'un réservoir symetrique*, În colab., I. Seteanu, Rev. de mec. appl., **17**, *2* (1972).
62. *Die Strömung schwerer Flüssigkeiten mit freier oberfläche in senkrechter Ebene*, În colab., V. Ionescu, C. Crăciun, Rev. mec. appl., **V**, *4* (1960).
63. *Teoretische und experimentelle Betrachtungen über die Strömung zäher Flüssigkeiten um eine Platte bei kleinen und mittleren Reynoldszahlen*, În colab. M. Cazacu, Z. A. M. M., **50** (1970), Germania.
64. *K izuceniu dvijenia tiajelîh jidcostei so svobodnoi poverhnostiu*, Jurnal pricladnoi mehaniki, **1**, *1* (1956).
65. *Die Anwendung des differenzverfahrens zum studium der Bewengung schwerer flüssigkeiten mit freier oberfläche*, În colab. V. Ionescu, R. Toth. Rev. de mec. appl., **I**, *2* (1956).
66. *Theoretisches und experimentelles studium der strömung reeler flüssigkeiten durch die abdichtungslabyrinthe der strömungsmaschinen* (II), În colab. M. Cazacu, Mitt. d. konf. für Wass, sept. 1964, R. S. România.
67. *Contribuții la studiul curgerii turbulente în vecinătatea unui perete plan*, În colab. I. Seteanu. St. cerc. mec. apl., **31**, *3* (1972).
68. *Dicționar ilustrat de construcții și arhitectură* (coordonator științific), Editura tehnică, București, 1973.
69. *Dicționar tehnic român-englez* (coordonator științific), Edit. tehnică, București, 1970.
70. *Dicționar tehnic englez-român* (coordonator științific), Edit. tehnică București, 1976.
71. *Dicționar tehnic francez-român* (coordonator științific), Edit tehnică, București, 1969.
72. *Dicționar poliglot, construcții, materiale de construcții și hidrotehnică* (engleză, română, germană, franceză, rusă) (coordonator științific), Edit. tehnică, București, 1979.
73. *Manualul inginerului hidrotehnician*, Vol. I (coordonatorul științific al lucrării și autor), Edit. tehnică, București, 1969.
74. *Manualul inginerului hidrotehnician*, Vol. II (coorodonatorul științific al lucrării și autor), Editura tehnică, București, 1970.
75. *Manualul inginerului*, Vol. 2 (coautor și coordonator științific), Edit. tehnică, București, 1966.

NOTE ȘI STUDII CULTURAL-FILOZOFICE

76. *Tehnica și știința în construcția comunistă*, Contemporanul, 11 aug. (1961).
77. *Filozofia și tehnica*, Contemporanul, 29 sept. (1961).
78. *Concepții reacționare despre tehnică*, Contemporanul, 17 iulie (1959).
79. *Un drum de necontestate succese*, Veac Nou, 22 aug. (1963).

80. *Largi perspective deschise cercetării ştiinţifice*, Scînteia, 22 august (1963).
81. *Cîmp larg capacităţii de creaţie*, Scînteia, 8 iunie (1965).
82. *Ştiinţa românească pe meridianele lumii*, Contemporanul, Nr. *1*, ian. (1965).
83. *Perspectivele cercetării ştiinţifice în România Socialistă*, Contemporanul, nr. *1*, 20 aug. (1965).
84. *Une académie centenaire*, La Roumanie d'aujourd'hui Nr. *9* Sep. (1966).
85. *Inovaţie şi gîndire ştiinţifică*, Contemporanul, 18 febr. (1972).
86. *Le rôle spécial des savants*, Le XX-e siècle et la paix. Nr. *1*, ian. (1972).
87. *Valoarea metodologică a matematicii. Materialismul dialectic şi ştiinţele contemporane ale naturii*. Vol. IV, Edit. pol. (1964).
88. *Les mathématiques et le progrès technique*. Etudes d'historie et de philosophie des sciences, Edit. Academiei, 1960.
89. *Unele aspecte ale hidraulicii moderne*, Memoriile sec. ştiinţifice. Edit. Academiei, Seria IV, **II** (1979).
90. *De la valeur méthodologique des mathématiques*, L'homme et la société contemporaine. Edit. Academiei, Bucureşti, 1963.
91. *Critica concepţiilor reacţionare despre rolul tehnicii*, 50 de ani de la apariţia operei lui V. I. Lenin „Materialism şi empiriocriticism".
92. *Direcţiile principale ale progresului tehnic în construcţia desfăşurată a comunismului*, Cercetări filozofice, *3*, anul **IX** (1962) Edit. Academiei.
93. *Aerodinamicianul Elie Carafoli*, Analele Academiei R. S. România, 1982.
94. *Mecanicianul Caius Iacob*, Analele Academiei R. S. România, 1982.
95. *Electricianul Dimitrie Leonida*, Rev. Noesis (1983).
96. *Hidraulicianul Cristea Mateescu, Răspuns la discuscul de recepţie*, Academia R. S. România, Discursuri de recepţie. Seria nouă *15*.

ASUPRA GENERALIZĂRII TEOREMEI LUI LAZARE CARNOT ÎN CAZUL CIOCNIRII A DOUĂ SOLIDE RIGIDE LIBERE

de CAIUS IACOB

O problemă principală a mecanicii ciocnirilor este aceea a ciocnirii a două corpuri solide rigide. În cele ce urmează vom relua această problemă pentru a stabili o generalizare a teoremei lui Lazare Carnot privind pierderea de energie cinetică datorită ciocnirii. În tratatele clasice de mecanică generală pe care le-am consultat [1] – [17], nu figurează o astfel de extindere nici chiar în cazul particular al ciocnirii centrice. O relație analogă cu acea pe care o vom stabili (3.3) figurează în tratatele lui E. J. Routh [1] și G. K. Suslov [2], dar ea este stabilită în alte condiții și numai pentru sisteme de puncte materiale. A se vedea de asemenea tratatul lui J. Pérès [10].

1. ECUAȚIILE MECANICII CIOCNIRILOR

Fie solidele rigide S_1 și S_2 libere, în mișcare sub acțiunea unor forțe date, care se ciocnesc la momentul t în punctul A. Vom nota prin G_1 și G_2 centrele lor de masă, prin A_1 și A_2 punctele lor care ajung în contact în A, prin $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$ vitezele lor de rotație instantanee la momentul t înainte de șoc, prin $\vec{V}_{A_1}$, $\vec{V}_{A_2}$, $\vec{V}_{G_1}$, $\vec{V}_{G_2}$ vitezele punctelor A_1, A_2, G_1, G_2 la acel moment, mișcările fiind raportate la același reper $Oxyz$ considerat fix. În punctul de contact A este aplicată percusiunea $\vec{P}_{12}$ exercitată de S_2 asupra lui S_1 și, de asemenea, percusiunea $\vec{P}_{21}$ exercitată de S_1 asupra lui S_2.

Conform axiomelor mecanicii ciocnirilor, avem

$$\vec{P}_{12} + \vec{P}_{21} = 0, \tag{1.1}$$

vectorii $\vec{P}_{12}$ și $\vec{P}_{21}$ având ca suport normala comună în punctul A la suprafețele care limitează solidele S_1 și S_2, dacă se neglijează frecarea. S-a presupus că suprafețele considerate au un plan tangent comun în punctul A. Vom nota prin $\vec{n}$ versorul normalei la acest plan; $\vec{n}$ se presupune orientat de la S_1 spre S_2. Avem

$$\vec{P}_{21} = P\vec{n}, \qquad \vec{P}_{12} = -P\vec{n}, \quad \text{cu} \qquad P > 0. \tag{1.2}$$

Vitezele punctelor A_1 și A_2 care ajung în contact în A, la momentul t, sînt date de

$$\begin{aligned} \vec{V}_{A_1} &= \vec{V}_{G_1} + \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{G_1A}, \\ \vec{V}_{A_2} &= \vec{V}_{G_2} + \vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{G_2A}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Ciocnirea are loc în intervalul de timp foarte scurt (t, t') care comportă o fază de comprimare (t, t'') și o fază de dilatare (t'', t'), cu $t < t'' < t'$. Notînd percusiunile din aceste faze prin $\vec{P}_{ij}^{(c)}$ și $\vec{P}_{ij}^{(d)}$, cu $i, j = 1, 2$, $(i \neq j)$, avem

$$\vec{P}_{ij} = \vec{P}_{ij}^{(c)} + \vec{P}_{ij}^{(d)} = P_{ij}^{(c)}\vec{n} + P_{ij}^{(d)}\vec{n}, \tag{1.4}$$

deci

$$\vec{P}_{21} = P\vec{n} = (P^{(c)} + P^{(d)})\vec{n} = P^{(c)}(1 + k)\vec{n}, \tag{1.5}$$

unde s-a notat

$$P_{21}^{(c)} = P^{(c)}, \quad P_{21}^{(d)} = P^{(d)}, \quad P^{(c)} > 0, \quad P^{(d)} > 0, \tag{1.6}$$

$$k = \frac{P^{(d)}}{P^{(c)}}. \tag{1.7}$$

Coeficientul adimensional k se numește *coeficient de restituire*. Se admite că el este cuprins în intervalul $[0, 1]$ și depinde numai de natura corpurilor în contact. În cazul ciocnirii elastice avem $k = 1$, iar în acela al ciocnirii plastice, $k = 0$.

Conform axiomelor mecanicii ciocnirilor, pozițiile solidelor, S_1 și S_2, sînt presupuse invariabile în scurtul interval al coliziunii, însă vitezele suferă salturi. Vom nota prin $\vec{V}''_{G_j}$, $\vec{V}'_{G_j}$, $\vec{V}''_{A_j}$, $\vec{V}'_{A_j}$, vitezele punctelor G_j, A_j $(j = 1, 2)$ la momentele t'' și t', prin $\vec{\omega}''_j$ și $\vec{\omega}'_j$ vitezele instantanee de rotație ale lui S_j la aceste momente.

Să notăm prin $\vec{K}_{G_j}(S_j)$, $\vec{K}''_{G_j}(S_j)$, $\vec{K}'_{G_j}(S_j)$ momentele cinetice ale lui S_j față de polul $G_j (j = 1, 2)$, la momentele t, t'', t', mișcările solidelor S_j fiind raportate la reperul fix $Oxyz$.

Conform axiomelor mecanicii ciocnirilor, a se vedea de exemplu [3], [4], notînd prin M_j masa lui $S_j (j = 1, 2)$, avem ecuațiile

$$M_1(\vec{V}'_{G_1} - \vec{V}_{G_1}) = \vec{P}_{12}; \qquad M_2(\vec{V}'_{G_2} - \vec{V}_{G_2}) = \vec{P}_{21}, \tag{I}$$

$$\vec{K}'_{G_1}(S_1) - \vec{K}_{G_1}(S_1) = \overrightarrow{G_1A} \times \vec{P}_{12}; \quad \vec{K}'_{G_2}(S_2) - \vec{K}_{G_2}(S_2) = \overrightarrow{G_2A} \times \vec{P}_{21}$$

pentru intervalul total (t, t') al coliziunii. La fel avem ecuațiile

$$M_1(\vec{V}''_{G_1} - \vec{V}_{G_1}) = \vec{P}_{12}^{(c)}; \qquad M_2(\vec{V}''_{G_2} - \vec{V}_{G_2}) = \vec{P}_{21}^{(c)}, \tag{II}$$

$$\vec{K}''_{G_1}(S_1) - \vec{K}_{G_1}(S_1) = \overrightarrow{G_1A} \times \vec{P}_{12}^{(c)}; \quad \vec{K}''_{G_2}(S_2) - \vec{K}_{G_2}(S_2) = \overrightarrow{G_2A} \times \vec{P}_{21}^{(c)}$$

pentru intervalul (t, t'') de compresiune, și

$$M_1(\vec{V}'_{G_1} - \vec{V}''_{G_1}) = \vec{P}^{(d)}_{12}; \qquad M_2(\vec{V}'_{G_2} - \vec{V}''_{G_2}) = \vec{P}^{(d)}_{21}, \tag{III}$$

$$\vec{K}'_{G_1}(S_1) - \vec{K}''_{G_1}(S_1) = \overrightarrow{G_1A} \times \vec{P}^{(d)}_{12}; \qquad \vec{K}'_{G_2}(S_2) - \vec{K}''_{G_2}(S_2) = \overrightarrow{G_2A} \times \vec{P}^{(d)}_{21}$$

pentru intervalul (t'', t') de destindere.

Momentul t'' care separă intervalele de compresiune și destindere este acela pentru care proiecția pe normala $\vec{n}$ a vitezei relative $\vec{V}''_{A_1} - \vec{V}''_{A_2}$ este nulă. Avem deci

$$(\vec{V}''_{A_1} - \vec{V}''_{A_2})\vec{n} = 0. \tag{IV}$$

În virtutea lui (1.3), această condiție se mai scrie sub forma

$$(\vec{V}''_{G_1} - \vec{V}''_{G_2})\vec{n} + (\vec{\omega}''_1, \overrightarrow{G_1A}, \vec{n}) - (\vec{\omega}''_2, \overrightarrow{G_2A}, \vec{n}) = 0, \tag{V}$$

unde ultimele două paranteze reprezintă produsele mixte ale vectorilor considerați.

Din ecuațiile fundamentale (I), (II) și (III), în virtutea lui (1.1) și (1.5) se deduc, respectiv, prin adunări sau scăderi, următoarele relații:

$$\vec{V}'_{G_j} - \vec{V}_{G_j} = (-1)^j \frac{P^{(c)}}{M_j}(1 + k)\vec{n} \qquad (j = 1, 2), \tag{1.8}$$

$$\vec{K}'_{G_j}(S_j) - \vec{K}_{G_j}(S_j) = (-1)^j P^{(c)}(1 + k)(\overrightarrow{G_jA} \times \vec{n}) \quad (j = 1, 2), \tag{1.9}$$

$$2\vec{V}''_{G_j} - (\vec{V}_{G_j} + \vec{V}'_{G_j}) = (-1)^j \frac{P^{(c)}}{M_j}(1 - k)\vec{n} \qquad (j = 1, 2), \tag{1.10}$$

$$2\vec{K}''_{G_j}(S_j) - [\vec{K}_{G_j}(S_j) + \vec{K}'_{G_j}(S_j)] = (-1)^j P^{(c)}(1 - k)(\overrightarrow{G_jA} \times \vec{n}) \quad (j = 1, 2). \tag{1.11}$$

Prin eliminarea produselor vectoriale ($\neq 0$) ce figurează în (1.9) și (1.11), se obține din aceste relații

$$\vec{K}''_{G_j}(S_j) = \frac{k}{1+k}\vec{K}_{G_j}(S_j) + \frac{1}{1+k}\vec{K}'_{G_j}(S_j), \quad (j = 1, 2). \tag{1.12}$$

Să notăm de asemenea că din (1.8) și (1.10) se deduce la fel

$$\vec{V}''_{G_j} = \frac{k}{1+k}\vec{V}_{G_j} + \frac{1}{1+k}\vec{V}'_{G_j} \qquad (j = 1, 2). \tag{1.13}$$

2. EXPRESIA ENERGIEI CINETICE TOTALE PIERDUTE PRIN CIOCNIRE

Se știe că pentru un solid rigid aflat în mișcare față de reperul $Oxyz$ și pentru care rotația instantanee este $\vec{\omega}$, iar viteza centrului de masă G este $\vec{V}_G$, expresia energiei cinetice $\mathscr{E}$ este dată de

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2} M\vec{V}_G^2 + \frac{1}{2}\vec{K}_G\vec{\omega}, \tag{2.1}$$

unde M este masa totală a solidului, iar $\vec{K}_G$ este momentul său cinetic față de polul G. Momentul cinetic $\vec{K}_G$ din mișcarea față de reperul $Oxyz$ este egal cu momentul cinetic față de polul G în mișcarea relativă a solidului față de reperul $Gxyz$ cu axele paralele cu axele reperului $Oxyz$ [18]. Avem deci

$$\vec{K}_G = \vec{\vec{I}}_G(S)\vec{\omega}, \tag{2.2}$$

unde $\vec{\vec{I}}_G(S)$ este tensorul de inerție al solidului în punctul G. După cum se știe, tensorul de inerție este un tensor simetric.

Avem

$$\vec{K}_G\vec{\omega} = \vec{\omega}[\vec{\vec{I}}_G(S)\vec{\omega}] = [\vec{\omega}\vec{\vec{I}}_G(S)]\vec{\omega} = \vec{\omega}\vec{\vec{I}}_G(S)\vec{\omega}. \tag{2.3}$$

Să notăm prin E și E' energiile cinetice totale ale sistemului material format din solidele S_1 și S_2 la momentele t și t'. Utilizînd formulele (2.1), (2.2) și (2.3), pierderea de energie cinetică a acestui sistem în cursul ciocnirii este dată de

$$E - E' = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} M_j(\vec{V}_{G_j}^2 - \vec{V}_{G_j}'^2) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}[\vec{K}_{G_j}(S_j)\vec{\omega}_j - \vec{K}'_{G_j}(S_j)\vec{\omega}'_j]. \tag{2.4}$$

Vom utiliza acum lema următoare: *Dacă $\vec{\vec{I}}$ este un tensor de ordinul al doilea simetric, iar $\vec{a}$ și $\vec{b}$ doi vectori, avem relațiile*

$$\vec{b}\vec{\vec{I}}\vec{a} = \vec{a}\vec{\vec{I}}\vec{b} \tag{2.5}$$

$$\vec{a}\vec{\vec{I}}\vec{a} - \vec{b}\vec{\vec{I}}\vec{b} = (\vec{a} - \vec{b})\vec{\vec{I}}(\vec{a} + \vec{b}). \tag{2.6}$$

Demonstrație. Dacă a_i, b_i, $I_{ij}(i = 1, 2, 3,\ j = 1, 2, 3)$ sînt componentele lui $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{\vec{I}}$ în sistemul de referință $Oxyz$, avem, cu convenția de su-

mare obișnuită,

$$\vec{b}\vec{\vec{I}}\vec{a} = b_i(I_{ij}a_j) = (b_iI_{ij})a_j = a_j(I_{ji}b_i) = \vec{a}\vec{\vec{I}}\vec{b}.$$

Apoi

$$\vec{a}\vec{\vec{I}}\vec{a} - \vec{b}\vec{\vec{I}}\vec{b} = (\vec{a} - \vec{b})\vec{\vec{I}}\vec{a} + \vec{b}\vec{\vec{I}}\vec{a} - [(\vec{b} - \vec{a})\vec{\vec{I}}\vec{b} + \vec{a}\vec{\vec{I}}\vec{b}] =$$

$$= (\vec{a} - \vec{b})(\vec{\vec{I}}\vec{a} + \vec{\vec{I}}\vec{b}) = (\vec{a} - \vec{b})\vec{\vec{I}}(\vec{a} + \vec{b}).$$

Corolar.

Avem

$$\vec{K}_{G_j}\vec{\omega}_j - \vec{K}'_{G_j}\vec{\omega}'_j = \vec{\omega}_j\vec{\vec{I}}_{G_j}(S_j)\vec{\omega}_j - \vec{\omega}'_j\vec{\vec{I}}_{G_j}(S_j)\vec{\omega}'_j =$$

$$= (\vec{\omega}_j - \vec{\omega}'_j)\vec{\vec{I}}_{G_j}(S_j)(\vec{\omega}_j + \vec{\omega}'_j) \qquad (j = 1, 2). \tag{2.7}$$

Avem, de asemenea.

$$\vec{V}^2_{G_j} - \vec{V}'^2_{G_j} = (\vec{V}_{G_j} + \vec{V}'_{G_j})(\vec{V}_{G_j} - \vec{V}'_{G_j}) \qquad (j = 1, 2), \tag{2.8}$$

astfel că utilizînd relațiile (1.8) și (1.10) care dau diferențele și sumele vectorilor viteză ai punctelor G_j la momentele t și t' se găsește ușor, utilizînd și relația (V),

$$E - E' = \frac{1}{2}(1 - k^2)\left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right)P^{(c)2} -$$

$$- P^{(c)}(1 + k)[(\vec{\omega}''_1, \overrightarrow{G_1A}, \vec{n}) - (\vec{\omega}''_2, \overrightarrow{G_2A}, \vec{n})] + W, \tag{2.9}$$

unde, în virtutea lui (2.7), W are expresia

$$W = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}(\vec{\omega}_j - \vec{\omega}'_j)\vec{\vec{I}}_{G_j}(S_j)(\vec{\omega}_j + \vec{\omega}'_j). \tag{2.10}$$

Dar relațiile (1.11) se pot aduce la forma

$$\vec{\vec{I}}_{G_j}(S_j)(\vec{\omega}_j + \vec{\omega}'_j) = 2\vec{\vec{I}}_{G_j}(S_j)\vec{\omega}''_j + (-1)^{j-1}P^{(c)}(1 - k)(\overrightarrow{G_jA} \times \vec{n})$$

$$(j = 1, 2) \tag{2.11}$$

dacă se ține seamă de (2.2). În virtutea lui (2.11), ținînd seamă de simetria tensorilor de inerție ca și de relațiile (1.9), care se mai scriu

$$\vec{\vec{I}}_{G_j}(S_j)(\vec{\omega}'_j - \vec{\omega}_j) = (-1)^jP^{(c)}(1 + k)(\overrightarrow{G_jA} \times \vec{n}) \qquad (j = 1, 2), \tag{2.12}$$

se obține

$$W = P^{(e)}(1+k)[(\overrightarrow{G_1A}, \vec{n}, \vec{\omega}_1'') - (\overrightarrow{G_2A}, \vec{n}, \vec{\omega}_2'')] + \frac{1}{2}P^{(e)}(1-k)[(\vec{\omega}_1 -$$

$$- \vec{\omega}_1')(\overrightarrow{G_1A} \times \vec{n}) - (\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_2')(\overrightarrow{G_2A} \times \vec{n})], \tag{2.13}$$

deoarece

$$(\vec{\omega}_j - \vec{\omega}_j')\vec{I}_{G_j}(S_j)\vec{\omega}_j'' = \vec{\omega}_j''\vec{I}_{G_j}(S_j)(\vec{\omega}_j - \vec{\omega}_j').$$

Revenind la expresia lui $E - E'$, se obține deci

$$E - E' = \frac{1}{2}(1-k^2)\left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right)P^{(e)2} +$$

$$+ \frac{1}{2}P^{(e)}(1-k)[(\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_1')(\overrightarrow{G_1A} \times \vec{n}) - (\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_2')(\overrightarrow{G_2A} \times \vec{n})], \tag{2.14}$$

astfel că în expresia lui $E - E'$ nu mai figurează starea intermediară de la momentul t''.

Înlocuind în (2.14) produsele vectoriale din (2.12) și introducînd pe P din (1.5) se găsește ca expresie a energiei cinetice pierdute prin ciocnire expresia echivalentă

$$E - E' = \frac{1}{2}\frac{1-k}{1+k}\left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right)P^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{1-k}{1+k}\sum_{j=1}^{2}(\vec{\omega}_j - \vec{\omega}_j')\vec{I}_{G_j}(S_j)(\vec{\omega}_j - \vec{\omega}_j'). \tag{2.15}$$

3. ENERGIA CINETICĂ A VITEZELOR PIERDUTE ȘI TEOREMA LUI CARNOT GENERALIZATĂ

Fie Q un punct al lui S_j. Viteza pierdută de acest punct în intervalul de timp (t, t') este

$$\vec{V}_Q - \vec{V}_Q' = \vec{V}_{G_j} - \vec{V}_{G_j}' + (\vec{\omega}_j - \vec{\omega}_j') \times \overrightarrow{G_jQ}.$$

Prin urmare energia cinetică a vitezelor pierdute pentru sistemul format din cele două corpuri solide este

$$E_p = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}[M_j(\vec{V}_{G_j} - \vec{V}_{G_j}')^2 + (\vec{\omega}_j - \vec{\omega}_j')\vec{I}_{G_j}(S_j)(\vec{\omega}_j - \vec{\omega}_j')], \tag{3.1}$$

ţinînd cont de asemenea de (2.1) şi (2.2). Dar în virtutea lui (1.5) şi (1.8) avem

$$E_p = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right) P^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} (\vec{\omega}_j - \vec{\omega}'_j)\vec{I}_{G_j}(S_j)(\vec{\omega}_j - \vec{\omega}'_j). \qquad (3.2)$$

Din compararea relaţiilor (2.15) şi (3.2) rezultă *teorema*: *Energia cinetică pierdută în intervalul de timp* (t, t') *al coliziunii corpurilor solide* S_1 *şi* S_2 *este egală cu produsul dintre energia cinetică a vitezelor pierdute şi factorul* $(1 - k)/(1 + k)$, *care depinde numai de natura materialelor în contact.*

Prin urmare

$$E - E' = \frac{1 - k}{1 + k} E_p. \qquad (3.3)$$

Pentru cazul $k = 0$, deci cînd ciocnirea este plastică, corpurile rămînînd în contact după şoc, se regăseşte teorema lui Lazare Carnot.

Se ştie că enunţul mai general al teoremei lui Lazare Carnot este următorul: *Dacă în intervalul de timp* (t, t') *în care un sistem de puncte materiale supus la legături fără frecare şi independente de timp, suferă percusiuni provocate prin introducerea bruscă, la momentul* t, *de noi legături fără frecare, care persistă şi după momentul* t', *atunci energia cinetică pierdută de sistem este egală cu energia cinetică a vitezelor pierdute de fiecare punct al său* ([19], p. 663).

In cazul ciocnirii fără frecare a două solide din (3.3) *rezultă că: teorema lui Lazare Carnot are loc numai în cazul ciocnirii plastice, cînd avem* $k = 0$.

Teorema lui Lazare Carnot a făcut obiectul unei generalizări ale lui G. K. Suslov [2] în cazul unui punct material supus unei legături fără frecare şi independente de timp, precum şi în cazul unui sistem de puncte materiale supuse unor legături ideale şi independente de timp, atunci cînd în intervalul de percusiune apare o legătură fără frecare nepersistentă, pentru care se poate defini un coeficient de restituire, care însă implică vitezele şi nu percusiunile ([2], p. 201). Totuşi, în prezentarea, ce pare exhaustivă, a teoriei ciocnirii a două solide rigide, căreia îi dedică un întreg capitol, G. K. Suslov [2], p. 308—318, nu semnalează existenţa în acest caz a unei relaţii de forma (3.3). E. I. Routh [1], p. 309, utilizînd principiul lui D'Alembert, obţine de asemenea o relaţie de forma (3.3) pentru un sistem de puncte materiale, dar făcînd ipoteze valabile numai pentru ciocniri centrice. Nici un tratat clasic de mecanică pe care l-am consultat nu menţionează existenţa relaţiei (3.3) în cazul ciocnirii a două solide rigide. Aceasta este de altfel raţiunea pentru care m-am decis să public prezenta lucrare.

Primită la redacţie la 22 iunie 1984

BIBLIOGRAFIE

1. E. I. ROUTH, *Dynamics of a System of Rigid Bodies*, MacMillan, London, 1930.
2. G. K. SUSLOV, *Mecanica rațională*, Edit., tehnică, București, vol. II, 1950.
3. R. VOINAROSKI, *Mecanică teoretică*, Edit. Did. Ped., București, 1966.
4. L. DRAGOȘ, *Principiile Mecanicii analitice*, Editura tehnică, București, 1976.
5. V. VÂLCOVICI și colab., *Mecanica teoretică*, Edit. tehnică, București, 1959.
6. P. APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. II, 4e ed., Gauthier-Villars, Paris, 1924.
7. T. LEVI-CIVITÀ – U. AMALDI, *Lezioni di Meccanica razionale*, vol. II, P. I, Zanichelli, Bologna.
8. U. CISOTTI, *Meccanica razionale*, ed. III, Ed. Tamburini, Milano, 1939.
9. G. SESTINI, *Lezioni di Meccanica razionale*, Editrice Universitaria, Firenze, 1960.
10. I. PÉRÈS, *Mécanique générale*, Masson, Paris, 1962.
11. H. CABANNES, *Cours de Mécanique générale*, Dunod, Paris, 1966.
12. J.J. MOREAU, *Mécanique classique*, Masson, Paris, vol. I, 1968, vol. II, 1971.
13. B. DOLAPCIEV, *Analiticina Mehanika*, Nauka i Iskustvo, Sofia, 1966.
14. R. VOINEA, D. VOICULESCU V. CEAUȘU, *Mecanica*, Edit. Did. Ped., București, 1975.
15. V. OLARIU, P. SIMA, V. ACHINLOAIE *Mecanica tehnică*, Edit. tehnică, București, 1982.
16. ȘT. STAICU, *Introducere în Mecanica teoretică*, Edit. Șt. Enciclop., București, 1983.
17. V. A. KILCEVSKI, *Kurs teoreticeskoi Mehaniki*, t. II, Nauka, Moskva, 1977.
18. C. IACOB, *Sur une extension des théorèmes de Koenig et Vâlcovici*, Revue Roumaine de Math. Pures et Appliquées, **20**, 3, (1976), 329–333.
19. C. IACOB, *Mecanica teoretică*, Edit. Did. Ped., București, ed. I, 1971, ed. II, 1980.

PREOCUPĂRI ȘI REZULTATE ÎN PROBLEMA MIȘCĂRII FLUIDELOR GRELE CU SUPRAFAȚĂ LIBERĂ

de

DUMITRU DUMITRESCU,

VASILE IONESCU

Universitatea din Craiova

Lucrarea are un caracter bibliografic și conține principalele rezultate obținute de acad. D. Dumitrescu și elevii săi în perioada 1943—1963 în problema mișcării fluidelor grele cu suprafață liberă. Ea a fost elaborată cu ocazia celei de a 80-a aniversări a acad. D. Dumitrescu.

1. ORIENTAREA CERCETĂRILOR

Alături de problema mișcării fluidelor vîscoase și de teoria încercărilor pe modele, problema mișcării fluidelor grele cu suprafață liberă a fost una dintre preocupările de bază ale activității noastre științifice. Orientările în acest domeniu încep înainte de 1943, data apariției lucrării [1], ale cărei rezultate constituie esența tezei de doctorat susținută la Götingen sub conducerea lui Ludwing Prandtl. Ea studiază problema formei și vitezei de ascensiune a unei bule de gaz alimentată continuu la bază de un debit dat, într-un cilindru vertical, circular, drept, plin cu un fluid greu. Problematica și rezultatele lucrării sînt un prim pas în studiul mișcării familiilor de particule gazoase într-un fluid vîscos, frecvent întîlnite în hidrotehnică, în industria chimică, metalurgică ș. a.

Cu timpul, preocupările s-au diversificat și aprofundat cu deosebire în direcții cu imediată aplicabilitate tehnică, preocupări concretizate în lucrări elaborate singur sau cu elevi ori colaboratori mai tineri. Curînd după apariția lucrării citate, apare [2] și ceva mai tîrziu [3]. Ambele au la bază metodele și punctul de vedere din [1]. În [3] se atacă problema mișcării unui jet liber de fluid greu ce se scurge printr-un ajutaj cilindric dintr-un vas, de asemenea cilindric, de dimensiuni cunoscute. Mișcarea fiind axial simetrică se pretează la utilizarea metodei folosită și în studiul mișcării ascensionale a bulei, iar rezultatele sînt de o imediată aplicabilitate practică, cunoscută fiind importanța coeficientului de contracție în evacuarea prin ajutaje de fund. Ele sînt în bună concordanță cu cele experimentale menționate în marile tratate de hidraulică sau în „Hütte", și mult mai apropiate de realitate decît cele obținute de primii cercetători în domeniul mișcărilor plane ale fluidelor perfecte cu suprafață liberă, ca de pildă [4] și [5].

Tot în spiritul lucrării inițiale apare în 1958 lucrarea [6], unde se studiază mișcările axial simetrice ale fluidelor perfecte în conducte circulare în jurul unor obstacole axial simetrice, sfere, elipsoizi de rotație, sau diafragme. Aici se aplică, în plus, o metodă nouă față de metoda funcțiilor Bessel, comună tuturor lucrărilor citate, metoda diferențelor finite, inițiată în [7].

O altă direcție în care s-au îndreptat preocupările noastre în această problemă a fost aceea a studiului mișcării într-un plan vertical a fluidelor grele, în spiritul școlii franceze concretizată în lucrările [8], [9], [10], [11], la care trebuie să adăogăm [12], o valoroasă contribuție la studiul acestei probleme. Cercetările au fost inițiate și conduse în vederea obținerii unor

soluții ale problemelor concrete ce apar cu deosebire în hidrotehnică: mișcări peste deversoare cu muchie ascuțită și cu prag lat în regim lent și rapid, mișcări peste diverse construcții hidrotehnice — disipatori de energie, instalații de reglare a debitului ș. a.

Pentru acest motiv s-au folosit metode numerice aproximative de calcul, în speță metoda diferențelor finite de rezolvare a ecuațiilor mișcării, metodă cunoscută și sub numele de „metoda relaxării", așa cum este ea cunoscută în literatură prin lucrările [13], [14], sau [15] datorită procedeului de „relaxare" a suprafeței libere necunoscte pentru a fi satisfăcută pe ea o condiție suplimentară care o determină complet. Rezultatele obținute în studiul problemei cu această metodă sînt concretizate în lucrarea deja citată [7] și în lucrările ulterioare [16], [17], [18], lucrări ce au un caracter mai general, în sensul că aici se abordează și alte probleme în afara celor de fluide grele cu suprafață liberă, cum ar fi, de pildă, determinarea vitezelor în mișcarea unui fluid vîscos într-un canal de o formă oarecare, determinarea presiunilor pe o clapetă de reglare a debitului ș. a. De asemenea, rezultatele teoretice obținute au fost verificate experimental pe o instalație anume concepută și realizată în laboratorul secției de hidraulică al Institutului de Mecanică Aplicată „Traian Vuia" al Academiei R. S. România, un canal cu pantă variabilă, pentru fixarea caracterului lent sau torențial al mișcării. Rezultatele obținute prin cele două metode se suprapun în limite satisfăcătoare pentru exigențele tehnicii. Se face, în acest fel, o legătură naturală cu teoria încercărilor pe modele, o altă preocupare majoră a noastră, impusă de necesitatea dezvoltării hidrotehnicii. Așa cum a fost ea concepută și realizată în laborator, teoria încercărilor pe modele a fost prima realizare sistematică la noi în țară de acest fel, dezvoltată apoi sub forma marilor laboratoare de profil existente în prezent.

Alături de metoda diferențelor finite au fost folosite și metode analitice de aproximare succesivă a soluției printr-un procedeu convergent către soluția unică a problemei. Cercetările au fost conduse pînă la calcule numerice care, de asemenea, se suprapun cu o bună exactitate peste datele experimentale și rezultatele sînt conținute în lucrările [19], [20], [21], [22], [23] și [24].

În afară de studiul mișcării fluidelor perfecte cu suprafață liberă a mai fost abordată și mișcarea lentă a fluidelor vîscoase în canale deschise de formă dreptunghiulară. Pe suprafața liberă a fluidului se presupune cunoscută distribuția de viteze și se determină în acest mod distribuția de viteze într-o secțiune transversală a canalului. Aceste rezultate sînt conținute în lucrarea [25]. Condiția la limită pe suprafața liberă a fost mult discutată la apariția lucrării care constituie punctul de plecare în dezvoltările ulterioare, așa cum sînt ele prezentate în [26] și [27].

Rezultatele prezentate mai sus constituie germenele unor extensii efctuate de alți cercetători mai tineri în diferite direcții, teoretice sau experimentale.

II. METODELE FOLOSITE ÎN STUDIU

Din sumara prezentare a orientărilor în problema mișcării fluidelor grele cu suprafață liberă, rezultă clar că metodele folosite în studiu au fost privite cu aceeași atenție ca problema însăși. Ele au fost folosite

uneori simultan în studiul aceluiaşi fenomen pentru compararea rezultatelor şi analiza eficienţei lor. De aceste metode ne vom ocupa în cele ce urmează.

1. *Metoda funcţiilor Bessel.* Utilizarea acestei metode este impusă de ecuaţiile particulare la care trebuie să satisfacă funcţia de curent $\psi(r, z)$ şi potenţialul de viteze $\varphi(r, z)$ într-o mişcare axial simetrică a unui fluid perfect

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}=0\,; \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}=0, \tag{1}$$

în care r este coordonata radială, iar z coordonata verticală, paralelă cu direcţia generală a curentului la mari distanţe. Or, soluţia generală a acestui sistem de ecuaţii poate fi scrisă sub forma

$$\varphi=-V_\infty|z|+\sum_{i=1}^{\infty}C_iJ_0\left(\beta_i\frac{r}{R}\right)e^{-\beta_i\frac{|z|}{R}}, \tag{2}$$

$$\psi=\frac{V_\infty}{2}r^2+r\sum_{i=1}^{\infty}C_iJ_1\left(\beta_i\frac{r}{R}\right)e^{-\beta_i\frac{|z|}{R}}, \tag{3}$$

unde V_∞ este viteza fluidului la mari distanţe, R raza cilindrului în care se mişcă fluidul, $J_0(x)$ şi $J_1(x)$ funcţiile lui Bessel de speţa întîia şi de ordinele zero şi unu, iar β_i zerourile lui $J_1(x)$. Din forma soluţiilor (2) şi (2′) apare clar rolul funcţiilor lui Bessel în rezolvarea problemei.

O soluţie aproximativă a problemei prin această metodă s-a dat în lucrarea citată [6] unde s-a luat drept soluţie a sistemului (1) expresii de forma (2) şi (2′) cu un număr finit de termeni. Cei n coeficienţi C_i ce apar în expresia generală a soluţiei se determină ca soluţie a unui sistem liniar de n ecuaţii cu n necunoscute ce se obţine dînd n valori particulare lui r. În acest mod s-a studiat mişcarea unui fluid perfect într-o conductă circulară prevăzută cu o diafragmă circulară, o sferă cu centrul pe axa conductei sau un elipsoid de rotaţie cu axa pe axa conductei.

Dacă mişcarea comportă linii libere necunoscute, aşa cum este cazul în mişcarea ascendentă a bulei de gaz sau în cazul mişcării prin ajutaje, pe aceste linii necunoscute sînt necesare condiţii suplimentare care să le determine complet. De obicei această condiţie este impusă de relaţia lui Bernoulli care trebuie satisfăcută pe toată linia liberă sub forma

$$V^2/2+p/\delta_1-gz=\text{const.}, \tag{3′}$$

unde V, p şi z sînt viteza, presiunea şi poziţia unei particule pe suprafaţa liberă necunoscută, iar δ_1 masa specifică a gazului. Forma suprafeţei libere se va determina aşa ca pe ea să fie satisfăcută relaţia (3). În lucrările [1] şi [3] se urmează această cale de rezolvare a problemei şi se determină forma bulei în mişcare ascendentă şi forma vînei libere a ajutajului prin care se scurge fluidul împreună cu alte rezultate remarcabile asupra cărora nu insistăm (viteza de ascensiune a bulei, coeficientul de contracţie al scurgerii ş. a.).

2. *Metoda diferențelor finite* a fost aplicată atît pentru rezolvarea problemelor de mișcări cu suprafețe libere, cît și pentru rezolvarea unor probleme pentru care se poate formula o problemă la limită bine determinată cum ar fi mișcarea lentă a unui fluid vîscos într-un canal de secțiune transversală dată. Principiul metodei este simplu : domeniul $D \in R_n$ se acoperă cu o rețea de drepte, de obicei paralele la axele de coordonate, care se intersectează într-un număr N de noduri din interiorul lui D sau pe $\Gamma \in R_n$, frontiera lui D. Ecuația sau sistemul de ecuații cu derivate parțiale care descriu fenomenul studiat se scrie aproximativ în fiecare nod după metodele binecunoscute din teoria diferențelor finite. De pildă, primele derivate ale unei funcții $u(x, y)$ se aproximează prin

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{m,n} = \frac{u_{m+1,n} - u_{m-1,n}}{2h}; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{m,n} = \frac{u_{m,n+1} - u_{m,n-1}}{2l},$$

iar derivata de ordinul al doilea $\partial^2 u/\partial x^2$ prin

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{m,n} = \frac{u_{m+1,n} + u_{m-1,n} - 2u_{m,n}}{h^2}.$$

În mod similar se pot exprima orice derivate ale unei funcții cu oricîte variabile. În expresiile de mai sus s-a notat : h — pasul rețelei după x, l — pasul rețelei după y, $u_{m,n} = u(mh, nl)$.

Exprimînd în acest fel derivatele funcției sau funcțiilor necunoscute în fiecare nod al rețelei E care acoperă domeniul D și ținînd seama de condițiile inițiale și la limită, se obține un număr finit de ecuații pentru tot atîtea necunoscute $u_{m,n}$, valorile funcției în nodurile rețelei E. Soluția sistemului este soluția aproximativă a problemei la limită propuse.

Dacă frontiera Γ sau o parte a ei este necunoscută apriori, așa cum este cazul în mișcările fluidelor cu suprafață liberă, atunci problema se complică prin aceea că aceasta trebuie determinată odată cu soluția problemei. Și în acest caz este necesară o condiție pe linia necunoscută care să o determine complet. Metoda de rezolvare a problemei în acest caz comportă mai multe faze, fiecare din ele însemnînd rezolvarea unei probleme la limită pentru un domeniu cunoscut. Se alege pentru început o linie liberă arbitrară și se rezolvă problema la limită pentru domeniul D_1 astfel determinat. Cu soluția găsită se verifică condiția la limită pe Γ_1 ales ; dacă ea este satisfăcută, problema este rezolvată. iar dacă nu, se alege o altă curbă Γ_2, de obicei apropiată de Γ_1. Se rezolvă problema la limită pentru domeniul D_2 și iarăși se verifică condiția la limită cu soluția găsită. Apare aceeași alternativă ca mai sus care se rezolvă similar. Problema este complet rezolvată atunci cînd pe curba Γ_n, aleasă în faza a n-a, este satisfăcută cu suficientă aproximație condiția suplimentară dată pe linia liberă. Această variație a frontierei necunoscute a făcut ca metoda să fie denumită „metoda relaxării" [13], [14] și [15].

Metoda diferențelor finite a fost aplicată atît la probleme la limită cu domeniu determinat, cît și la probleme cu domeniu necunoscut (cu linii libere). Din prima categorie fac parte mișcările lente ale fluidelor vîs-

coase în canale deschise de diferite secţiuni transversale, iar din a doua categorie mişcările fluidelor grele cu suprafaţă liberă.

În primul caz problema revine la integrarea ecuaţiei de tip Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{g \sin \alpha}{\nu} \tag{4}$$

pe un domeniu D din planul yoz (secţiunea transversală a canalului) în condiţiile la limită:

$$u(y, z) = 0 \qquad \text{pe pereţii canalului;} \tag{5}$$

$$\partial u/\partial z = 0 \qquad \text{pe suprafaţa liberă a fluidului.} \tag{5'}$$

În relaţiile scrise s-a notat:

u — viteza fluidului, orientată după axa ox,

y, z — coordonatele unui punct din planul yoz, planul secţiunii transversale a canalului,

α — înclinarea canalului faţă de orizontală,

ν — vîscozitatea cinematică a fluidului,

g — acceleraţia gravitaţiei.

Condiţia (5) exprimă aderenţa la perete a fluidului vîscos, iar (5') faptul că se neglijează frecarea fluidului din canal cu fluidul din mediul în care el curge, aerul de exemplu. Rezultatele obţinute în studiul acestei probleme sînt prezentate în [7] şi [18].

În cazul mişcării fluidelor grele cu suprafaţă liberă problema este similară. Funcţia de curent a mişcării, $\psi(x, y)$, satisface ecuaţia

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \tag{6}$$

în domeniul fluid şi condiţiile la limită

$$\psi(x, y) = 0 \qquad \text{pe peretele solid,} \tag{7}$$

$$\psi(x, y) = Q \qquad \text{pe suprafaţa liberă } L. \tag{7'}$$

În plus, pe suprafaţa L, prin faptul că este necunscută, mai este necesară o condiţie pentru determinarea ei; aceasta este dată de relaţia lui Bernoulli, sub forma

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right)^2 + 2gy = \text{const.} \tag{8}$$

În diferenţe finite, pentru o reţea pătratică de pas h, operatorul (6) se scrie

$$\psi_{m,n} = (\psi_{m+1,n} + \psi_{m-1,n} + \psi_{m,n+1} + \psi_{m,n-1})/4 \tag{9}$$

într-un nod obișnuit al rețelei și

$$\psi_{m,n} = \frac{\varepsilon\delta}{(h+\varepsilon)(\delta+\varepsilon)}\psi_{m-1,n} + \frac{\varepsilon h}{(h+\delta)(\varepsilon+\delta)}\psi_{m,n+\delta} + \frac{\delta h}{(h+\varepsilon)(\delta+\varepsilon)}\psi_{m-\varepsilon,n} + \frac{\varepsilon\delta}{(h+\delta)(\varepsilon+\delta)}\psi_{m,n-1} \tag{10}$$

într-un nod situat lîngă conturul Γ al domeniului fluid, la distanță εh în direcția ox și δh în direcția oy de Γ (ε, $\delta < 1$). Condiția la limită (8) se scrie în diferențe finite

$$\frac{(\psi_{m,n} - \psi_{m+\varepsilon,n})^2}{2g\varepsilon^2} + \frac{(\psi_{m,n} - \psi_{m,n+\delta})^2}{2g\delta^2} + y = \text{const...} \tag{11}$$

În acest mod, problema în diferențe finite este complet determinată ; pentru fiecare suprafață liberă aleasă arbitrar domeniul fluid este complet determinat și modul în care este satisfăcută condiția (11) pe L_n hotărăște dacă ea a fost bine aleasă ori nu.

Metoda relaxării a fost aplicată la studiul unor mișcări cercetate și prin alte metode (forma bulei într-un tub vertical, mișcarea peste deversorul cu muchie ascuțită) și la studiul unor mișcări neabordate pînă atunci în literatură (mișcarea lentă peste un deversor înecat, mișcarea peste o clapetă de reglare a debitului, mișcarea peste deversoare cu prag lat în regim lent și torențial ș. a.). Aceste rezultate sînt conținute în lucrările [7], [16], [17], [18], și ele au fost comparate cu rezultatele teoretice obținute de alți autori [28] sau cu alte rezultate experimentale sau măsurători de teren [29]. Acolo unde aceste elemente de comparație lipseau, s-au făcut încercări de laborator pentru obținerea lor.

3. *Metodele analitice aproximative* care au fost folosite în studiul problemei au avut la bază mai ales studiile întreprinse în Franța în prima jumătate a secolului nostru, [8], [9], [10], [11], valorificate la noi în lucrarea [12] sub aspect teoretic. Ne-am pus problema aplicării și adaptării acestor metode la mișcări concrete de fluide perfecte. Unele rezultate au fost obținute.

Problema matematică ce se pune în acest caz este determinarea unei funcții complexe de variabila $z = x + iy$ în domeniul fluid de mișcare, mărginit de un perete solid (S) cunoscut pe care se mișcă fluidul greu și una sau mai multe linii libere necunoscute apriori, pe care trebuie să fie satisfăcută relația lui Bernoulli, folosită și în aplicarea metodei diferențelor finite. În definitiv avem de rezolvat următoarea problemă la limită : să se determine în semicercul unitar $D^+ = \{Z = X + iY \,|\, |Z| \leqslant 1 ;\ y \geqslant 0\}$ al planului complex $Z = X + iY$ funcția olomorfă $\omega(Z) = f(r, s) + ig(r, s)$ care verifică pe conturul lui D^+ relațiile

$$\omega(-1) = 0 ;\ f(x, 0) = \theta(X),$$
$$g'(1, s)\cos s \frac{1}{\operatorname{tg}(s/2)} + \mu e^{-3g(1,s)}\sin f(1, s) = 0, \tag{12}$$

unde r și s sînt coordonatele polare ale unui punct din planul complex Z, $\mu = 1/\pi Fr$ (Fr — numărul Froude al mișcării), $\theta(X)$ — panta vitezei pe suprafața S, cunoscută numai calitativ. Modul în care s-a ajuns la problema la limită (11) necesită cîteva explicații suplimentare pe care nu le vom da în această scurtă expunere a rezultatelor. Ele se găsesc în lucrările citate mai sus, consacrate acestui studiu.

Problema la limită (12) a fost rezolvată iterativ, printr-un procedeu de aproximații succesive. Prima aproximație este funcția $\omega_1(Z)$, care satisface condiția la limită

$$\omega_1(-1) = 0\,;\ f_1(x, 0) = \theta(x)\,;\ g_1'(1, s) = 0, \tag{12'}$$

a cărei soluție se poate scrie imediat [10]

$$\omega_1(z) = \frac{i}{\pi}\int_{-1}^{1} \theta(X)\frac{(Z^2-1)\mathrm{d}X}{(X-Z)(1-ZX)}\,.$$

Ea reprezintă soluția problemei de mișcare a fluidului fără greutate, cunoscută din teoria siajurilor. Aproximația de ordin n este dată de funcția $\omega_n(Z)$ care satisface condițiile

$$\omega_n(-1) = 0\,;\ f_n(X,\ 0) = \theta(X), \tag{12''}$$

$$g_n'(1,\ s)\,\frac{\cos s}{\mathrm{tg}(s/2)} + \mu e^{-3g_{n-1}(1,s)}\sin f_{n-1}(1,\ s) = 0$$

dependente de aproximația anterioară. Convergența acestui șir de aproximații succesive a fost studiată în lucrarea [22].

Rezultatele teoretice expuse mai sus au fost aplicate la mișcarea unui fluid peste deversorul cu muchie ascuțită ajungîndu-se la rezultatele numerice expuse în [19], [20], [21], [23], [24], în bun acord cu rezultatele experimentale cunoscute în literatură sau cu cele obținute de noi înșine prin metoda diferențelor finite.

III. VALORIFICAREA REZULTATELOR

O bună parte dintre rezultatele expuse mai sus au fost prezentate la diferite întruniri internaționale de specialitate, cu aprecieri pozitive asupra valorii și utilității lor. Menționăm în mod special al 10-lea Congres internațional A.I.R.H. ținut la Dubrovnik în 1962, unde a fost programat și un colcviu special privind mișcarea fluidelor grele cu suprafață liberă, propus de colectivul nostru organizatorilor congresului.

În țară, participanții la elaborarea lucrărilor privind mișcarea fluidelor grele cu suprafață liberă au primit în 1963 Premiul de Stat al R.P.P.

Rezultatele obținute ca rod al acestor preocupări au fost valorificate și prin teze de doctorat elaborate de unii participanți la lucrări. În

anul 1966, prof. dr. Ionescu Vasile a susținut teza sa de doctorat la Facultatea de Matematică și Mecanică din București. Cîteva rezultate sînt expuse în [30].

În anul 1970, dr. ing. Iancu Costel a susținut teza de doctorat la Institutul Politehnic din București cu lucrarea [31].

Tot în 1970, prof. dr. ing. Florea Julieta a susținut la Institutul Politehnic din București teza de doctorat [32], de asemenea cu un subiect din domeniul mișcării fluidelor grele cu suprafață liberă.

Încheiem cu aceasta enumerarea rezultatelor obținute în studiul problemei, pentru a nu lungi prea mult expunerea.

Primită la redacție la 30 iunie 1984

BIBLIOGRAFIE

1. D. DUMITRESCU, *Strömung an einer Luftblase in senkrechten Rohr*, ZAMM, **23**, *3* (1943).
2. D. DUMITRESCU, *Quelle bezw. Senke im Kreisrohr*, Mitteilungen der Technischen Hochschule Bukarest, **XV**, 70(1944).
3. D. DUMITRESCU, *Determinarea coeficientului de contracție la ajutajele cilindrice*, Bul. Științific al Academiei RPR, Secția de Științe Tehnice și Chimice, **4**, *3—4*, 303 (1952).
4. H. VILLAT, *Sur la résistence des fluides*, Annales de l'Ecole Normale Supérieure, *28* (1911).
5. U. CISOTTI, *Idromeccanica Piana*, Milano, 1921.
6. D. DUMITRESCU, D. IONESCU, *Metode numerice pentru studiul mișcărilor axial simetrice ale fluidelor perfecte*, SCMA, **IX**, *4*, (1958).
7. D. DUMITRESCU, V. IONESCU, R. TOTH, *Aplicarea metodei diferențelor finite la studiul mișcării fluidelor grele cu suprafață liberă*, S.C.M.A. **9**, *3—4* (1955).
8. H. VILLAT, *Sur l'écoulement des fluides pesants*, Annales de l'Ecole Normale Supérieure **32**, 175 (1915).
9. F. AIMOND, *Contributions à l'écoulement des fluides pesants à surface libre*, Annales de Toulouse, **21**, 53 (1929).
10. H. PONCIN, *Recherches sur le mouvement d'un fluide pesant dans un plan vertical*, Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air, Paris, **16**, 71 (1932).
11. R. GERBERT, *Solutions exactes des mouvements des liquides pesants*, Journal des Mathématiques Pures et Appliquées, *3* (1955).
12. M. HAIMOVICI, *Sur l'écoulement des liquides pesants dans un plan vertical*, Annales Scientifiques de l'Université de Jassy, **21** (1935).
13. R. V. SOUTHWELL, *Relaxation Methods in Engineering Science*, University Press, Oxford, 1940.
14. R. V. SOUTHWELL, *Relaxation Methods in Theoretical Physics*, University Press, Oxford, 1946.
15. D. N. DE G. ALLEN, *Relaxation Methods*, London, McGraw-Hill,
16. D. DUMITRESCU, V. IONESCU, *Metode numerice în studiul scurgerii peste deversoare*, Com. Acad. PRR, **8**, *4*(1958).
17. D. DUMITRESCU, V. IONESCU, C. IANCU, *Contribuții teoretice și experimentale la studiul mișcării peste deversoare*, S.C.M.A. **9**, *3*(1958).
18. D. DUMITRESCU, V. IONESCU, *Aplicarea metodei diferențelor finite la studiul problemelor de mecanica fluidelor*, Sesiunea Științifică jubiliară a Institutului de Mecanică Aplicată „Traian Vuia" al Acad. RPR, București, 4—7 iulie, 1960.
19. D. DUMITRESCU, V. IONESCU, *Studiul mișcării fluidelor grele deversante într-un plan vertical*, Comunic. Acad. R.P.R., **10**, *3*, 181 (1960).
20. D. DUMITRESCU, V. IONESCU. *Comportarea lamelor deversante în vecinătatea punctului de detașare*, Comunic. Acad. RPR, **10**, *3*, 187 (1960).
21. D. DUMITRESCU, V. IONESCU, *Contribuții la studiul mișcării fluidelor grele peste deversoare cu muchie ascuțită*, Comunic. Acad. RPR **10**, *3*, 195 (1960).
22. D. DUMITRESCU, V. IONESCU, *Studiul mișcării lamelor deversante infinite într-un plan vertical*, S.C.M.A. **11**, *2*.
23. D. DUMITRESCU, V. IONESCU, C. CRĂCIUN, *Mișcarea fluidelor grele deversante într-un plan vertical*, S.C.M.A. **11**, *3* (1960).

24. D. DUMITRESCU, V. IONESCU, C. CRĂCIUN, *Studiul unitar al mișcării fluidelor grele cu suprafață liberă*, S.C.M.A., **13**, *2* (1962).
25. D. DUMITRESCU, *O soluție exactă a sistemului de ecuații Navier-Stokes pentru fluide grele cu suprafață liberă*, Com. Acad., R.P.R. **4**, *3—4* (1954).
26. CR. STĂNESCU, L. DUMITRESCU, *Mișcarea unidimensională a două fluide grele, vîscoase, separate printr-o suprafață plană*, S.C.M.A., **7**, *4*.
27. C. CRĂCIUN, *Contribuții la studiul mișcării fluidelor vîscoase. Mișcări de fluide stratificate și cu suprafață liberă*. Teză de doctorat I.P.B. 1972.
28. AUGUST LAUK, *Überfall über ein Wehr*, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, **5**, *1* (1925).
29. BOULDER CANYON PROJECT, *Studies of Crests for Overfall Dams*, Denwer, Colorado, 1948.
30. V. IONESCU, *Cîteva probleme la limită neliniare de o formă particulară de tipul problemei lui Riemann*, Analele Universității din București, 1967, *2*, Seria Științele Naturii, Matematică — Mecanică.
31. C. IANCU, *Contribuții teoretice și experimentale la studiul scurgerii fluidelor cu mișcare de rotație și vîrtej legat de suprafața liberă*, Teză IPB, 1970.
32. J. FLOREA, *Studiul mișcării fluidelor grele cu suprafață liberă peste deversorul cu prag lat*, Teză I.P.B. 1970.

CALCULUL PIERDERILOR HIDRAULICE ÎNTR-O REȚEA PLANĂ DE PROFILE

de I. ANTON, D. IONESCU, G. CĂLIN

Institutul Politehnic „Traian Vuia", Timișoara

Analizînd curgerea reală în jurul unui profil se constată că influența stratului limită se manifestă ca o sumă de trei efecte : efect de coardă, efect de curbură și efect de grosime, toate conducînd la o micșorare a circulației și prin urmare, la o modificare a unghiurilor de la intrare și ieșire în/din rețea. Analizînd curgerea în dîră se deduc parametrii curgerii omogene din aval de rețea și se stabilește coeficientul de pierderi.
De asemenea, se prezintă și relațiile de calcul în ipoteza în care se corectează unghiul de atac, astfel încît să se obțină un coeficient de portanță aproximativ egal cu cel corespunzător din curgerea potențială.

1. INTRODUCERE

Teoria rețelelor de profile aflate într-un curent de fluid ideal permite determinarea cîmpului de viteze și presiuni în întreaga zonă precum și calculul forței de acțiune a curentului asupra profilului din rețea. Vîscozitatea fluidului influențează semnificativ caracteristicile rețelei, ea manifestîndu-se prin apariția forței de rezistență și prin modificarea circulației, respectiv a forței portante.

Cunoștințele acumulate pînă în prezent în domeniul stratului limită dau posibilitatea determinării pe cale teoretică a caracteristicilor aerodinamice ale unei rețele de profile așezate într-un curent real, aceasta permițînd selectarea din mai multe variante a rețelei optime.

Lucrarea de față își propune să prezinte o asemenea metodă care să fie, pe cît posibil, unitară și completă. După ce se face o analiză a modului în care stratul limită influențează curgerea potențială din jurul profilului, se stabilește variația corespunzătoare a circulației și se dau relațiile pentru recalcularea elementelor unghiulare. De asemenea, s-au dedus relațiile de calcul pentru cazul în care se corectează unghiul de incidență astfel încît portanța să fie egală cu cea din mișcarea potențială. Influența dîrei este analizată pe baza teoremei impulsului, considerînd că în planul bordului de fugă viteza și presiunea sînt constante. Aceasta a permis stabilirea coeficientului de pierderi.

În cele ce urmează se consideră cunoscute distribuția vitezei potențiale și stratul limită pe conturul profilului. Parametrii stratului limită care prezintă interes sînt : grosimea de deplasare δ_1, grosimea pierderilor de impuls δ_2 și parametrul de formă H_{12}.

2. INFLUENȚA STRATULUI LIMITĂ ASUPRA CURGERII ÎN JURUL UNUI PROFIL

În figura 1 este reprezentat un profil așezat într-un curent, la care ne vom referi ca profil de bază, și dezvoltarea stratului limită și dîrei în lungul celor două suprafețe și în aval de ele. De asemenea, este prezentată și distribuția grosimii de deplasare δ_1 pe profil. Liniile de curent ale curgerii potențiale din exteriorul stratului limită se deplasează cu mărimea δ_1.

St. Cerc. Mec. Apl., Tom 43, Nr. 5–6, 1984, P. 439–450

Prin urmare, putem considera profilul din curentul real echivalent cu un profil îngroşat care funcţionează într-un curent potenţial.

Pentru a deduce influenţa grosimii de deplasare δ_1 asupra curgerii, să considerăm, pentru simplificare, un profil simetric, aşezat sub un unghi de atac α_∞ (fig. 2). Pe profilul de bază distribuim grosimea de deplasre δ_1; obţinem astfel un alt profil numit *profil deplasat*. Profilul deplasat are altă coardă, altă curbură şi altă repartiţie de grosimi.

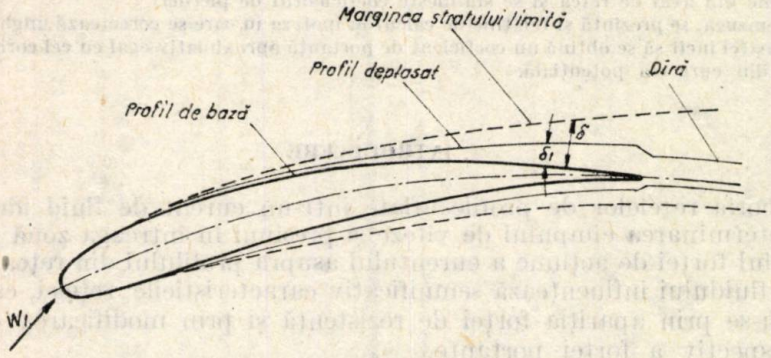


Fig. 1. — Profil cu strat limită şi dîră.

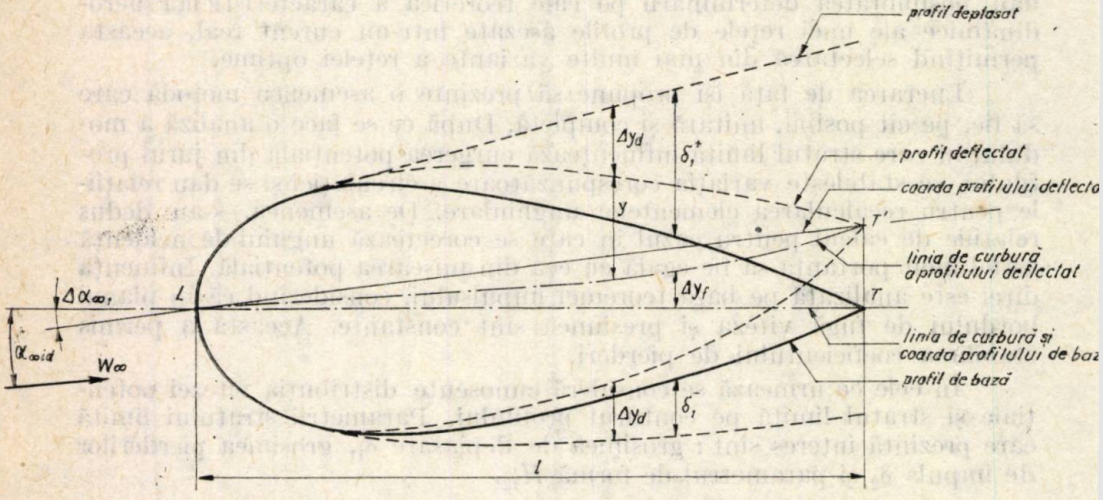


Fig. 2. — Efectul grosimii de deplasare asupra curgerii în jurul unui profil.

Linia de curbură a profilului deplasat se deduce din aceea a profilului de bază prin adăugarea mărimii

$$\Delta y_f = \frac{1}{2}(\delta_1^+ - \delta_1^-), \tag{1}$$

unde indicii „+" şi „−" corespund extradosului, respectiv intradosului profilului. Păstrînd aceeaşi distribuţie a grosimii profilului de bază, dar

față de noua linie de curbură, se obține un nou profil numit *profil deflectat*. Dacă la acesta adăugăm o distribuție egală de grosimi,

$$\Delta y_d = \frac{1}{2}(\delta_1^+ + \delta_1^-), \tag{2}$$

ajungem la profilul deplasat. Putem considera acum că efectul de deplasare al stratului limită este suma a trei efecte : un efect de coardă, un efect de curbură și un efect de grosime.

Abaterea profilului deplasat față de profilul de bază are o importanță neglijabilă asupra distribuției de viteze pe contur, în schimb, modificarea circulației este importantă.

3. MODIFICAREA CIRCULAȚIEI

Efectul de coardă rezultă imediat din figura 2, unde se poate vedea, referindu-ne la noua coardă LT', că acesta este echivalent cu o reducere a incidenței

$$\Delta\alpha_{\infty 1} = -\left(\frac{\delta_1^+ - \delta_1^-}{2l}\right)_f \tag{3}$$

(l — coarada profilului, f se referă la bordul de fugă). Semnul minus arată că este vorba de o scădere a unghiului de incidență.

Micșorarea unghiului de incidență cu $\Delta\alpha_{\infty 1}$ duce la o modificare a circulației cu $-\Delta\Gamma_1$.

Efectul de curbură se manifestă printr-o distribuție de curbură negativă, care, în cazul unui profil oarecare, apare ca o micșorare a acesteia.

Pentru efectele de curbură și grosime, *L. Speidel și N. Scholz* prezintă în [4, 5] o metodă rațională de calcul a variației circulației înlocuind modificarea curburii și îngroșarea profilului cu vîrtejuri și surse de-a lungul coardei, $\gamma'(x)$, respectiv $q'(x)$, x fiind luat în direcția coardei,

$$\gamma'(x) = 2W_{\infty x}\left(A_0' \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} A_j' \sin j\varphi\right), \tag{4}$$

$$q'(x) = 2W_{\infty x}\sum_{k=1}^{\infty} B_k' \sin k\varphi, \tag{5}$$

cu $\cos\varphi = 1 - 2x/l$ și A_j' și B_j' coeficienți.

Coeficienții din (4) și (5) se determină din condițiile cinematice ale curentului. Aceste condiții deduse din [6] sînt pentru distribuția suplimentară de grosimi

$$\frac{\mathrm{d}(\Delta y_d)}{\mathrm{d}x} = \frac{q'(x)}{2W_m} \tag{6}$$

și pentru variația liniei de schelet

$$\frac{\mathrm{d}(\Delta y_f)}{\mathrm{d}x} = \frac{v_i'}{W_m}, \tag{7}$$

în care v_i' sînt vitezele induse de distribuțiile suplimentare de vîrtejuri și surse normale pe coardă, iar W_m *) este media vitezelor teoretice de pe extradosul și intradosul profilului cunoscute din mișcarea potențială

$$W_m = \frac{1}{2}(W_{id}^{+} + W_{id}^{-}). \tag{8}$$

Seriile (4) și (5) restrînse la trei termeni se introduc în (6) și (7) și se pune condiția de a fi satisfăcute în trei puncte de pe contur. Cele trei puncte se aleg la

$$\frac{x_r}{l} = 0{,}2\,; \quad 0{,}5\,; \quad 0{,}8.$$

Cu distribuția suplimentară de grosime calculată cu (2) se obțin, prin înlocuirea lui (5) în (6), următoarele ecuații pentru determinarea coeficienților B_k':

$$\left(\frac{\mathrm{d}(\Delta y_d)}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{W_m}{W_{\infty x}}\right)_r = \sum_{k=1}^{3} B_k' \sin k\varphi \tag{9}$$

cu $\gamma = 1 \div 3$. Rezolvarea acestui sistem dă

$$B_k' = \sum_{r=1}^{3} b_{kr}\left(\frac{\mathrm{d}(\Delta y_d)}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{W_m}{W_{\infty x}}\right)_r. \tag{10}$$

Constantele b_{kr} rezultă din (9) și sînt independente de geometria rețelei și profil.

În mod asemănător se determină coeficienții A_j'. Pentru aceasta se deduc mai întîi vitezele transversale induse de distribuțiile suplimentare de vîrtejuri și surse, care, în conformitate cu [6, rel. (64)], sînt

$$v_i' = W_m\left[\sum_{j=0}^{2} A_j' f_{rj}^{*}(x) + \sum_{k=1}^{3} B_k' f_{qk}(x)\right]. \tag{11}$$

Funcțiile $f_{\gamma j}^{*}(x)$ și $f_{qk}(x)$ sînt date în [6, rel. (65), (105), (107)].

---

* Din cauza grosimii și curburii mici ale profilului suplimentar, numitorii relațiilor (6) și (7) din [6] pot fi înlocuiți cu (8) din această lucrare.

Din (4), (7), (10) și (11) se obține soluția

$$A'_j = \sum_{r=1}^{3} \left[a_{jr} \left(\frac{\mathrm{d}(\Delta y_f)}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{W_m}{W_{\infty x}} \right)_r + g_{jr} \left(\frac{\mathrm{d}(\Delta y_d)}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{W_m}{W_{\infty x}} \right)_r \right]. \qquad (12)$$

Cu $j = 0,1$, deoarece, după cum se va vedea mai jos pentru calculul variației circulației interesează numai coeficienții A'_0 și A'_1. Constantele universale a_{jr} și g_{jr} depind numai de t/l și λ și sînt independente de conturul profilului. Ele sînt tabelate în [3, 4, 5]; pentru a evita interpolările, dar mai ales extrapolările se poate face un program pentru calculator.

Micșorarea $\Delta\Gamma_2$ a circulației totale Γ datorită efectelor de curbură și grosime se obține prin integrare

$$\Delta\Gamma_2 = \int_0^l \gamma'(x)\mathrm{d}x = \pi l W_{\infty x}(A'_0 + \frac{1}{2}A'_1). \qquad (13)$$

4. MODIFICAREA ELEMENTELOR UNGHIULARE

S-a arătat în secțiunea precedentă că efectul de coardă este echivalent cu o reducere a unghiului de incidență $\Delta\alpha_{\infty 1}$, iar efectul de curbură împreună cu efectul de grosime se manifestă printr-o micșorare a circulației cu $\Delta\Gamma_2$. Aceasta din urmă echivalează cu o reducere a unghiului de incidență a cărei valoare ne propunem să o determinăm.

Din calculul mișcării potențiale se cunoaște raportul dintre variația portanței în funcție de unghiul de incidență α_∞ la profilul în rețea și profilul izolat

$$K_R = \left(\frac{\mathrm{d}c_A}{\mathrm{d}\alpha_\infty} \right)_R \Big/ \left(\frac{\mathrm{d}c_A}{\mathrm{d}\alpha} \right)_S. \qquad (14)$$

Dacă se consideră profile de curbură și grosimi moderate, se poate exprima

$$\left(\frac{\mathrm{d}c_A}{\mathrm{d}\alpha} \right)_S = 2\pi\cos\alpha. \qquad (15)$$

Ținînd seamă că $\Gamma = \frac{1}{2} c_A l W_\infty$, se obține variația circulației în rețea

$$\frac{\Delta\Gamma_R}{\Delta\alpha_\infty} \simeq \frac{\mathrm{d}\Gamma_R}{\mathrm{d}\alpha_\infty} = \pi l K_R W_\infty \cos\alpha_\infty. \qquad (16)$$

Coeficientul de influență a rețelei K_R se cunoaște din calculul mișcării potențiale [1, 2, 3, 6].

Dacă variația circulației este $\Delta\Gamma_R = \Delta\Gamma_2$, atunci rezultă din (16) și (13) valoarea echivalentă de reducere a unghiului de incidență

$$\Delta\alpha_{\infty 2} = \frac{1}{K_R}\left(A_0' + \frac{1}{2}A_1'\right). \tag{17}$$

Micșorarea totală a unghiului de incidență corespunzătoare efectelor de coardă, circulația și grosimea va fi

$$\Delta\alpha_\infty = \Delta\alpha_{\infty 1} + \Delta\alpha_{\infty 2}. \tag{18}$$

Cu această micșorare a unghiului de incidență apare și o modificare cu $\Delta W'_{\infty u}$ a componentei tangențiale a lui $W_{\infty id}$. Din figura 3 se obține

$$\Delta W'_{\infty u} = |\Delta\alpha_\infty| \frac{W_{\infty id}}{\sin\beta_{\infty id}}. \tag{19}$$

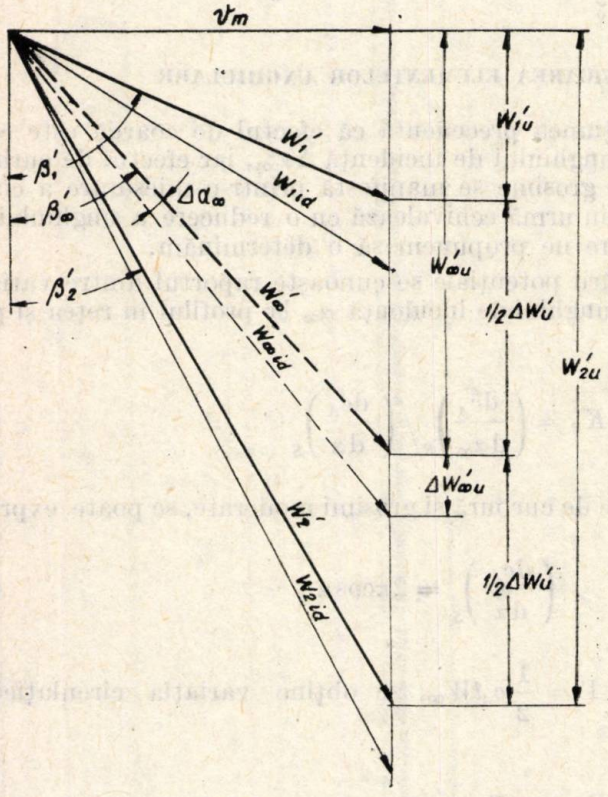


Fig. 3. — Triunghiul vitezelor pentru deducerea formulelor (26) și (27).

Circulația este acum $\Gamma' = \Gamma_{id} - |\Delta\Gamma|$, unde $\Delta\Gamma = \Delta\Gamma_1 + \Delta\Gamma_2$. Între Γ' și $\Delta W_u'$ există relația cunoscută

$$\Delta W_u' = \frac{\Gamma'}{t}. \tag{20}$$

În mișcarea cu frecare, unghiurile de la intrare și ieșire se exprimă astfel (fig. 3)

$$\operatorname{ctg}\beta_1' = \frac{W_{1u}'}{v_m} = \frac{1}{v_m}\left(W_{\infty uid} - \frac{1}{2}\Delta W_u' - \Delta W'_u\right), \tag{21}$$

$$\operatorname{ctg}\beta_2' = \frac{W_{2u}'}{v_m} = \frac{1}{v_m}\left(W_{\infty uid} + \frac{1}{2}\Delta W_u' - \Delta W'_{\infty u}\right). \tag{22}$$

Avînd în vedere că

$$W_{1,2uid} = W_{\infty uid} \mp \frac{\Gamma_{id}}{2t}, \tag{23}$$

$$\Delta\Gamma = \pi l K_R W_{\infty id} \cos\alpha_{\infty id}\,\Delta\alpha_\infty, \tag{24}$$

$$v_m = W_{\infty id}\sin\beta_{\infty id}, \tag{25}$$

relațiile (21) și (22) devin

$$\operatorname{ctg}\beta_1' = \operatorname{ctg}\beta_{1id} + \frac{\pi}{2}\frac{l}{t}K_R\frac{\cos\alpha_{\infty id}}{\sin\beta_{\infty id}}\Delta\alpha_\infty - \frac{\Delta\alpha_\infty}{\sin^2\beta_{\infty id}}, \tag{26}$$

$$\operatorname{ctg}\beta_2' = \operatorname{ctg}\beta_{2id} - \frac{\pi}{2}\frac{l}{t}K_R\frac{\cos\alpha_{\infty id}}{\sin\beta_{\infty id}}\Delta\alpha_\infty - \frac{\Delta\alpha_\infty}{\sin^2\beta_{\infty id}}. \tag{27}$$

Prin urmare, unghiurile β_1' și β_2' se determină pentru curentul real după (26) și (27). Cu β_1' avem valoarea unghiului de la intrare

$$\beta_1 = \beta_1', \tag{28}$$

care se introduce în calcul. Pentru unghiul de la ieșire mai apare o modificare datorită mișcării în dîră.

Pentru a obține în curentul real o circulație (respectiv o portanță) egală cu aceea din curentul ideal, va trebui rotit profilul din rețea cu unghiul $\Delta\alpha_\infty$ în sensul măririi unghiului de incidență. Pe baza unui raționament analog cu cel precedent rezultă pentru calculul unghiurilor de la intrare și ieșire expresiile

$$\operatorname{ctg}\beta_{1cor} = \operatorname{ctg}\beta_{1id} + \frac{\Delta\alpha_\infty}{\sin^2\beta_{\infty id}}, \tag{29}$$

$$\operatorname{ctg}\beta_{2cor} = \operatorname{ctg}\beta_{2id} + \frac{\Delta\alpha_\infty}{\sin^2\beta_{\infty id}}. \tag{30}$$

Calculul stratului limită poate fi condus numai pînă la punctul de desprindere. Deoarece în multe cazuri profilul din rețea poate să prezinte mici zone de desprindere, o evaluare aproximativă a efectului acestora a fost făcută în [5] din care reproducem numai rezultatele :

— grosimea pierderii de impuls la bordul de fugă

$$\frac{\delta_{2f}}{l} = \frac{\delta_{2D}}{l}\left(\frac{W_{2id}}{W_f}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{(y_d)_D}{l}\left(\frac{W^2_{Did}}{W_f^2} - 1\right),$$

— suma grosimilor de deplasare pe extrados și intrados la bordul de fugă

$$\left(\frac{\delta_{1f}}{l}\right)^+ + \left(\frac{\delta_{1f}}{l}\right)^- = \frac{\pi}{2}\Delta B_1 \frac{W_{\infty id}}{W_f}$$

indicele D se referă la punctul de desprindere, iar W_f este viteza la bordul de fugă obținută prin prelungirea graficelor vitezei teoretice (pe extrados și intrados) după tangentele duse în punctele situate la 0,05 1.

5. CURGEREA ÎN DÎRĂ. PIERDERI

În spatele rețelei, straturile limită se contopesc, diferențele de viteză dispar treptat, astfel că la infinit viteza și presiunea sînt constante. Acest proces de omogenizare este legat evident de pierderi suplimentare de energie.

Pentru a obține parametrii curgerii în aval de rețea aplicăm teorema impulsului relativ la suprafața de control K (fig. 4). În cele ce urmează indicele f reprezintă mărimile curentului neomogen la bordul de fugă, iar

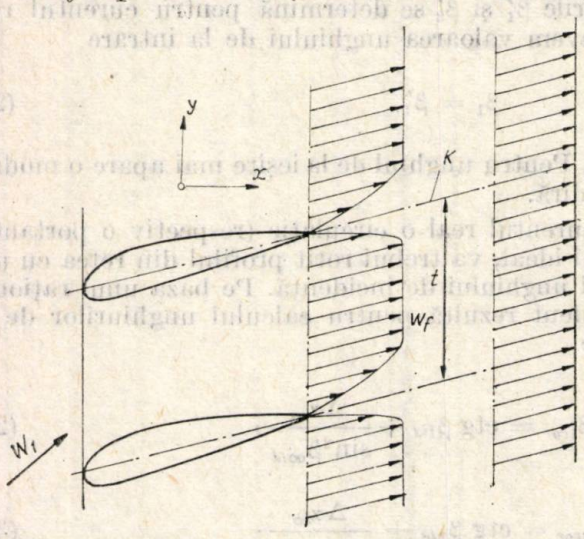


Fig. 4. — Curgerea în dîră.

indicele 2 desemnează aceleași mărimi în cugerea omogenă, departe în aval. Atunci teorema impulsului în direcția y este

$$\int_0^t W_{yf} W_{xf}\, dy = W_{2y} W_{2x}\, t, \qquad (31)$$

iar în direcția axei x

$$\rho \int_0^t W_{xf}\, dy + \int_0^t p_f\, dy = \rho W_{2x} t + p_2 t. \tag{32}$$

Împreună cu ecuația continuității

$$\int_0^t W_{xf}\, dy = W_{2x}\, t \tag{33}$$

avem la dispoziție trei ecuații pentru necunoscutele W_{2y}, W_{2x} și p_2 ale mișcării omogene.

Introducem următoarele mărimi;

$$\hat{\delta}_1 = \frac{\delta_1^+ + \delta_1^-}{l} \frac{l}{t \sin \beta_2'} \tag{34}$$

grosimea adimensională de deplasare la ieșirea din rețea după direcția axei rețelei și

$$\hat{\delta}_2 = \frac{\delta_2^+ + \delta_2^-}{l} \frac{l}{t \sin \beta_2'} \tag{35}$$

grosimea adimensională a pierderillor de impuls.

Considerăm că la ieșirea din rețea, mișcarea are direcția

$$\beta_f = \beta_2', \tag{36}$$

în timp ce viteza crește din cauza efectului de îngroșare a stratului limită

$$W_f = \frac{W_2'}{1 - \hat{\delta}_1}. \tag{37}$$

Presiunea statică la bordul de fugă rezultată din teorema lui Bernoulli

$$p_f = p_2' - \frac{\rho}{2} W_2'^2 \frac{2\hat{\delta}_1 - \hat{\delta}_1^2}{(1 - \hat{\delta}_1)^2}. \tag{38}$$

Dacă u reprezintă viteza în stratul limită la muchia posterioară a profilului în funcție de distanța la perete, atunci integrala din ecuația (31) poate fi evaluată

$$\int_0^t W_{uf} W_{xf}\, dy = W_f^2 \sin\beta_2' \cos\beta_2' \int_0^t \left[1 - \frac{u}{W_f}\left(1 - \frac{u}{W_f}\right) - \left(1 - \frac{u}{W_f}\right)\right] dy =$$

$$= W_2'^2 \frac{1 - \hat{\delta}_1 - \hat{\delta}_2}{(1 - \hat{\delta}_1)^2} \sin \beta_2' \cos \beta_2'\, t.$$

În mod analog se calculează și integralele din (32) și (33).

Notînd cu

$$\sigma = \frac{\operatorname{ctg}\beta_2}{\operatorname{ctg}\beta_2'} = \frac{1 - \hat{\delta}_1 - \hat{\delta}_2}{(1 - \hat{\delta}_1)^2}, \tag{39}$$

ecuațiile (31), (32) și (33) se scriu

$$W_2'^2 \sigma \sin\beta_2' \cos\beta_2' = W_2^2 \sin\beta_2 \cos\beta_2, \tag{40}$$

$$\rho W_2'^2 \sigma \sin\beta_2' + \left[p_2' - \frac{\rho}{2} W_2'^2 \frac{2\hat{\delta}_1 - \hat{\delta}^2_1}{(1 - \hat{\delta}_1)^2} \right] = \rho W_2^2 \sin^2\beta_2 + p_2 \tag{41}$$

$$W_2' \sin\beta_2' = W_2 \sin\beta_2. \tag{42}$$

Din aceste ecuații rezultă mărimile căutate ale curgerii omogene cu frecare

$$\operatorname{ctg}\beta_2 = \sigma \operatorname{ctg}\beta_2', \tag{43}$$

$$W_2^2 = W_2'^2 (\sin^2\beta_2' + \sigma^2 \cos^2\beta_2'), \tag{44}$$

$$p_2 = p_2' - \frac{\rho}{2} W_2'^2 \left[\frac{2\delta_1 - \delta_1^2}{(1 - \hat{\delta}_1)^2} - 2(\sigma - 1) \sin^2\beta_2' \right], \tag{45}$$

cu

$$W_2' = \frac{v_m}{\sin\beta_2'}, \tag{46}$$

unde v_m este viteza meridională.

Pierderea totală de presiune în dîra rețelei este

$$\Delta p_t = (p_2' - p_2) + \frac{\rho}{2}(W_2'^2 - W_2^2). \tag{47}$$

Ținînd seamă de expresiile (43) — (47) se poate deduce coeficientul de pierderi.

$$\zeta_r = \frac{\Delta p_t}{\frac{1}{2} \rho v_m^2} = \frac{\sigma^2 + \operatorname{ctg}^2\beta_2}{\sigma^2 (1 - \hat{\delta}_1)^2} + 1 - 2\sigma - \operatorname{ctg}^2\beta_2. \tag{48}$$

Formula (48) este oarecum asemănătoare cu cea dată de *Povh* [8], unde parametrul σ este considerat necunoscut ca și unghiul β_f. Totuși, pentru a rezulta valori plauzibile pentru unghiul β_2, se sugerează pentru σ valori cuprinse între 1,02 și 1,05, deduse dintr-un număr limitat de măsurători; acestea sînt însă inacceptabile, deoarece în multe situații se poate ajunge la valori negative pentru coeficientul ζ_r. În cazul de față, σ, re-

zultat din mărimile stratului limită de la bordul de fugă, permite determinarea unghiului β_2, valoarea unghiului β_f fiind dată de (34).

Pentru rețeaua corectată cu unghiul $\Delta\alpha_\infty$ se folosesc aceleași relații (43) — (48), însă mărimile prevăzute cu semnul prim (′) se vor înlocui cu mărimile corespunzătoare afectate cu indicele „cor".

Cunoscînd unghiurile β_1 și β_2 se pot calcula deviația δu a rețelei, unghiul β_∞ și în final coeficienții de portanță și rezistență [1].

$$c_A = 2\frac{t}{l}\delta_u \sin\beta_\infty + \frac{t}{l}\zeta_r \sin^2\beta_\infty \cos\beta_\infty, \tag{49}$$

$$c_W = \frac{t}{l}\zeta_r \sin^3\beta_\infty. \tag{50}$$

Metoda prezentată a fost utilizată la calculul pierderilor într-o rețea plană de turbină cu profile NACA-8410 la un unghi de instalare $\beta_s = 60°$ și pas relativ $t/l = 1$. Distribuția de viteze s-a determinat după *O. Popa* [2], iar stratul limită s-a calculat prin metoda *Truckenbrodt* [9]. În figura 5 sînt prezentate distribuția de viteze și variația parametrilor stratului limită pe profilul din rețea, iar în tabelul 1 au fost extrase cîteva rezultate.

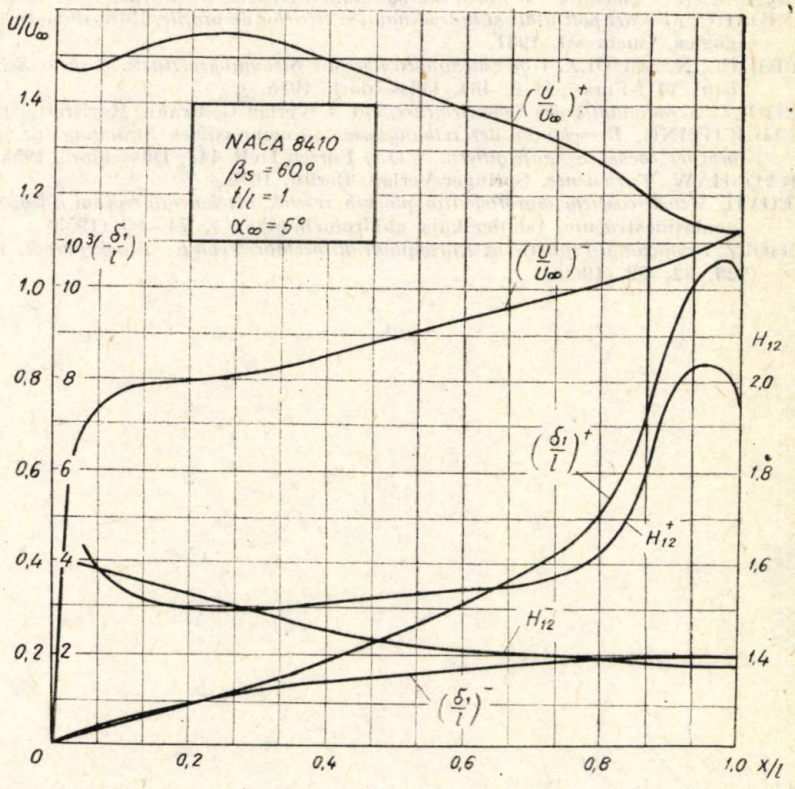


Fig. 5. — Distribuția vitezei și parametrii stratului limită pe prfi profilul NACA-8410.

Tabelul 1

Caracteristicile aerodinamice ale unei rețele cu profile NACA 8410, $\beta_s = 60°$, $t/l = 1$

Nr. crt.	Denumirea parametrului	Simbol	Curgere ideală	Curgere reală	Curgere corectată
1	Unghiul de incidență	α_∞	5°	4,064°	5,936°
2	Unghiul de intrare	β_1	81,497°	81,452°	80,386°
3	Unghiul de ieșire	β_2	51,935°	53,217°	51,038°
4	Coeficientul de pierdere în rețea	ζ_r	—	0,027	0,029
5	Coeficientul de portanță	c_A	1,153	1,10	1,159
6	Coeficientul de rezistență	c_W	—	0,0203	0,0214

Primită la redacție la 30 mai 1984

BIBLIOGRAFIE

1. I. ANTON, *Turbine hidraulice*, Edit. Facla, 1979.
2. O. POPA, *Mișcări potențiale și teoria hidrodinamicii rețelelor de profile*, IPT, 1980.
3. GH. ZIDARU, *Mișcări potențiale și hidrodinamica rețelelor de profile*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1981.
4. L. SPEIDEL, N. SCHOLZ, *Untersuchungen über die Strömungsverluste in ebene Schaufelgittern*, VDI-Forsch-Heft 464, Düsseldorf, 1955.
5. N. SCHOLZ, *Aerodynamik der Schaufelgitter*, Bd. I, Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1965.
6. H. SCHLICHTING, *Berechnung der reibungslosen incompressiblen Strömung für ein vorgegebenes ebenes Schaufelgittern*, V.D.I. Forsch-Heft 447, Düsseldorf, 1955.
7. P. BRADSHAW, *Turbulence*, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
8. I. L. POVH, *Metodi rascieta soprotivleniia ploskih reșetok, obtekaemih realnoi jidcostiu*, Energomașinostroenie, tehniceskaia ghidromehanika, 5, 74—93 (1953).
9. N. SCHOLZ, *Ergänzungen zum Grenzschichtquadraturverfahren von E. Truckenbrodt*, Ing. Arch **29**, 82—92 (1960).

FLUIDE MAGNETICE. STRUCTURA ŞI UNELE APLICAŢII

de I. ANTON, L. VÉKÁS, I. POTENCZ, D. BICA

Institutul Politehnic „Traian Vuia", Timişoara

Se prezintă rezultate experimentale privind modificările structurale induse în fluide magnetice de acţiunea cîmpurilor magnetice neuniforme intense, care conduce la creşterea locală a magnetizaţiei şi vîscozităţii efective. Variaţia magnetizaţiei s-a evidenţiat prin determinarea capacităţii de etanşare a unui inel magnetofluidic, iar variaţia vîscozităţii prin măsurarea momentului de frecare datorat unor inele similare, ambele în funcţie de durata acţiunii cîmpului magnetic neuniform. Se discută consecinţele acestor efecte asupra utilizării fluidelor magnetice în etanşări şi alte aplicaţii.

I. INTRODUCERE

Dacă într-un fluid magnetic fracţia volumică φ a particulelor magnetice, presupuse identice ca formă şi dimensiune, este redusă ($\varphi \ll 1$) şi dacă energia agitaţiei termice este preponderentă faţă de cea a interacţiunii dipolare, iar grosimea stratului de stabilizant permite neglijarea forţelor atractive de tip London, atunci un astfel de fluid magnetic „ideal", cvasiomogen şi izotrop, poate fi descris de teoria lui Langevin. Rezultă expresia magnetizaţiei M în funcţie de intensitatea cîmpului magnetic H şi temperatura T, respectiv de concentraţia şi momentul magnetic al particulelor, iar în aproximaţia cvasistaţionară, ecuaţiile de bază ale mişcării fluidului magnetic [1—5].

În cazul fluidelor magnetice reale, particulele magnetice au formă şi dimensiuni diferite, sînt anizotrope din punct de vedere magnetic şi interacţionează între ele [6—15]. În prezenţa unui cîmp magnetic extern este favorizată formarea lanţurilor deschise sau a aglomeratelor mai complexe de formă alungită. În cîmp magnetic neuniform, situaţie întîlnită într-o serie de aplicaţii tehnice, apar variaţii mari ale concentraţiei particulelor funcţie de punct ce influenţează stabilitatea ferofluidului [16]. În acest condiţii, din punct de vedere termodinamic, fluidul se consideră descompus în două faze distincte [17], cu magnetizaţii diferite [18].

Modificările structurale induse de acţiunea cîmpurilor magnetice neuniforme sînt semnificative mai ales în cazul etanşărilor magnetofluidice în perioadele de repaus [19, 20], la unele tipuri de lagăre şi amortizoare cu fluid magnetic sau la separatoare magnetofluidice cu gradient ridicat. Pe lîngă variaţii locale ale magnetizaţiei, formarea aglomeratelor ca urmare a interacţiunilor dipolare, conduce la procese suplimentare de disipaţie, respectiv, la creşterea substanţială a vîscozităţii efective a ferofluidului [21]. Lanţurile de particule, uneori foarte lungi, ce cuprind chiar 10^6—10^7 particule monodomenice, influenţează sensibil mişcarea fluidelor magnetice sub acţiunea cîmpurilor magnetice rotitoare sau alunecătoare [22, 23] şi conduc la o variaţie neliniară a vitezei unghiulare de rotaţie a ferofluidului funcţie de viteza unghiulară a cîmpului magnetic.

Rezultă din cele de mai sus că în multe situaţii concrete aproximarea fluidului magnetic cu un mediu continuu cu proprietăţi magnetice

St. cerc. Mec. Apl., Tom 43, Nr. 5—6, 1984, P. 451—459

nu este justificată şi ca urmare trebuie să se ţină cont de microstructura acestuia.

Distribuţia dimensională a particulelor, ce rezultă din micrografiile electronice ale ferofluidelor, determină viteza de formare şi dimensiunea de echilibru a lanţurilor şi a altor aglomerate. Corelarea parametrilor distribuţiei cu caracteristicile lanţurilor prezintă importanţă deosebită pentru perfecţionarea procedeelor de obţinerea ferofluidelor, astfel că s-au elaborat unele modele teoretice [6, 7, 9, 13, 14], considerînd cîmpul magnetic aplicat uniform, corespondenţa rezultatelor teoretice cu o serie de date experimentale [10—12, 14] nefiind încă satisfăcătoare, datorită dificultăţilor atît teoretice, cît şi în ce priveşte obţinerea şi interpretarea unor rezultate experimentale.

Necesitatea cunoaşterii în detaliu a comportării fluidelor magnetice în cîmp magnetic neuniform intens este impusă de o serie de aplicaţii urmărite la I. P. Timişoara [24, 25], în special în domeniul etanşărilor şi separatoarelor cu fluid magnetic [26—29]. În această lucrare se prezintă unele rezultate privind efectul solicitărilor cîmpurilor magnetice neuniforme asupra cîtorva tipuri de fluide magnetice, stabilizate în mod diferit.

II. COMPORTAREA FLUIDELOR MAGNETICE ÎN ÎNTREFIERUL ETANŞĂRILOR

Din figura 1 rezultă că în întrefierul unei etanşări magnetofluidice cîmpul magnetic este foarte neuniform. În construcţiile obişnuite gradientul cîmpului atinge valoarea de 10^9 A/m^2, astfel că fluidul magnetic se poate destabiliza [20], în special dacă etanşarea rămîne în repaus timp îndelungat. Într-adevăr, durata acţiunii cîmpului neuniform asupra ferofluidului aflat în repaus, neperturbat, influenţează în mare măsură lungimea lanţurilor, respectiv dimensiunea aglomeratelor mai complexe [13].

Migrarea particulelor magnetice către zonele de cîmp magnetic intens contribuie la creşterea locală a magnetizaţiei fluidului, pe seama scăderii acesteia în zonele unde intensitatea cîmpului magnetic e relativ redusă [19]. Din expresia capacităţii maxime de etanşare a unui etaj,

$$\Delta p_{max} = \mu_0 \int_{H_{min}}^{H_{max}} M(H)\mathrm{d}H \cong \mu_0 M_0 (H_{max} - H_{min}) \approx \mu_0 M_0 H_{max}, \qquad (1)$$

rezultă că o creştere a magnetizaţiei în zona de cîmp maxim va conduce la o mărire corespunzătoare a capacităţii de etanşare, ce poate fi determinată experimental. Taketomi [19] a pus în evidenţă această creştere în timp a diferenţei maxime de presiune suportată de un etaj singular, care prezintă la început o variaţie liniară în funcţie de $\sqrt{t}$, urmată de o porţiune aproximativ constantă, iar apoi de o nouă creştere cu caracter liniar. Modelul teoretic elaborat se bazează pe difuzia particulelor magnetice în

lichidul de bază vîscos către zona de întrefier minim, unde $H = H_{max}$. Rezultă [19] :

$$\frac{\Delta p(t) - \Delta p(0)}{\Delta p(0)\sqrt{t}} = \frac{M_0(t) - M_0(0)}{M_0(0)\sqrt{t}} = \quad . \tag{2}$$

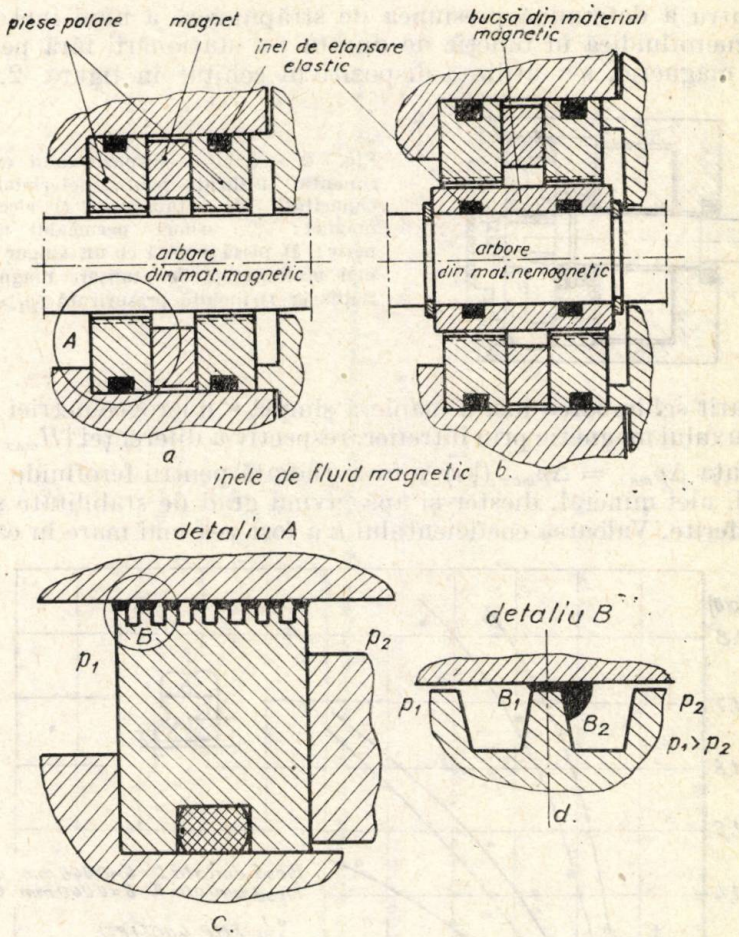


Fig. 1. — Etanşarea magnetofluidică multietajată : *a*) arbore permeabil magnetic ; *b*) arbore nemagnetic ; *c*) formarea inelelor de ferofluid în întrefierul etanşării ; *d*) deformarea unui inel sub acţiunea diferenţei de presiune $p_1 - p_2 > 0$.

Raportul k, a cărui expresie concretă se dă în [19], depinde de microgeometria etajului de etanşare, resp ctiv de gradientul cîmpului magnetic şi de proprietăţile ferofluidului. Formu a (2) explică doar prima porţiune de creştere liniară a lui Δp funcţie de $\sqrt{t}$. În [19] s-a studiat în special influenţa gradientului cîmpului magnetic, variindu-se microgeometria etăjului. S-a observat că, aşa cum era de aşteptat pe baza modelului adoptat, k se modifică proporţional cu grad H.

Dacă menţinem microgeometria neschimbată, adică grad $H = \text{const.}$, atunci graportul k va caracteriza gradul de stabilitate al ferofluidului în cîmp magnetic neuniform. Prin urmare, determinarea experimentală a dependenţei $\Delta p_{max} = \Delta p_{max}(\sqrt{t})$, respectiv a raportului k, pentru diferite ferofluide, oferă posibilitatea comparării lor din punct de vedere al stabilităţii.

Pentru a determina presiunea de străpungere a unui inel de etanşare magnetofluidică în funcţie de durata t a staţionării fără perturbaţii în cîmp magnetic, s-a utilizat dispozitivul schiţat în figura 2. Acesta

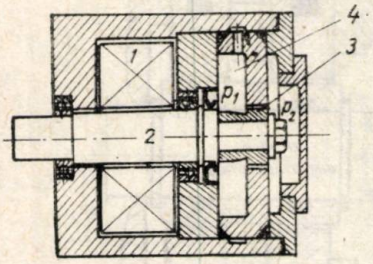


Fig. 2. — Schiţa dispozitivului experimental utilizat pentru determinarea capacităţii de etanşare: *1*) electromagnet; *2*) arbore permeabil magnetic; *3*) piesă polară cu un singur sau mai multe etaje de etanşare magnetofluidică; *4*) incintă presurizată ($p_1 > p_2$).

permite atît schimbarea într-o manieră simplă a microgeometriei etajului, cît şi a fluxului magnetic prin întrefier, respectiv a diferenţei ($H_{max} - H_{min}$). Dependenţa $\Delta p_{max} = \Delta p_{max}(\sqrt{t})$ a fost studiată pentru ferofluide pe bază de petrol, ulei mineral, diester şi apă, avînd grad de stabilitate şi proveniență diferite. Valoarea coeficientului k a fost cea mai mare în cazul flui-

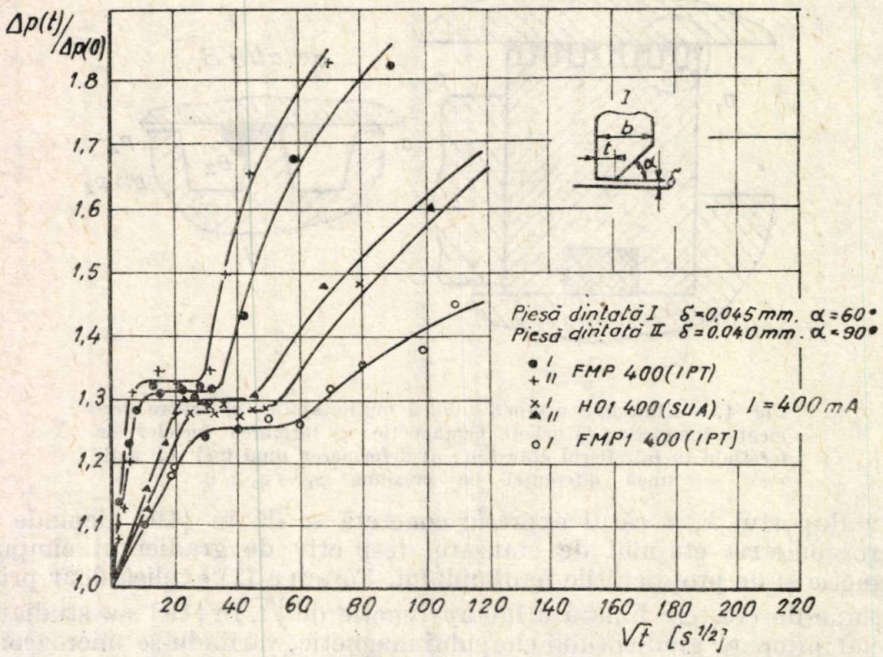


Fig. 3. — Variaţia în timp a capacităţii maxime de etanşare pentru trei tipuri de ferofluide pe bază de petrol.

delor pe bază de apă, ce denotă stabilitatea mai redusă a acestora în comparaţie cu alte tipuri de ferofluide, caracteristică determinată şi prin alte metode experimentale [14]. Valoarea k cea mai redusă s-a obţinut pentru ferofluidele pe bază de diester, ceea ce se explică atît prin faptul că vîscozitatea lor e mare, cît şi prin dubla acoperire cu stabilizant a particulelor magnetice [30].

S-a urmărit în mod special stabilitatea ferofluidelor de acelaşi tip, dar preparate în mod diferit. În figura 3 se prezintă evoluţia în timp a presiunii de străpungere pentru trei ferofluide pe bază de petrol, toate avînd magnetizaţia de saturaţie de aproximativ $3{,}2 \times 10^4$ A/m (400 Gs), dar stabilizate în mod diferit. Pentru a urmări şi influenţa modificării gradientului de cîmp datorită schimbării microgeometriei etajului, s-a lucrat cu două piese polare diferite. Valorile coeficientului k obţinute din prima porţiune liniară a curbelor din figura 3 sînt prezentate în tabelul următor.

Tabelul 1

Valorile coeficientului k pentru ferofluide pe bază de petrol

Ferofluid	α(grade)	$k(s^{-1/2})$
FMP*	60	$3{,}37 \times 10^{-2}$
	90	$5{,}00 \times 10^{-2}$
FMH01**	60	$1{,}17 \times 10^{-2}$
	90	$1{,}40 \times 10^{-2}$
FMP1*	90	$1{,}00 \times 10^{-2}$

* Produs I. P. Timişoara.
** Produs Ferrofluidics (S.U.A.)

Lichidul de bază şi magnetizaţia de saturaţie ale ferofluidelor experimentate au fost la fel, astfel că diferenţele dintre valorile k se datoresc gradului de stabilitate diferit al acestora. Astfel, ferofluidele FMP1 şi FMHO1 sînt cele mai stabile dintre cele studiate. Valorile k sînt mai mari pentru etajul cu $\alpha = 90°$, cu grad H mai ridicat, în concordanţă cu modelul prezentat în [19], ceea ce denotă o solicitare mai pronunţată a ferofluidelor în acest caz. Prin urmare, optimizarea geometriei etajelor de etanşare trebuie să asigure nu numai o diferenţă de presiune maximă etanşată pe unitatea de lungime a etanşării, ci şi un grad de solicitare a ferofluidului utilizat, compatibil cu gradul de stabilitate al acestuia [31].

Metoda prezentată s-a dovedit a fi eficientă pentru studiul comparativ al stabilităţii ferofluidelor.

III. MODIFICAREA VISCOZITĂŢII EFECTIVE A FLUIDELOR MAGNETICE ÎN CÎMP MAGNETIC NEUNIFORM

Formarea lanţurilor de particule şi a aglomeratelor mai complexe în prezenţa unui cîmp magnetic neuniform conduce la procese de disipaţie suplimentare [21] şi deci la o mărire considerabilă a viscozităţii efective

a fluidului magnetic. Descrierea cantitativă a contribuţiei aglomeratelor la procesele disipative din ferofluide este deosebit de dificilă deoarece dimensiunea medie a acestora depinde atît de intensitatea şi distribuţia spaţială a cîmpului magnetic, de durata acţiunii acestuia, cît şi de starea de mişcare a fluidului, în particular de viteza de frecare aplicată. Spre deosebire de situaţia reală, în majoritatea lucrărilor se presupune că particulele magnetice nu interacţionează între ele şi au aceeaşi dimensiune şi formă, iar cîmpul magnetic aplicat se consideră uniform [21].

Viteza de variaţie a viscozităţii efective în funcţie de durata acţiunii cîmpului magnetic neuniform poate constitui un indicativ foarte sensibil al modificărilor structurale ce apar în ferofluid, respectiv al gradului de stabilitate. În particular, din punct de vedere aplicativ prezintă interes urmărirea modificărilor structurale ce apar într-un inel magnetofluidic de etanşare. În acest scop s-a construit dispozitivul din figura 4, compus dintr-o masă seismică, al cărei circuit magnetic duce la formarea unor inele de ferofluid în mod similar cu cele din etanşări şi o carcasă uşoară. Masa seismică este suspendată pe perne de aer etanşate de inelele de ferofluid, astfel că dispozitivul va avea caracteristicile unui amortizor, ce depind de viscozitatea efectivă a lichidului ce formează inelele. Datorită aceluiaşi mecanism de migrare a particulelor şi de formare a aglomeratelor, care a condus la mărirea locală a magnetizaţiei şi la creşterea capacităţii de etanşare, viscozitatea efectivă va creşte cu durata acţiunii cîmpului magnetic neuniform şi vor apare modificări în caracteristicile de amortizare ale dispozitivului. Pentru determinarea lor s-a utilizat sistemul de măsură al unui viscozimetru Rheotest-2 (fig. 4). Oscilogramele înregis-

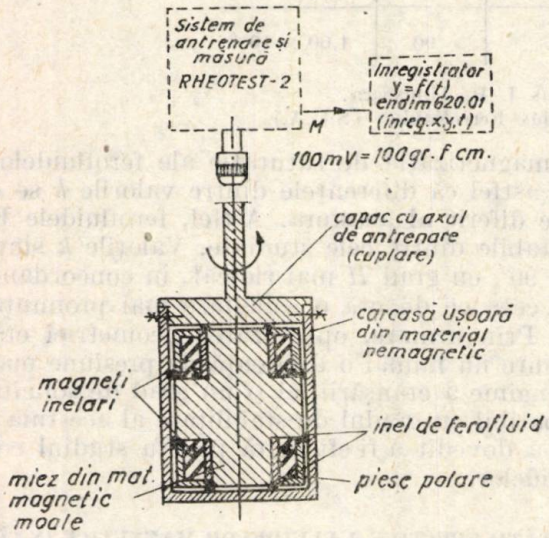

Sistem de antrenare şi măsură RHEOTEST-2
M
Înregistrator y=f(t) endim 620.01 (înreg. x,y,t)
100 mV = 100 gr. f cm.
capac cu axul de antrenare (cuplare)
carcasă uşoară din material nemagnetic
magneţi inelari
inel de ferofluid
miez din mat. magnetic moale
piese polare

Fig. 4. — Dispozitiv pentru studiul variaţiei viscozităţii efective a unor inele de ferofluid sub acţiunea cîmpului magentic neuniform.

trate pentru o anumită treaptă de turaţie a arborelui (0—45 rot/min), la diferite intervale de timp de la introducerea ferofluidului în dispozitiv, au permis determinarea dependenţei momentului de frecare M_f, ce caracterizează cuplajul vîscos dintre carcasă şi miez şi a timpului de amor-

tizare t_a al oscilaţiilor sistemului, în funcţie de durata acţiunii cîmpului asupra inelelor de ferofluid (fig. 5). Dacă se compară curbele $t_a(t)$ cu curba $t_a(\eta)$ (fig. 6), obţinută cu ferofluide de viscozitate diferită la $t \lesssim 1$

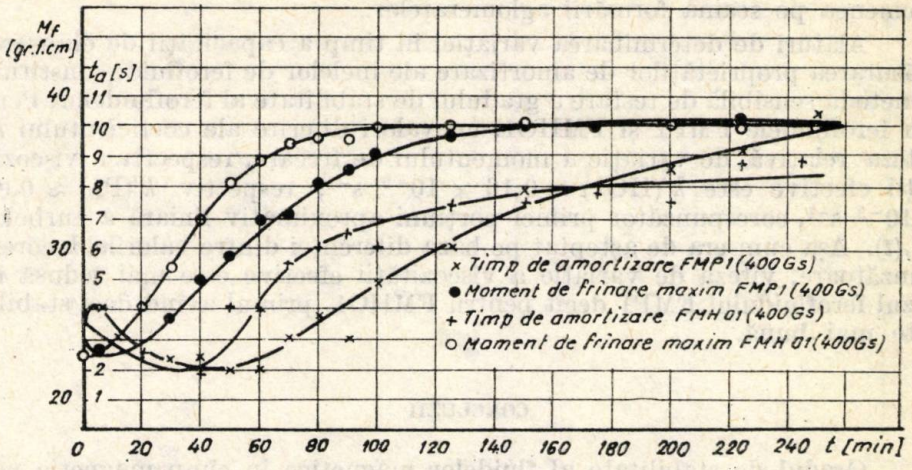


Fig. 5. — Variaţia momentului de frecare M_f şi a timpului de amortizare t_a în funcţie de durata acţiunii cîmpului magnetic neuniform.

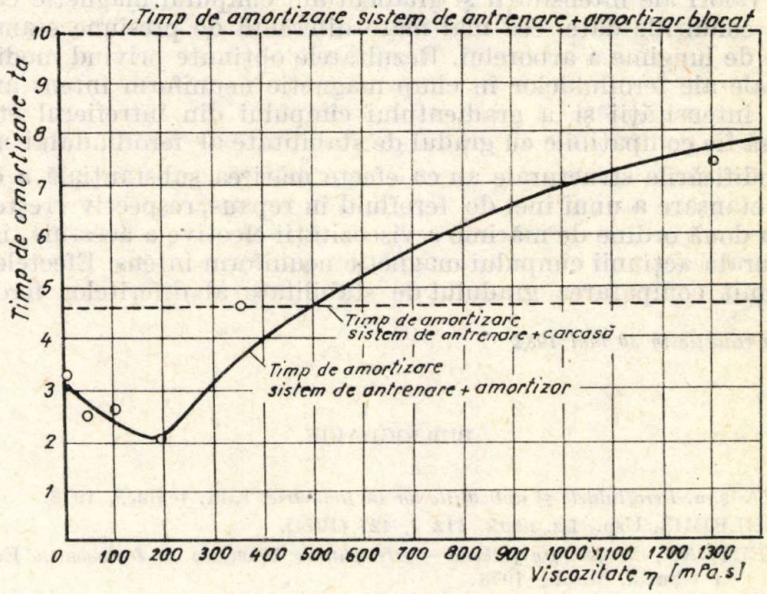


Fig. 6. — Dependenţa timpului de amortizare t_a de viscozitatea ferofluidului, η (măsurători efectuate la $t \lesssim 1$ min).

min, se remarcă o creştere substanţială a viscozităţii efective în funcţie de durata acţiunii cîmpului, ce denotă modificări structurale importante. De exemplu pentru $t \simeq 40$ min, rezultă $\Delta\eta/\eta \simeq 200$ cP/6 cP ≈ 33, iar

pentru $t \simeq 140$ min se ajunge la $\Delta\eta/\eta \simeq 1300$ cP/6 cP ≈ 216. O creştere similară a viscozităţii efective, de aproximativ 300 de ori, a fost observată în experienţe privind mişcarea unor ferofluide pe bază de toluen şi cobalt în cîmp magnetic rotitor [22]. Mărirea viscozităţii efective a fost pusă de asemenea pe seama formării aglomeratelor.

Alături de determinarea variaţiei în timp a capacităţii de etanşare, măsurarea proprietăţilor de amortizare ale inelelor de ferofluid, constituie o metodă sensibilă de testare a gradului de stabilitate al ferofluidelor. Pentru ferofluidele FMP1 şi FMHO1, cu valori diferite ale coeficientului k, viteza relativă de variaţie a momentului de frecare, respectiv a viscozităţii efective este $k'(\mathrm{HO1}) \approx 0{,}16 \times 10^{-3}$ s^{-1}, respectiv $k'(\mathrm{P1}) \approx 0{,}09 \times 10^{-3}$ s^{-1}, corespunzător primei porţiuni aproximativ liniară a curbelor $M_f(t)$. Aşa cum era de aşteptat pe baza diferenţei dintre valorile k corespunzătoare, viteza de variaţie a viscozităţii efective este mai redusă în cazul ferofluidului FMP1 decît pentru FMHO1, primul avînd deci stabilitate mai bună.

CONCLUZII

Gradul de stabilitate al fluidelor magnetice în cîmp magnetic neuniform este hotărîtor pentru utilizarea lor în aplicaţii, îndeosebi în etanşări magnetofluidice. Optimizarea geometriei întrefierului etanşării conduce la valori ale intensităţii şi gradientului cîmpului magnetic care asigură, în condiţiile date, cea mai mare diferenţă de presiune etanşată pe unitatea de lungime a arborelui. Rezultatele obţinute privind modificările structurale ale ferofluidelor în cîmp magnetic neuniform intens arată că valorile intensităţii şi a gradientului cîmpului din întrefierul etanşării trebuie să fie compatibile cu gradul de stabilitate al ferofluidului utilizat.

Modificările structurale au ca efecte mărirea substanţială a capacităţii de etanşare a unui inel de ferofluid în repaus, respectiv creşterea cu unul sau două ordine de mărime a viscozităţii efective a acestuia, în funcţie de durata acţiunii cîmpului magnetic neuniform intens. Efectele amintite permit compararea gradului de stabilitate al diferitelor ferofluide.

Primită la redacţie la 30 mai 1984

BIBLIOGRAFIE

1. E. LUCA ş. a. *Ferofluidele şi aplicaţiile lor în industrie*, Edit. tehnică, 1978.
2. M. I. SHLIOMIS, Usp. fiz. nauk, **112** *3*, 427 (1974).
3. V.E. FERTMAN, *Magnitnîie jidkosti — estetvennaia konvektia i teploobmen* Ed. Nauk i tehnika, Minsk, 1978.
4. S. W. CHARLES, J. POPPLEWELL, în *Ferromagnetic materials*, vol. 2, p. 509, Ed. E. P. Wolfarth, North-Holland, 1980.
5. V. V. GOGOSOV, V. A. NALETOVA, G. A. SAPOŞNIKOVA, *Ghidrodinamika namagnicivaiuşcihsia jidkostei*, Itoghi nauki i tehniki, Mehanika jidkosti i gaza, **16**, 76 (1981).
6. P. G. de GENNES, P. A. PINCUS, Phys. Kondens. Mater, **11**, 89 (1970).
7. E. E. BIBIK, Magnitnaia Ghidrodinamika, *3*, 25 (1973).

8. E. E. BIBIK în vol. *Fiziceskie svoistva i ghidrodinamika dispersnih ferromagnetikov*, Sverdlovsk, 1977, p. 3.
9. P. C. JORDAN, Molec. Phys, **25**, 961 (1973) şi **38**, 769 (1979).
10. C. F. HEYES, J. Coll. Int. Sci., **52**, 239 (1975).
11. C. F. HAYES, S. R. HWANG, J. Coll. Int. Sci., **60**, 443 (1977).
12. A. MARTINET, Rheol. Acta, **13**, 260 (1974).
13. E. A. PETERSON, D. A. KRUEGER, J. Coll. Int. Sci. **62**, 24 (1977).
14. D. A. KRUEGER, IEEE Trans. on Magnetics, **MAG – 16**, *2*, 251 (1980).
15. R.W . CHANTRELL, A. BRADBURY, J. POPPELWELL, S.W . CHARLES, J. Phys. D., Appl. Phys, **13**, *1*, 119 (1980).
16. J. POPPLEWELL S. W. CHARLES, IEEE Trans. on Magnetics, **MAG-17**, *6*, 2923 (1981).
17. A. O. TSEBERS, Magnitnaia Ghidrodinamika, *2*, 42 (1982) şi *3*, 3 (1983).
18. V. V. CEKANOV ş. a., Magnitnaia Ghidrodinamika, *1*, 3 (1984).
19. S. TAKETOMI, Jap. Appl. Phys., 1980, **19**, *10*, 1929.
20. E. E. BIBIK, O. V. BUZUNOV, în *Ghidrodinamika i teplofizika magnitnîh jidkostei*, Riga, 1980, p. 191.
21. V. M. SUIAZOV, Magnitnaia Ghidrodinamika, *2*, 3 (1982), *3*, 3 (1982). şi *2*, 3 (1983).
22. A. MARTINET, în *Proc. Advanced Course and Workshop on Thermomecanics of Magnetic Fluids*, Udine, 1977, Hemisphere Publ. Co., 1978.
23. I. ANTON, L. VÉKÁS, I. POTENCZ, E. SUCIU, IEEE Trans. on Magnetics, 1980, **MAG-16** *2*, 283, şi în *Aplicaţiile ferofluidelor*, I. P. Timişoara, 1980, p. 71.
24. I. ANTON ş. a. Memoriile Secţiilor Ştiinţifice ale Acad. RSR, seria IV, **III**, *2*, 94 (1980).
25. I. ANTON, L. VÉKÁS, I. POTENCZ, E. SUCIU, în *Proc. VI-th Conf. Fluid Machinery*, Budapesta 1979, vol. 1, 29, Akademiaï Kiadó, 1979.
26. I. ANTON, I. POTENCZ, E. SUCIU, L. VÉKÁS, în *Proc. VII-th Int. Conf. on Sealing Techn.*, Budapest, 1982, vol. 1, 189, 1982.
27. I. ANTON şi col., Protocol de cercetare, colab. IPT-CNST, 1980, 1981 –
28. I. ANTON şi col., Protocol de cercetare, colab., IPT-MEI, 1982.
29. I. ANTON şi col., Protocol de cercetare, colab. IPT-IMPF, Odorhei, (CUPSIC Bucureşti), 1982, 1983.
30. R. CHUBACHI, T. SATO, J. SHIMOIIZAKA, în *Ghidrodinamika i teplofizika magnitnîh jidkostei*, Riga, 1980, p. 35.
31. E. E. BIBIK, O. V. BUZUNOV, în *Ghidrodinamika i teplofizika magnitnîh jidkostei*, Riga, 1980, p. 191.

CONTRIBUȚII ÎN PROBLEMA JETURILOR FLUIDE TURBULENTE

de CONSTANTIN IAMANDI

Institutul de Construcții, București

Multe sînt procesele tehnologice actuale ce folosesc jeturile fluide sub diferite forme și cu diferite caracteristici dinamice și termice. Este suficient să amintim aplicarea acestor forme de mișcare a fluidelor în cazul ventilațiilor și climatizărilor, la pulverizarea unor produse chimice, în amenajări hidroameliorative, în hidraulica industrială, în probleme de poluarea apelor sau atmosferei sau în procedeele de epurare a apelor uzate.

În cercetarea jeturilor fluide am încercat în egală măsură să cunoaștem în detaliu fenomenologia, pe care să o reprezentăm apoi matematic și fizic. În acest sens, cercetările noastre în acest domeniu au fost atît teoretice, cît și experimentale, urmărind cu precădere utilizarea practică a rezultatelor obținute.

Jetul definit ca masă individualizată de fluid ce se mișcă într-un spațiu ocupat de alt fluid, a format obiectul a foarte numeroase cercetări prezentate în literatura de specialitate și a căror analiză a format punctul de plecare al investigațiilor noastre.

Obiectul unor prime cercetări l-a constituit comportarea jetului turbulent circular izoterm, refulat perpendicular pe un curent paralel cu cîmp de viteză uniform (fig. 1). Zona investigată cu ajutorul unei instalații special realizată a fost cuprinsă între 400 — 1200 mm, adică între 130 și 529 diametre efective ale jeturilor refulate.

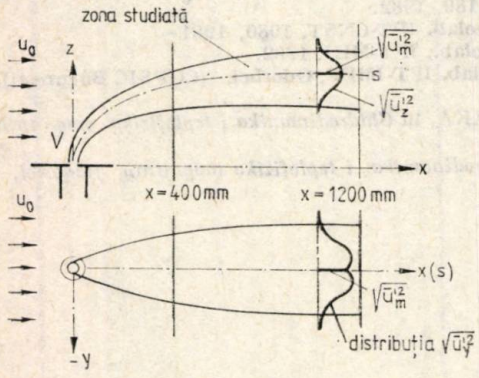


Fig. 1

Tehnica de măsură folosită, dictată strict de natura, mărimea și domeniul de variație al caracteristicilor, a constituit preocuparea importantă a investigației. A fost studiată [1], prin folosirea simultană a diverse tehnici de măsură, variația fiecărui parametru în parte, durata de intrare în regim permanent, abaterea momentană și pe perioade mai îndelungate față de valoarea medie, timpul minim de măsură necesar în cazul mărimilor pulsatorii (în cazul pulsațiilor de viteză acesta a fost de 50 secunde). În marea majoritate a cazurilor s-a urmărit semnalizarea optică și eventual înregistrarea mărimilor. Valorile măsurate rezultînd ca medie a 10—15 înregistrări succesive, integrate fiecare timp de 10 secunde cu ajutorul integratorului universal Counter Times Berlin. Controlul constanței vitezei curentului uniform s-a făcut prin presiunea dinaintea ajutajului de refulare cu ajutorul traductorului capacitiv de tip Baratron și amplificatorului Burlington — Massachussetts, care permite citirea cu o precizie de 3×10^{-5} mm Hg ca și semnalizarea optică cu ajutorul unor voltmetre digitale. Pentru măsurări de viteză și pulsații ale acesteia s-a folosit termoanemometrul Disa, iar spectrul de frecvență a fost evidențiat cu ajutorul unui analizator de frecvență Bruel & Kjoer.

St. Cerc. Mec. Apl., Tom 43, Nr. 5—6, 1984, P. 460—483

Cercetările experimentale s-au axat pe măsurători de viteză medie, pulsații ale acesteia, spectre de turbulență și măsurători de presiune, depășind ca amploare cadrul altor cercetări similare cunoscute la etapa respectivă. Rezultatele obținute au permis o confruntare largă cu cele cunoscute din literatura de specialitate, introducerea unor ipoteze noi ca și determinarea unor relații cantitative referitoare la legile de distribuție sau de variație a mărimilor studiate.

Măsurătorile de presiune totală, efectuate cu un tub Pitot de 0,6 mm, în scopul identificării jetului în ansamblul curgerii, prin folosirea unor tăieturi în diverse planuri verticale, orizontale și chiar diagonale (cu

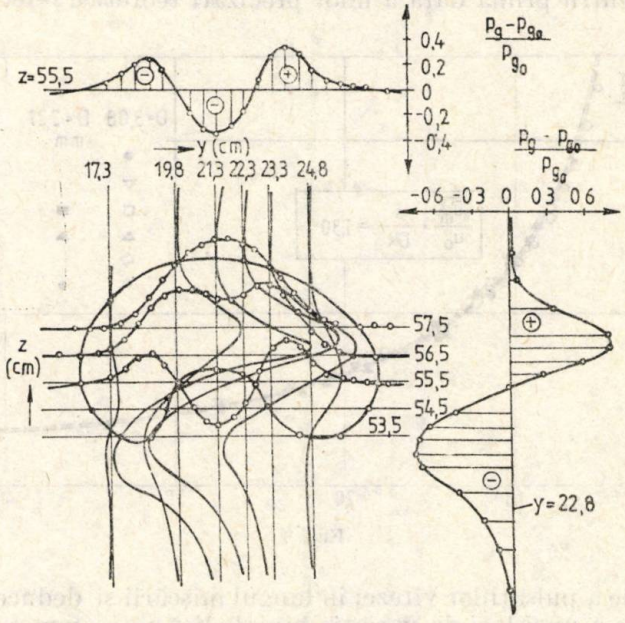


Fig. 2

pasul dintre punctele de măsură de 0,5 cm) (fig. 2) au evidențiat existența unei ușoare suprapresiuni deasupra jetului și o stare depresionară sub el, care tinde să se atenueze pe măsura depărtării de orificiu.

Prin reprezentare adimensională sub forma $(p_g - p_{g0})/p_{g0}$, unde p_g și p_{g0} sînt presiunile totale în curgerea cu și fără jet, și luînd ca definiție pentru marginile jetului locul geometric al punctelor pentru care acest raport este egal cu zero (sau în cazul în care nu se anulează, cu valoarea minimă) a rezultat forma de „rinichi" a secțiunii sale transversale prezentată în figura 2.

Considerîndu-se drept axă a jetului locul geometric al punctelor cu presiunea maximă în secțiunea considerată, s-a constatat că pe această axă se suprapun și valorile maxime ale vitezei medii și ale pulsațiilor acestora în plan vertical. Se constată că această axă este situată mai aproape de marginea superioară și nu la jumătate cum indică cercetătorii, care

recomandă relaţii parametrice pentru traiectorie, obţinute pe baza vizualizării jetului cu fum.

Rezultatele experimentale referitoare la viteza medie în axa jetului curbat ($\bar{u}_m$), la profilele pulsaţiilor în plan vertical şi orizotal (u'_z, u'_y) în axa jetului, la semigrosimea jetului în plan orizontal, au permis o confruntare riguroasă cu rezultatele cunoscute, exprimarea unor puncte de vedere în probleme încă controversate, confirmarea sau infirmarea unor legi globale ca şi precizarea unor elemente cu caracter de noutate. În acest sens se pot enumera: punerea în evidenţă a similitudinii profilelor de oscilaţii ale vitezei în direcţia mişcării prin folosirea semigrosimii $y_{0.5}$, confirmarea ipotezei dezvoltării asimptotice a semigrosimii jetului curbat, verificarea pentru prima dată a unor precizări teoretice referitoare la mo-

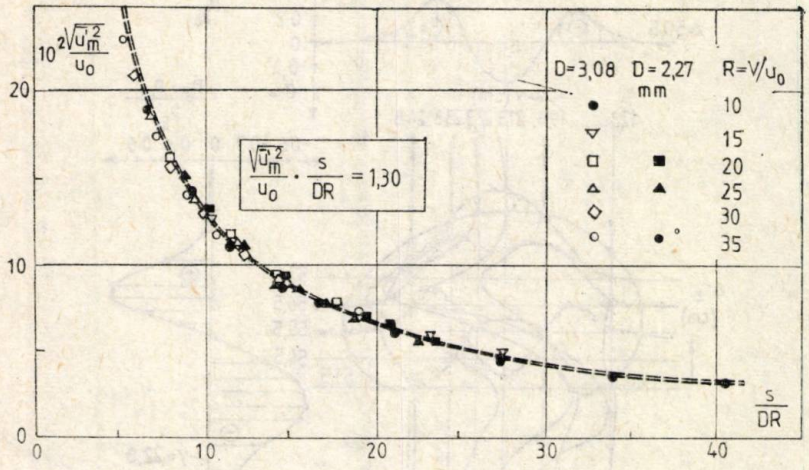


Fig. 3

dul de variaţie a pulsaţiilor vitezei în lungul mişcării şi deducerea pe baze experimentale a unei legi de variaţie hiperbolică a acestora sub forma prezentată în figura 3. De asemenea, s-au dedus legi de variaţie pentru semigrosimea jetului şi, respectiv, pentru traiectoria jetului curbat. Este de subliniat faptul că faţă de metodele existente de prelucrare şi interpretare a datelor experimentale prin raportare la coordonatele carteziene, reprezentarea folosită de noi prin introducerea lungimii traiectoriei s permite obţinerea unor împrăştieri mult mai mici a datelor ceea ce precizează clar caracterul lent de atenuare a vitezei medii în axa jetului.

Rezultatele cercetării au aplicativitate practică la stabilirea scării modelelor experimentale, la calculul supraînălţării dinamice a gazelor evacuate în atmosferă şi la unele probleme specifice instalaţiilor de ventilare [2].

★

Ulterior cercetărilor prezentate şi la solicitarea producţiei [3], atenţia noastră s-a îndreptat asupra jeturilor termice dezvoltate transversal într-un curent paralel de lichid cu suprafaţă liberă. Pentru această nouă

situație cercetările s-au organizat în două direcții principale: elaborarea unui model de calcul capabil să reprezinte cît mai fidel fenomenologia și efectuarea de măsurători experimentale care să permită atît verificarea modelului matematic, cît și determinarea unor coeficienți de dispersie termică.

Elaborarea modelului matematic a pornit de la ecuațiile generale de transfer de cantitate de mișcare și căldură, obținîndu-se astfel o mărire a gradului de generalizare și implicit a ariei de aplicabilitate a rezultatelor obținute. Prin renunțarea la clasicele ecuații de exprimare a variației impulsului și de conservare a debitului suplimentar de căldură, nu mai este necesară cunoașterea apriori a formelor distribuțiilor transversale de viteză și a diferenței de temperatură. Ecuațiile de bază folosite (Navier-Stokes, de continuitate ca și Fourier-Kirchhoff) au fost puse sub o formă compatibilă și anume ecuațiilor Navier-Stokes li s-a aplicat rotorul, iar în loc de ecuația de continuitate s-a folosit gradientul acesteia. Se obține un sistem de șapte ecuații neliniare cu derivate parțiale de ordinul II ce poate fi pus sub forma generală:

$$\underbrace{\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}(a\Phi)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(a\Phi)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}(a\Phi)\right]}_{\alpha}-$$

$$-\underbrace{b\left(u_x\frac{\partial\Phi}{\partial x}+u_y\frac{\partial\Phi}{\partial y}+u_z\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)}_{\beta}-\underbrace{Idl}_{\gamma}=0.$$

În această exprimare, Φ reprezintă una din necunoscutele u_x, u_y, u_z, Ω_x, Ω_y, Ω_z, T; a, b, Idl — coeficienți determinați funcție de necunoscuta exprimată; α — termenul datorat difuziei termice; β — termenul datorat convecției și γ — termenul datorat surselor termice.

Sistemul se rezolvă numeric, folosindu-se metoda de tip rețea spațială, integrînd fiecare ecuație pe un volum elementar. Se obține un sistem algebric liniar de formă generală:

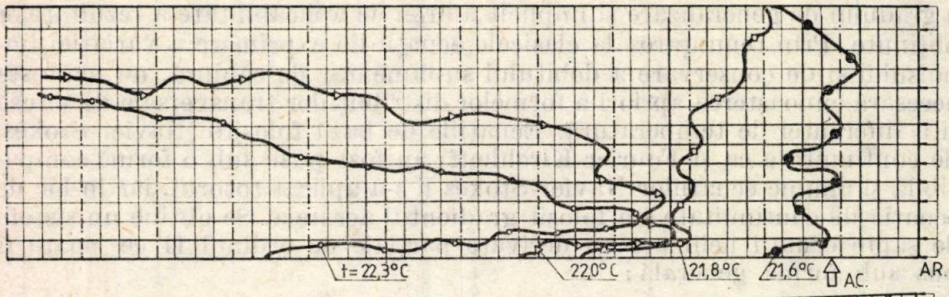
$$\Phi(i,\ j,\ k)=C_1\,\Phi(i+1,\ j,\ k)+C_2\,\Phi(i-1,\ j,\ k)+C_3\,\Phi(i,\ j+1,\ k)+$$

$$+C_4\,\Phi(i,\ j-1,\ k)+C_5\,\Phi(i,\ j,\ k+1)+C_6\,\Phi(i,\ j,\ k-1)-C_7\,Idl(i,\ j,\ k),$$

unde i, j, k reprezintă indicii unui punct al rețelei, iar $C_1 - C_7$ coeficienți diferiți pentru fiecare din cele șapte necunoscute ce apar într-un punct al rețelei. Pentru rezolvarea sistemului liniar s-au folosit metode clasice [4].

Pentru determinări experimentale s-a construit un model fizic cu principalele caracteristici: bazin 4,8 × 1,3 × 0,3 m; debitul curentului paralel cu suprafață liberă, 0 ... 0,1 mc/s (viteze 0 — 0,6m/ s); debitul jetului, 0—0,01 mc/s (viteză inițială jet 0—5 m/s); temperatura curentului paralel, 12—18°C; temperatura jetului cald 12—70°C. Modelul este echipat cu anemometrie cu film cald T.S.I. pentru măsurarea vitezelor și a

structurii turbulente, cu termocuple pentru măsurarea temperaturilor și sistem pentru vizualizarea mișcării și înregistrarea variațiilor măsurate pentru prelucrarea ulterioară. Au fost efectuate de asemenea și fotografieri în infraroșu folosindu-se un echipament special, una din imagini, cuprinzînd o familie de izoterme, fiind prezentată după prelucrare în figura 4.



	v (m/s)	$t_{int.}$ (°C)	$t_{iz.}$ (°C)	înălțimea (cm) h_{am}	h_{av}
Apa rece	0,125	18	22,3 22,0 21,8 21,6	13,2	13
Apa caldă	1,58	30			

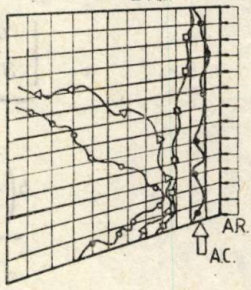


Fig. 4

Rezultatele teoretice și experimentale obținute au importanță aplicativă ca: determinarea distribuției de viteză și temperatură, inclusiv corelarea acestora în scopul prognozării fenomenelor ce apar în cazul pătrunderii unui jet de apă caldă într-un emisar. Pe baza acestora s-au stabilit metode simple de apreciere globală a variațiilor de temperatură ce apar în emisar datorită deversării unor poluanți termici, în scopul combaterii efectelor negative.

★

Tot în domeniul jeturilor neizoterme se înscrie o altă cercetare a noastră cu privire la mișcarea aerului în spațiile ventilate sau încălzite cu aer cald.

În multe situații practice se realizează jeturi libere turbulente circulare sau plane, particularitățile acestora fiind create de dispozitivele prevăzute în orificiile de introducere a aerului și de natura neizotermicității. Permanenta generare de turbulență în jet prin intermediul eforturilor tangențiale ce depind la rîndul lor de turbulența curgerii din amonte, transportată în aval prin difuzie și convecție, face ca dezvoltarea curgerii să fie puternic influențată de „istoria apariției sale". Pe de altă parte, cîmpul de temperatură modifică atît caracteristicile mișcării medii, cît și cele

ale turbulenței. Este perturbat echilibrul dinamic al curgerii și, corespunzător, similitudinea internă.

În cadrul laboratorului de instalații și al laboratorului de hidraulică din Institutul de Construcții București, au fost realizate numeroase cercetări teoretice și experimentale care s-au finalizat cu modele de calcul și cu soluții de orificii de introducere pentru instalații de ventilare cu performanțe îmbunătățite și care au fost deja introduse în proiecte directive, prescripții de calcul sau cataloage de produse tipizate.

Au fost îndeosebi studiate de noi jeturile turbulente circulare calde refulate în jos [5], fiind pusă în evidență o structură particulară a curgerii. Sub acțiunea forței portante de sens contrar impulsului, acesta se anulează la un anumit nivel plafon pînă la care pătrunde jetul. Potențialul termic relativ ridicat din zona finală (ce depinde de numărul Froude densimetric) conduce la formarea unui curent de întoarcere ce se deplasează în sus în viteze foarte reduse.

Experimentările [6] au arătat o fluctuație continuă a mărimilor medii locale în zonele marginale ale jetului ca și a poziției nivelului plafon, explicabilă prin faptul că jetul propriu-zis plutește într-un mediu cu temperatură mai ridicată decît mediul de la infinit, temperatură ea însăși variabilă funcție de distanța de pătrundere a jetului.

Pentru rezolvarea problemei de curgere și de transfer de căldură s-a elaborat un model global ce include ecuația impulsului, ecuația conservării fluxului de căldură, ipoteze de similitudine ce conduc la o distribuție transversală a vitezelor și diferențelor de temperatură (scrise în raport cu temperatura t_a din zona adiacentă jetului), de tip exponențial:

$$\mathrm{d}I = \mathrm{d}F_a\,; \quad \mathrm{d}Q = 0,$$

$$u = u_{ax} \exp\left[-\chi(r/x)^2\right],$$

$$\Delta t^* = \Delta t^*_{ax} \exp\left[-\sigma\chi(r/x)^2\right],$$

unde $\Delta t^* = t - t_a$ este diferența de temperatură evaluată în raport cu temperatura din zona adiacentă, r, x sînt coordonatele mișcării, u_{ax} și Δt^*_{ax} sînt viteza, respectiv, diferența de temperatură în axa jetului.

Sistemul de ecuații a fost integrat pentru zona stabilizată a curgerii, luînd drept condiții la limită parametrii determinați la sfîrșitul zonei de stabilizare.

S-au obținut astfel legile de variație pentru:

— temperatura axială adimensională $\Delta\bar{t}_{ax} = \Delta t_{ax}/\Delta t_0$:

$$\Delta\bar{t}_{ax} = \frac{\chi(1+\sigma)}{4\bar{x}^2\,\bar{u}_{ax}}\,\frac{T_a}{T_0} - \sigma\,\frac{\Delta t_a}{\Delta t_0},$$

— viteza axială adimensională $\bar{u}_{ax} = u_{ax}/u_0$:

$$\bar{u}^2_{ax}\bar{x}^2 = A - B\int_{\bar{x}_i}^{\bar{x}} \frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\bar{u}_{ax}} + C\int_{\bar{x}_i}^{\bar{x}} \bar{x}^2\,\overline{\mathrm{d}x},$$

unde u_0, Δt_0 sînt viteza, respectiv diferența de temperatură în secțiunea inițială a jetului, $\bar{x} = x/D_0$, este coordonata longitudinală adimensională, iar A, B, C sînt mărimi ce depind de caracteristicile jetului în secțiunea inițială și la sfîrșitul zonei de stabilizare a curgerii.

Ecuația integrală adimensională ce exprimă amortizarea vitezei axiale s-a rezolvat numeric, aplicînd metoda Runge-Kutta de ordinul IV.

Rezultatele teoretice au fost confirmate de măsurători ale cîmpului de viteze și temperaturi conform figurilor 5, 6, 7, 8. Caracteristica de împrăștiere a jetului χ depinde de numărul Reynolds pentru valori $Re < 25\,000$. Valoarea numărului Prandtl turbulent s-a considerat constantă ($\sigma = 0{,}5$), în condițiile în care t_a este funcție de Fr densimetric.

Măsurătorile de viteză s-au realizat cu un termoanemometru cu temperatură constantă, tip DISA. Pentru compensarea efectului de temperatură s-a făcut o tarare a sondelor de măsură la diferite temperaturi, stabilindu-se în plus corecții calculate ale valorilor de tensiune, pentru abateri ale temperaturii locale față de temperatura de tarare care nu au depășit $\pm$ 5°C.

Cercetările experimentale legate de jeturile calde refulate cu diferite unghiuri față de verticală, au pus în evidență curbarea traiectoriei sub influența forțelor portante.

Pentru jeturile circulare s-a stabilit un model de calcul pornind de la un sistem de ecuații care cuprinde:

— ecuația impulsului pe direcție orizontală și verticală:

$$\cos\alpha \int_A \rho v^2 \mathrm{d}A = I_0 \cos\alpha_0,$$

$$\sin\alpha \int_A \rho v^2 \mathrm{d}A = I_i \sin\alpha_i - g \int_{s_i}^{s} \mathrm{d}s \int_A (\rho_\infty - \rho)\, \mathrm{d}A,$$

— ecuația de conservare a debitului suplimentar de căldură:

$$\int_A c_p v\, \Delta t\, \mathrm{d}A = c_p\, \rho_0\, v_0 \cdot \Delta t_0\, A_0,$$

— ecuațiile traiectoriei:

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}s \cos\alpha,$$

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}s \sin\alpha,$$

unde α este unghiul tangentei la traiectoria axei jetului, A — secțiunea transversală a jetului, s — coordonată curbilinie în lungul traiectoriei.

Sistemul de ecuații, completat cu legile de variație transversală a vitezei și diferenței de temperatură ce rezultă din ipotezele de similitudine, a fost integrat numeric, ceea ce a condus la stabilirea tuturor parametrilor curgerii.

Numeroase măsurători utilizînd fotografii ale jetului cald vizualizat cu $TiCl_4$, au confirmat rezultatele calculului numeric.

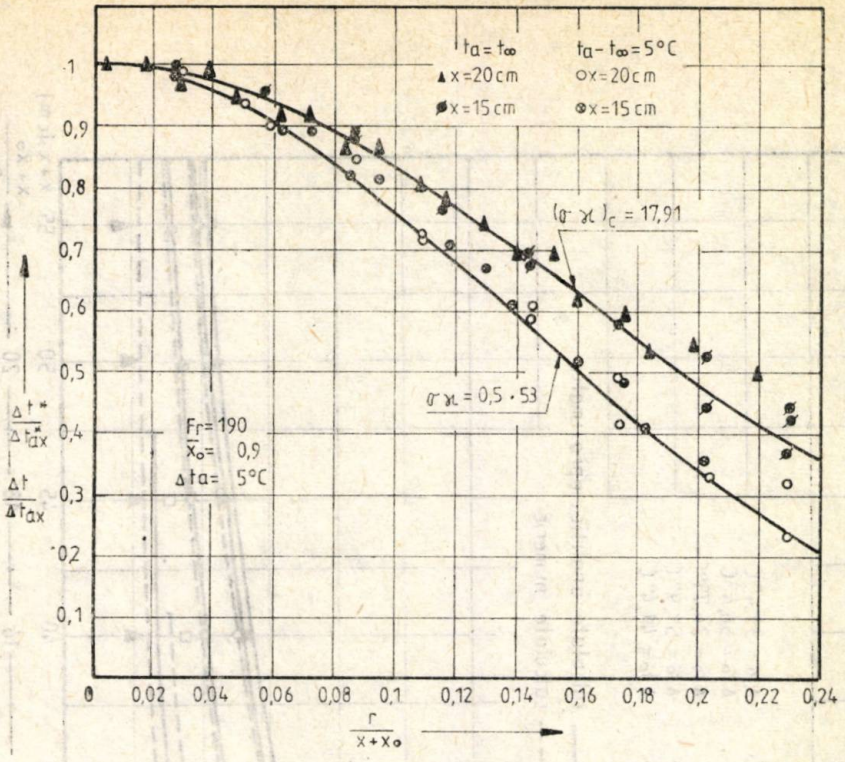

ta = t∞
▲ x=20 cm
● x=15 cm
ta - t∞ = 5°C
○ x=20 cm
⊗ x=15 cm
(σ χt)c = 17,91
σ χt = 0,5 · 53
Fr = 190
x̄o = 0,9
Δta = 5°C
Δt*/Δt*ax
Δt/Δtax
r/(x+xo)

Fig. 5

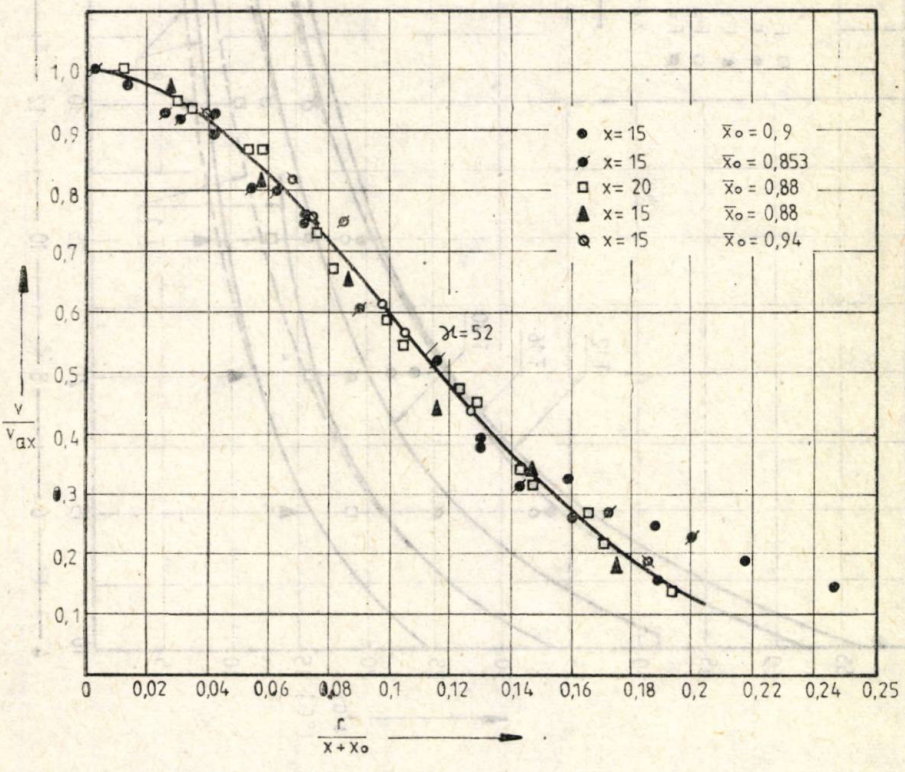

● x= 15 x̄o = 0,9
● x= 15 x̄o = 0,853
□ x= 20 x̄o = 0,88
▲ x= 15 x̄o = 0,88
⊗ x= 15 x̄o = 0,94
χt = 52
v/vax
r/(x+xo)

Fig. 6

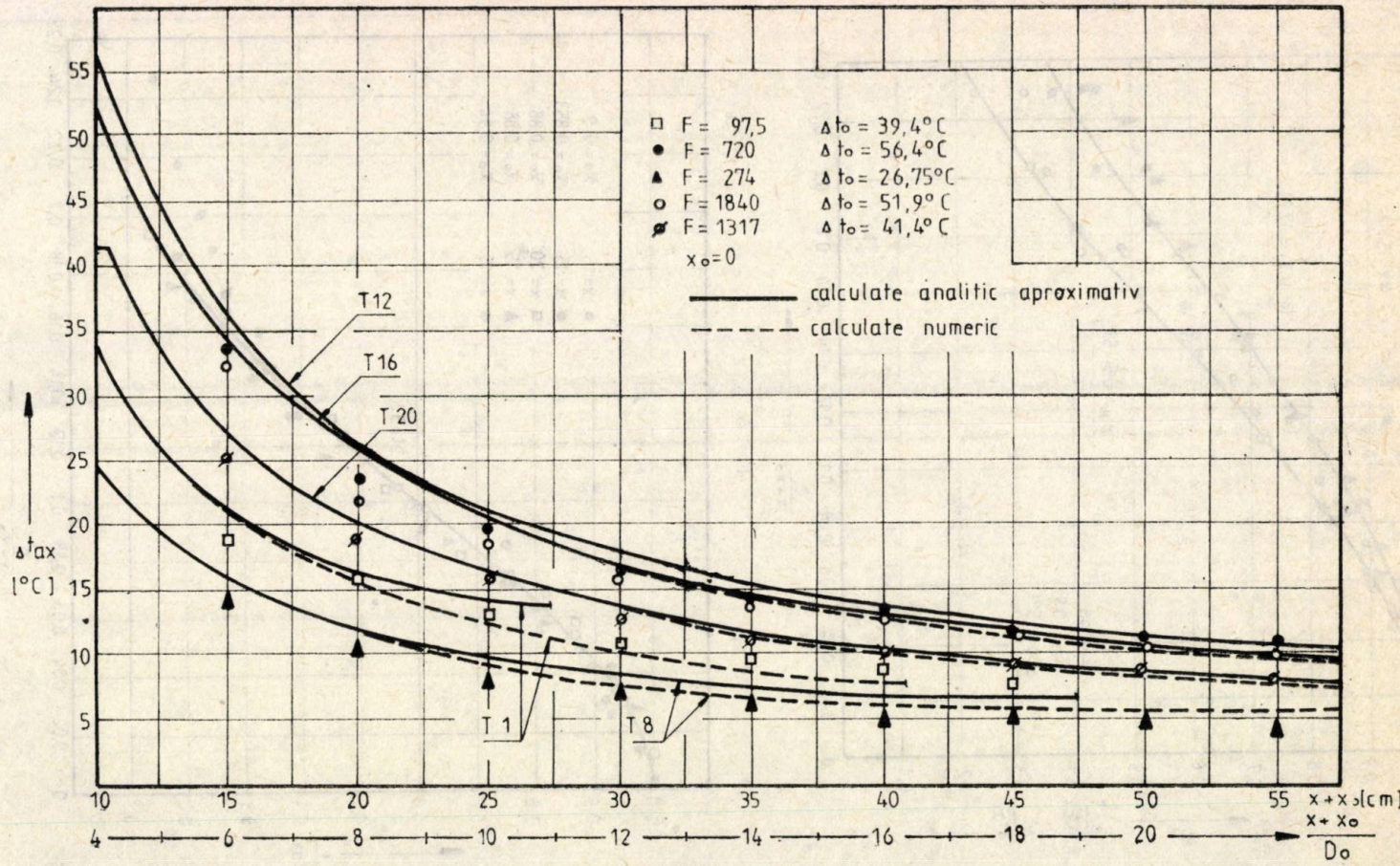

□ F = 97,5 Δto = 39,4°C
● F = 720 Δto = 56,4°C
▲ F = 274 Δto = 26,75°C
o F = 1840 Δto = 51,9°C
ø F = 1317 Δto = 41,4°C
xo=0
calculate analitic aproximativ
calculate numeric
T12
T16
T20
T1
T8
Δtax [°C]
x+xo [cm]
x+xo / Do

Fig. 7

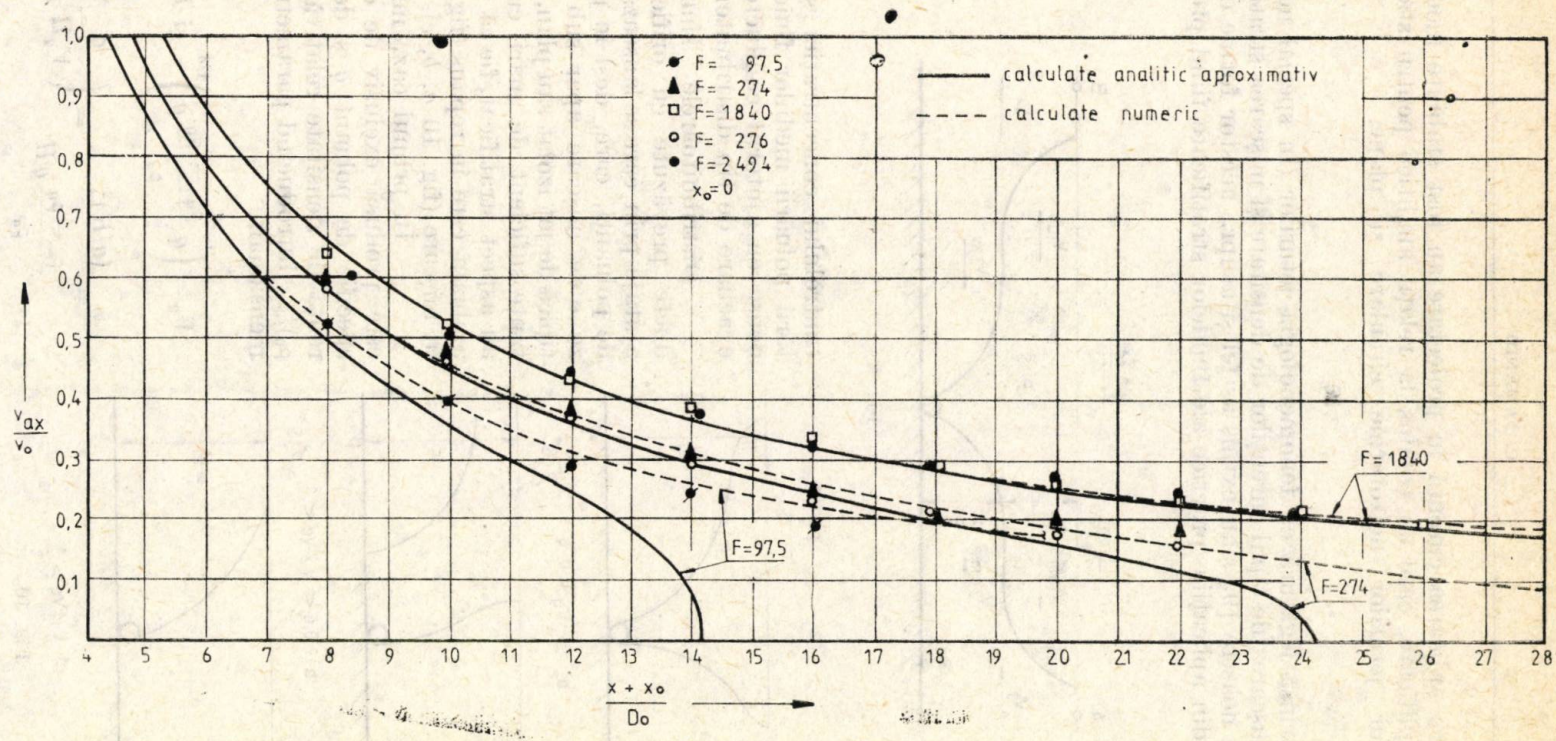

F= 97,5
F= 274
F= 1840
F= 276
F= 2494
x_o= 0
calculate analitic aproximativ
calculate numeric
F=1840
F=97,5
F=274
$\frac{v_{ax}}{v_o}$
$\frac{x + x_o}{D_o}$

Fig. 8

Pentru aplicarea curentă în proiectare au fost stabilite modele de calcul simplificate, care au condus la relații analitice pentru stabilirea parametrilor jeturilor neizoterme circulare și plane.

În strînsă legătură cu fenomenologia jeturilor (în special neizoterme) este mișcarea de tipul curenților de densitate și mișcarea stratificată. Cercetările noastre [9] s-au extins astfel și asupra acestor forme de mișcare, una din aplicațiile practice ale fluidelor stratificate fiind problema

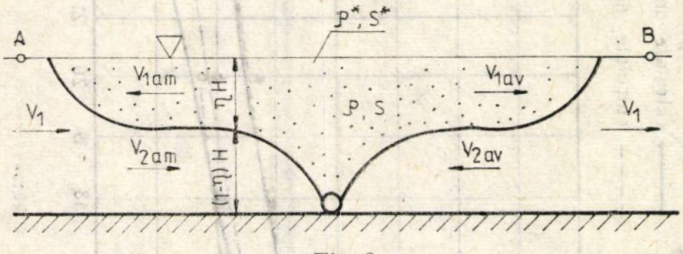


Fig. 9

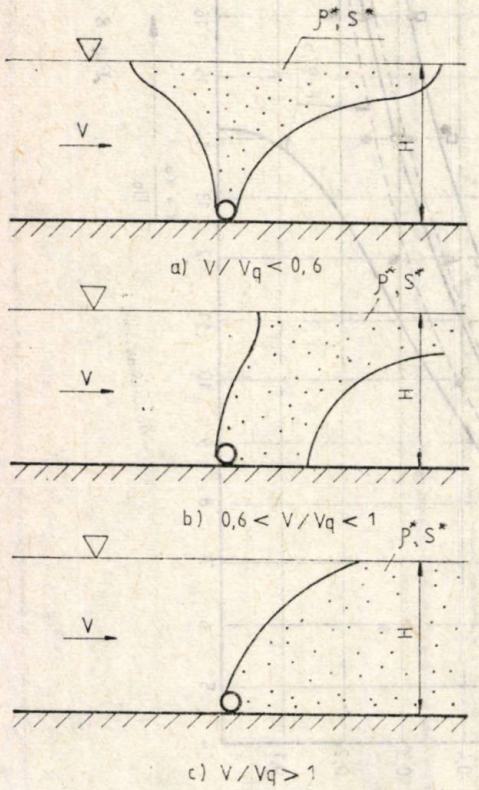


Fig. 10

controlului concentrației și limitării poluării mediilor fluide mai dense cu ajutorul conductelor de evacuare de tip distribuitor.

Distribuitoarele sînt conducte prevăzute cu orificii sau ajutaje prin care se lansează jeturi de poluanți, care, deși în primele zone de mișcare apar sub formă tipică de jet izolat sau plan, la distanțe suficient de mari, curgerile au aspect stratificat, fie că mediul ambiant este în repaus (fig. 9), fie în mișcare (fig. 10 *a*, *b*, *c*).

— În primul caz, mișcarea este produsă exclusiv de debitul specific de poluant q și de diferența de densitate relativă $(\rho_a - \rho_0)/\rho_a$. introducînd parametrii adimensionali,

$$V_q = \left(q \frac{\rho_a - \rho_0}{\rho_a} g \right)^{1/3} \text{ și } Fr_q = \frac{(q/H)^2}{\frac{\rho_a - \rho_0}{\rho_a} gH} = \left(\frac{q}{V_q H} \right)^3,$$

și cu notațiile din figura 9, între gradul de diluție la suprafață S^* și Fr_q se poate obține relația (cu $\eta = 0{,}5$);

$$S^* = (1{,}39 - 0{,}39Fr_q^{1/3})^{-1} Fr_q^{-1} \left[2S^*(1{,}39 - 0{,}39Fr_q^{1/3}) - 1\right]^{-2},$$

iar dacă $Fr_q^{1/3} < 0{,}1$, expresia se reduce la forma $J^* = AFr_q^{-1/3}$, verificată experimental în laboratorul nostru de hidraulică [10].

— În al doilea caz, în condițiile existenței unui curent transversal cu viteza medie V, aspectul curgerii depnde de raportul V/V_q. Astfel, la valori mici ($V/V_q < 0{,}6$, fig. 10 *a*) se formează un contracurent de densitate opus mișcării principale, iar dacă V crește, poluantul este trimis prin convecție în sensul mișcării mediului, păstrîndu-se sistemul stratificat ($0{,}6 < V/V_q < 1$, fig. 10 *b*), sau realizîndu-se un amestec complet ($V/V_q > 1$, fig. 10 *c*).

Pe baza măsurătorilor experimentale, s-a propus pentru calcul o regresie liniară dublu logaritmică de forma:

$$\frac{S^*q}{VH} = A_1 (V/V_q)^{-1} \quad \text{pentru } V/V_q < 0{,}6 \text{ și}$$

$$\frac{S^*q}{VH} = A_2 \quad \text{pentru } V/V_q < 1.$$

În domeniul $0{,}6 < V/V_q < 1$ există o zonă de racordare către soluția asimptotă [11].

Rearanjînd termenii în soluția stabilită, se regăsește cazul mediului ambiant stagnant, cu deosebire că în locul lui A apare A_1. Întrucît A_1 este mai mare decît A, înseamnă că ipoteza mediului stagnant este acoperitoare și conduce la grade de diluție inferioare cazului existenței unui curent transversal. Este motivul pentru care algoritmul de dimensionare și verificare hidraulică al distribuitoarelor de poluant alcătuit de noi s-a bazat pe această ipoteză.

*

În multe din sistemele hidraulice întîlnite în tehnica actuală apar însă mișcări bifazice, fie în cazul jetului de lichid în gaz, fie a jetului de gaz în lichid. Din această cauză, problema mișcărilor bifazice, în general, și în special cea a jeturilor de această natură, a făcut de asemenea obiectul preocupărilor noastre.

Cu privire la jeturile lichide în aer sînt de amintit mișcările realizate în avalul descărcătorilor de ape mari la unele amenajări hidrotehnice. Pentru exemplificare [12] este de amintit proiectul Marun din Iran al cărui debit maxim de 10 000 m³/s se evacuează printr-un descărcător de coastă cu o cădere de circa 150 m prevăzut cu aruncătoare în formă de trambulină de schi. În cadrul cercetării a fost realizat un program de calcul pentru determinarea suprafeței libere pornind de la coordonatele profilului deversant și considerînd mișcarea formată din tronsoane pentru care s-a aplicat teorema variației cantității de mișcare. Modelul fizic a fost realizat în primă etapă la scara 1/100 pentru a verifica valabilitatea modelului ma-

tematic şi pentru a putea avea elementele necesare execuţiei unui alt model de laborator la scara 1/25.

Jetul format în avalul descărcătorului ca şi suprafaţa liberă, experimentală corespunde satisfăcător cu rezultatele calculelor, reieşind cîteva concluzii importante :

— Datorită scării de modelare, problema aerării nu este decît orientativă pe zonă descărcătorului, dar foarte apropiată de realitate prntru jetul care nu mai are zonă compactă. Explicaţia constă în natura forţelor de frecare datorită fenomenului de lunecare al celor două faze, care în model fiind relativ mai mare ca în natură, compensează gradul mai redus de aerare obţinut experimental.

— Traiectoria şi dispersarea jetului, ca şi forţele executate de acesta în zona de impact cu terenul, pot fi stabilite cu destulă exactitate şi în cazul unor scări la care dimensiunea minimă a curentului este cel puţin egală cu circa 10 diametre ale bulelor de aer antrenat.

— Legat de un astfel de jet, trebuie subliniată problema cavitaţiei ce apare în orice situaţie în zona de desprindere ce trebuie în mod corespunzător protejată prin soluţii constructive.

*

Tot în cadrul jeturilor de apă în aer se înscrie o altă realizare a laboratorului de hidraulică I.C.B. privind un procedeu eficient pentru răcirea benzilor şi tablelor laminate la cald.

În acest sens au fost concepute şi realizate la diferite scări dispozitive de producere a jeturilor circulate compacte sau a jeturilor plane [13], [14], ce îşi găsesc aplicabilitate în instalaţiile de laminare din cadrul combinatelor siderurgice.

*

A doua categorie de mişcări bifazice de care s-a amintit, aceea a jetului de gaz în lichid a fost abordată de noi plecînd tot de la o seamă de solicitări ale tehnicii. Astfel, o primă cercetare a plecat de la necesitatea producerii în ţară a echipamentului necesar instalaţiilor de ventilare şi de climatizare în vederea reducerii importului.

Pentru tratarea complexă a aerului în tehnica ventilării şi climatizării se folosesc agregate care au în majoritatea cazurilor în componenţa lor camere de pulverizare a apei, fiind în fond schimbătoare de masă şi căldură cu contact direct între aer şi apă sub formă de picături. Fenomenele hidraulice şi termice, deosebit de complexe ce au loc în aceste aparate sînt interdependente, astfel încît calcule corecte nu pot fi făcute fără cunoaşterea în detaliu a proceselor hidraulice, care în fond determină suprafaţa de transfer de căldură. Din analiza cercetărilor efectuate în diferite ţări a rezultat că majoritatea acestora abordează mai cu seamă latura termică a problemei, rezumîndu-se la determinarea unor performanţe globale ale unor tipuri constructive particulare de camere de pulverizare, stabilind relaţii de calcul limitate la acestea.

Ţinînd seama de această situaţie, s-a dezvoltat [15] o cercetare sub aspect hidraulic privind camerele de pulverizare utilizate în instalaţiile de climatizare. În cadrul acestei activităţi au fost obţinute o serie de rezultate ce se prezintă în continuare.

— Cercetările privind caracteristicile hidraulice ale pulverizatoarelor de apă cu referire la coeficientul de debit și la unghiul inițial de lansare a jetului. Pentru aceasta au fost folosite metode teoretice pornind de la teoria injectoarelor cu cameră de rotire precum și folosind teoria similitudinii. Au fost astfel obținute relații de calcul pentru coeficientul de debit în cazul pulverizării apei în aer și pentru un unghi considerat inițial al jetului. Au fost duse final la forma care permit determinarea rapidă a caracteristicilor hidraulice ale pulverizatorilor cunoscînd elementele geometrice ale acestora.

— Cercetările privind repartiția debitelor de lichid în secțiunile transversale ale jeturilor pulverizatoarelor cu cameră de rotație, în cadrul cărora au fost stabilite legile de repartiție a lichidului în jet precum și asimetria acestuia. Experimentările au fost efectuate folosind un colector de concepție proprie format din elemente dispuse radial cu posibilitatea de modificare a distanței față de pulverizator. Pentru înlăturarea în bună parte a asimetriei jetului, s-a propus realizarea de pulverizatoare cu mai multe canale de intrare a apei în camera de rotație. Pe baza analizei curbelor de frecvență a densităților medii a fluidului în jet au rezultat concluzii privind condițiile în care apare jetul cu con de aer interior sau jetul normal (fig. 11 ; 12).

Pe baza prelucrării statistice a datelor experimentale a fost elucidată problema normalității curbelor de frecvență și au fost stabilite legile de repartiție a densităților fluxului de lichid în secțiunile jetului. De asemenea, aplicînd legile similitudinii, au fost obținute relații criteriale care permit stabilirea legilor de repartiție în condițiile cunoașterii caracteristicilor geometrice ale pulverizatoarelor și a regimului de lucru. Rezultatele obținute sînt utile la proiectarea camerelor de pulverizare în scopul obținerii unei repartiții cît mai uniforme a picăturilor de apă.

— Cercetările privind finețea și neuniformitatea pulverizării ca și determinarea diametrului mediu al picăturilor au fost făcute în scopul stabilirii suprafeței de transfer între aer și apă. În lucrările experimentale a fost folosit un dispozitiv de captare a picăturilor de apă pe plăci de sticlă cu strat uleios. Numărotoarea picăturilor pe clase de dimensiuni s-a făcut la microscop prin vizualizare directă și prin fotografiere.

Rezultatele obținute au fost prelucrate statistic obținîndu-se legile de repartiție a numărului, suprafețelor și volumelor picăturilor după dimensiuni. Au fost obținute de asemenea relații criteriale pentru diametrul mediu al picăturilor precum și pentru determinarea constantelor de repartiție.

Rezultatele cercetătorilor au constituit un suport eficient pentru efectuarea pe baze cît mai reale ale calculelor privind procesele din camerele de tratare cu apă a aerului pentru climatizare. Ele au fost aplicate la tipizarea și realizarea camerelor de umidificare a aerului produse de intreprinderile din cadrul M. C. Ind., precum și la realizarea în țară a primelor blocuri de climatizare.

*

Pornind de la ideea de a dezvolta noi sisteme de aerare și recirculare a apei, care, pe lîngă performanțe optime, consum energetic redus, să realizeze și o siguranță sporită în exploatare, în cadrul laboratorului de

hidraulică a Institutului de Construcții București s-au desfășurat așa cum s-a amintit și cercetări privind hidraulica jeturilor bifazice.

Cercetările teoretice, și experimentale asupra acestor tipuri de jeturi pornesc, în general, de la acceptarea următoarelor observații: dificultatea tratării matematice cauzată în special de condițiile de interfață gaz-lichid, puternicul efect de scară-obstacol considerabil în calea modelării

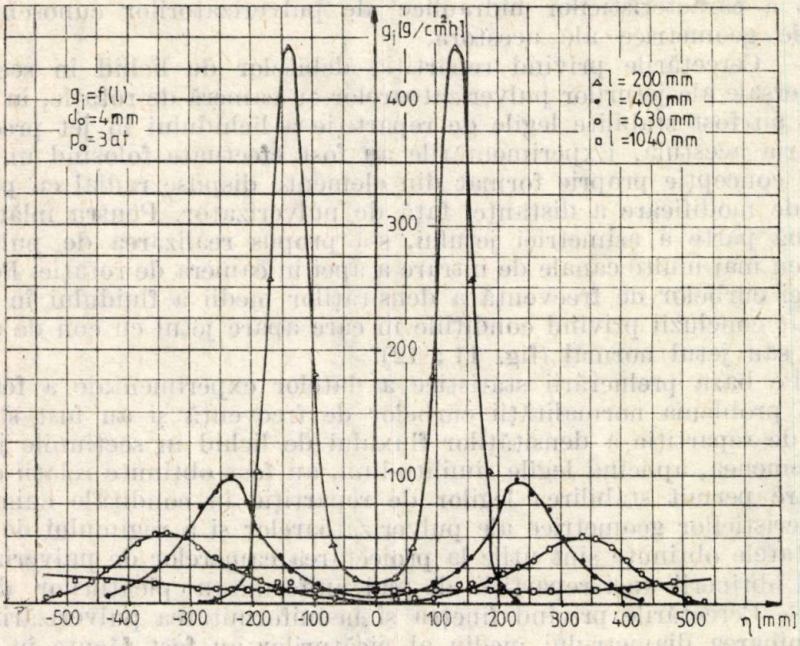


Fig. 11

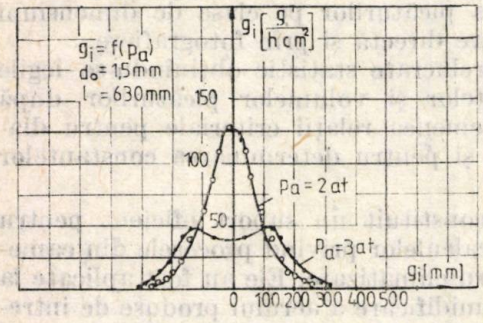


Fig. 12

hidraulice, importanța relativă mult mai mare (față de mișcările monofazice) a perturbațiilor introduse de echipamentul de măsură amplasat în curentul de fluid de unde și tendința de a se recurge la metodele acustice sau optice de măsură.

Contribuțiile teoretice la dinamica jeturilor bifazice au permis elaborarea unui model de calcul pe baza conceptului de viteză de antrenare și coeficient de antrenare.

Ecuațiile care descriu fenomenul, prezentate în continuare, au fost scrise într-o formă generală, fiind aplicațiile atît pentru jet rotund, cît și pentru jet plan, prin simpla particularizare a exponentului N (pentru jet rotund $N = 1$; pentru jet plan $N = 0$). Notînd cu $1/(k + 1)$ ponderea care revine bulelor de gaz și cu $k/(k + 1)$ ponderea care revine trenelor

hidrodinamice ale acestora (care conţin lichid antrenant), aceste ecuaţii sînt :

— ecuaţii de continuitate pentru gaz, respectiv pentru lichid :

$$Q_{MG} = \int_0^{b_c} \frac{2\rho_G u_G (\pi r)^N}{k+1}\,\mathrm{d}r = \text{const.},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{k}{k+1}\int_0^{b_c} 2\rho_L u_G (\pi r)^N \mathrm{d}r\right) + \frac{d}{\mathrm{d}z}\int_{b_c}^{\infty} 2\rho_L u_L (\pi r)^N \,\mathrm{d}r = -2\rho_G [(\pi r)^N u_{Lr}]_{r\to\infty},$$

— ecuaţia de conservare a cantităţii de mişcare :

$$\int_0^{b_c} \frac{2g(\rho_L - \rho_G)}{k+1}(\pi r)^N \,\mathrm{d}r = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\int_0^{b_c} \frac{2\rho_G u_G^2}{k+1}(\pi r)^N +$$

$$+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\int_0^{b_c} \frac{2K_L u_G^2}{k+1}(\pi r)^N + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\int_{b_c}^{\infty} 2\rho_L u_L^2 (\pi r)\,\mathrm{d}r,$$

— ecuaţia debitului de lichid antrenat ;

$$Q_{NL} = 2\left[\left(\frac{\pi b}{2}\right)^N b - \left(\frac{\pi b_c}{2}\right)^N b_c\right]\rho_L u_L + KQ_{MG}\frac{\rho_L}{\rho_G},$$

în care s-au mai folosit următoarele notaţii : QM — debit masic ; ρ — densitate ; u — viteza locală ; r — coordonata laterală, cu originea în ax ; z — coordonată verticală, cu originea în orificiul de lansare a jetului ; b — lăţimea jetului într-o secţiune ; b_c — lăţimea zonei centrale într-o secţiune ; G, L — indici, care precizează gazul, respectiv lichidul ; L_r — indice, care precizează viteza lichidului în direcţia r. Pentru rezolvarea sistemului de ecuaţii s-a folosit o metodă numerică, programul de calcul fiind înscris în biblioteca de programe a catedrei de hidraulică [16].

Beneficiind în etapa actuală de o bază materială dezvoltată, a fost posibilă realizarea pentru prima dată la noi în ţară a unui studiu experimental asupra structurii jetului bifazic aer-apă utilizînd un echipament de măsură cu laser de tip T.S.I., rezultatele obţinute servind la corectarea modelului de calcul menţionat anterior.

Printre concluziile importante obţinute menţionăm ; existenţa unei zone centrale în care faza gazoasă are o prezenţă mult mai importantă decît în restul jetului (care constituie zona marginală) ; în zona centrală antrenarea lichidului se datorează preponderent depresiunii din trena hidrodinamică a bulelor ; în zona centrală a jetului viteza ascensională a lichidului nu variază prea mult cu debitul de aer introdus şi se apropie de viteza finală de ridicare a bulelor, efectul lunecării fazelor fiind mai redus. Aceasta arată că din punct de vedere energetic nu sînt justificate debite foarte mari de aer în vederea intensificării mişcării secundare (de antrenare).

Unele efecte de scară [17] au fost cercetate prin măsurători la scară naturală efectuate pentru jeturi plane în lacul de acumulare Bicaz. S-au determinat vitezele ascensionale ale lichidului antrenat măsurate cu micromorișca, rezultînd distribuții de viteză de tipul celor reprezentate în figura 13. Pe baza concluziilor obținute s-a putut trece la proiectarea unei instalații pneumatice de destratificare termică-aerare cu care se echipează stațiunea Salmonicolă Potoci în scopul sporirii producției [18].

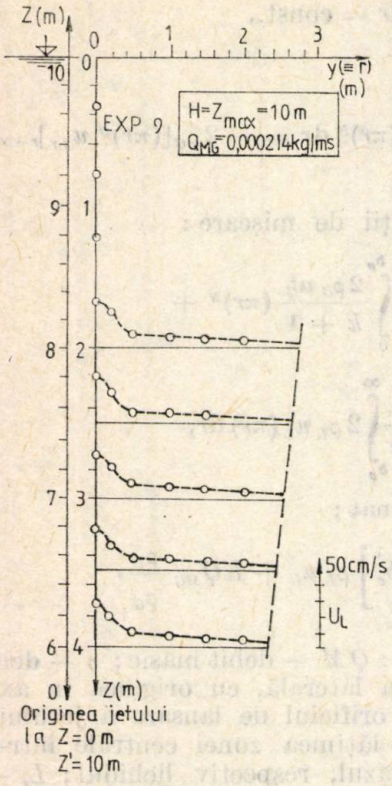


Fig. 13

★

Cercetările teoretice și experimentale au fost orientate și în direcția folosirii ejectoarelor apă-aer în stațiile de tratare a apelor uzate menajere sau industriale, pentru proiectarea și realizarea unui tip de ejector cu performanțe hidraulice și energetice îmbunătățite [19].

Studiul teoretic al ejectoarelor bifazice lichid-gaz s-a efectuat pornind de la rezultatele obținute pentru ejectoarele monofazice ținînd seama în primul rînd de fenomenele specifice care se petrec în interioarul acestora. Astfel (fig. 14), în camera de amestec a ejectorului lichid-gaz se produce o schimbare a structurii mișcării de la curgerea sub forma de jet lichid înconjurat de gaz, la curgerea sub formă de amestec, în care lichidul conține gazul sub formă de bule dispersate (amestec prin șoc). Cu notațiile din figura 14 se poate arăta că există relațiile

$$R_p = 1 + \frac{1 + R_A^{-1} - R_\varphi}{Eu}, \tag{1}$$

$$R_\varphi = \frac{R_p}{R_p + R_Q^{-1}}, \tag{2}$$

din care rezultă:

$$R_Q^{-1} = Eu\left[R_p\left(1 + \frac{1}{R_A Eu}\right) - R_p^2\right], \tag{3}$$

în care $R_Q = (Q_L/Q_G)_I$ — raportul debitelor de lichid și gaz în secțiunea I; $R_p = p_{II}/p_I$ — raportul presiunilor din secțiunile II și I; $R_A = (A_L/A_G)_1$ — raportul ariilor din secțiunea 1 de intrare în camera de amestec; $Eu = p_I/(\rho_L v^2)$ — numărul Euler din secțiunea I. În cele de mai sus indicii L și G precizează lichidul, respectiv gazul antrenat, iar $v = Q_L/A$

este viteza superficială a fazei lichide, definită ca viteza cu care s-ar deplasa lichidul pe întreaga secțiune a camerei de amestec.

În figura 15 se dă, pentru exemplificare, o reprezentare grafică a familiei de parabole corespunzătoare ecuației lui R_Q^{-1}, în planul (R_p, R_q^{-1}) cu numărul *Eu* drept parametru, pentru $R_A = 0{,}1$ și $R_A = 1$.

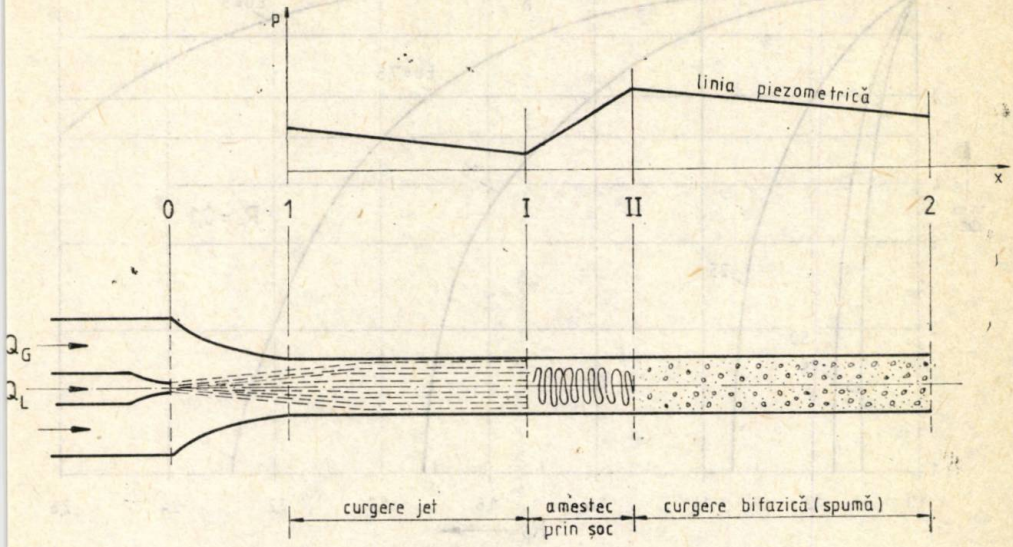


Fig. 14

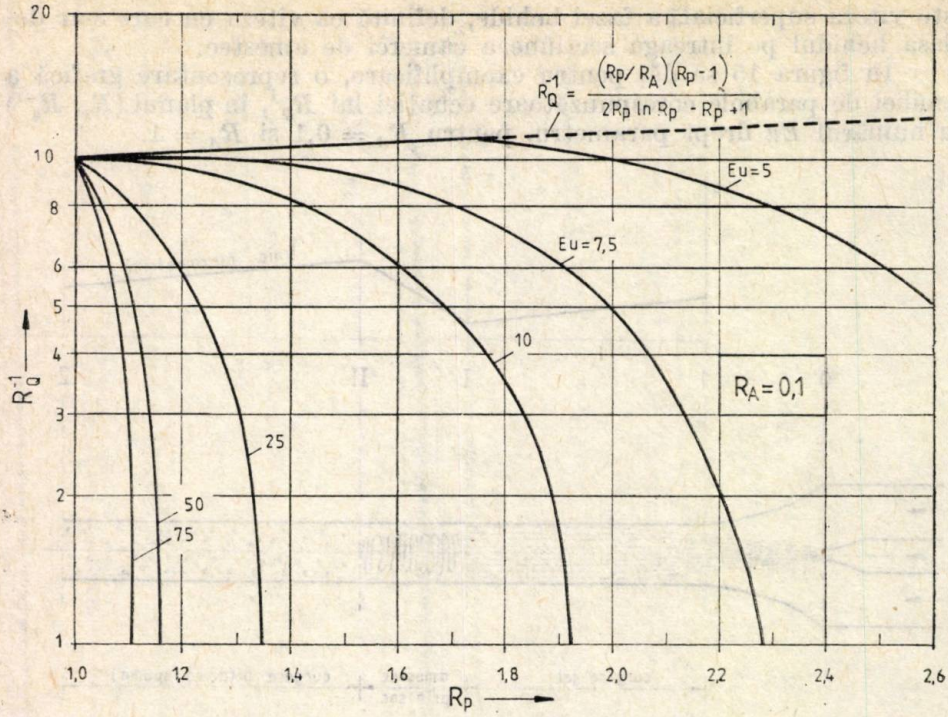
Diagramele au fost reprezentate numai în domeniul fizic real sub curba trasată cu linie întreruptă, de ecuație

$$R_Q^{-1} = \frac{(R_p/R_A)(R_p - 1)}{2R_p \ln R_p - R_p + 1},$$

obținută din condiția de respectare a celui de al doilea principiu al termodinamicii.

Din figură se poate constata că o creștere a raportului ariilor R_A duce la o posibilă creștere a raportului debitelor R_Q, respectiv la reducerea fracției gazoase. Pe de altă parte, sporirea raportului de presiuni R_p indică obligativitatea micșorării numărului Euler, deci a creșterii debitului de lichid.

Cercetările experimentale efectuate cu ajutorul instalației reprezentate schematic în figura 16 au cuprins în principal: măsurători ale debitelor de apă și aer ale ejectorului, măsurători de viteze locale ale jetului bifazic apă-aer realizat de ejector, cît și măsurători privind dispersia jetului bifazic. În cadrul determinărilor experimentale s-a utilizat pentru măsurarea debitelor de apă și aer debitmetru cu turbină, respectiv rotametru, iar vitezele locale s-au măsurat utilizînd unul din anemometrele cu laser existente în cadrul laboratorului, un exemplu de reprezentare grafică a măsurătorilor fiind dat în figura 17. Dispersia jetului s-a pus în evidență prin vizualizarea jetului bifazic și ulterior înregistra-


$R_Q^{-1} = \frac{(R_p/R_A)(R_p-1)}{2R_p \ln R_p - R_p + 1}$
Eu=5
Eu=7,5
10
25
50
75
$R_A = 0,1$
R_Q^{-1}
R_p

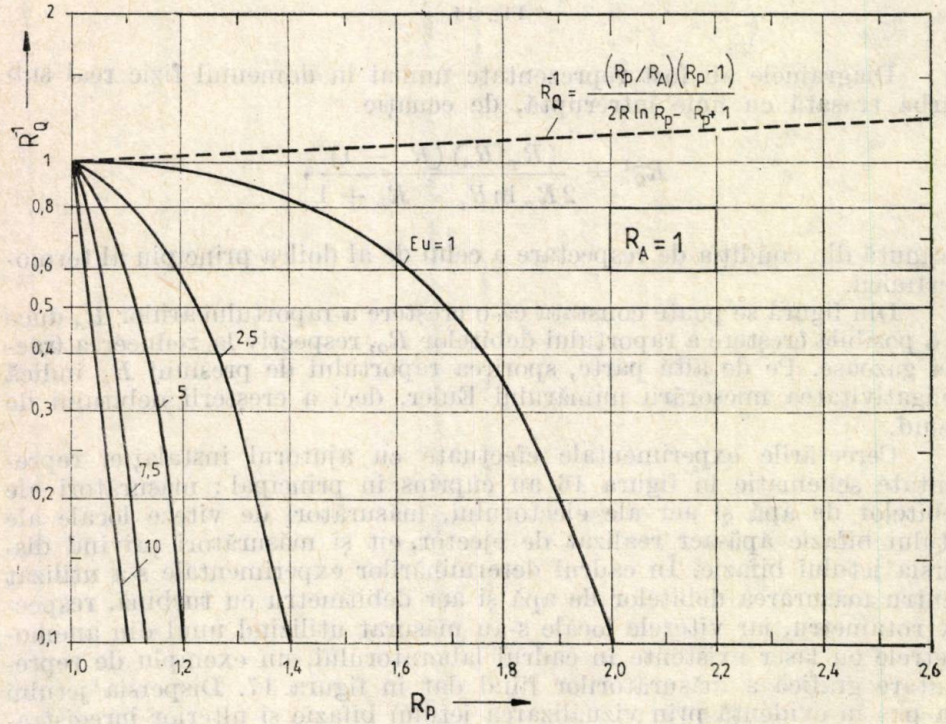

$R_Q^{-1} = \frac{(R_p/R_A)(R_p-1)}{2R \ln R_p - R_p + 1}$
Eu=1
2,5
5
7,5
10
$R_A = 1$
R_Q^{-1}
R_p

Fig. 15

rea fotografică. În figura 18 este prezentată o diagramă de variație a vitezei V, a componentelor acesteia V_x (orizontală) și V_z (verticală), precum și a unghiului α dintre ele.

Studiile teoretice și experimentale au pus în evidență modul în care fenomenul este precizat de o serie întreagă de parametrii constructivi și

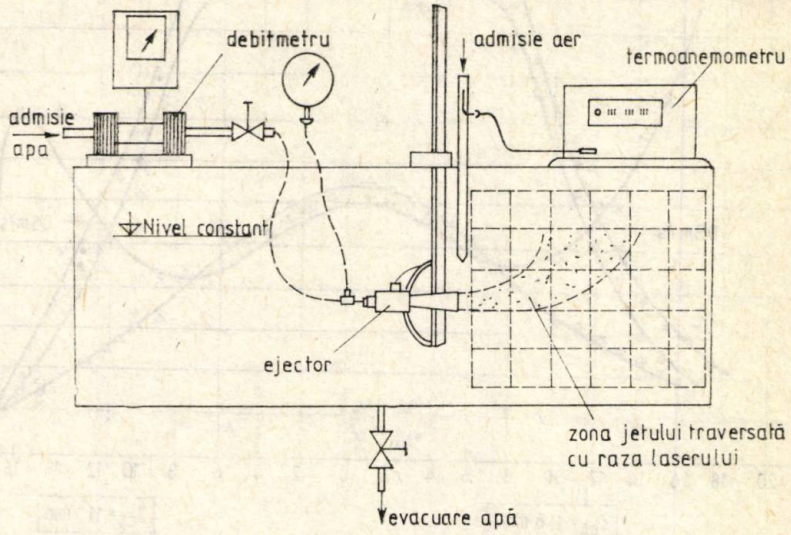


Fig. 16

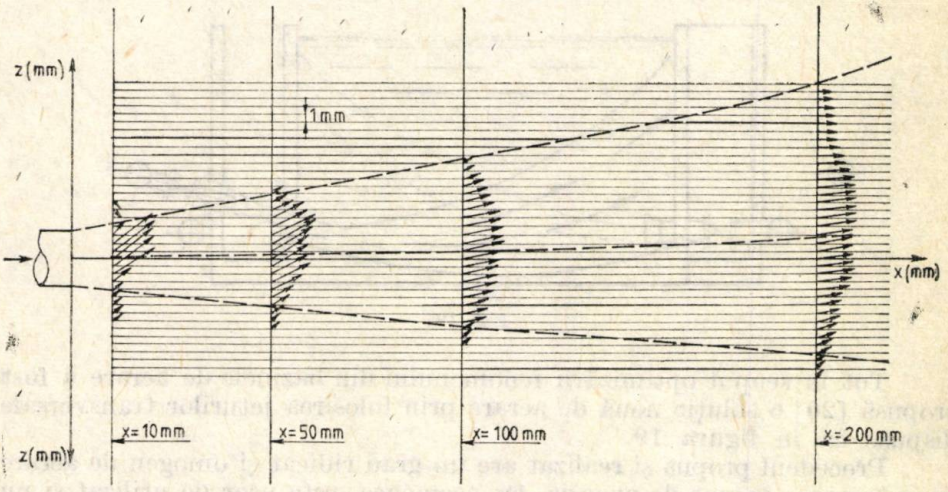


Fig. 17

funcționali ca lungimea camerei de amestec a ejectorului, presiunea de alimentare, adîncimea de înnecare, unghiul de înclinare, etc. De asemenea au fost puse în evidență o serie de aspecte privind structura interioară a jetului bifazic aer-apă.

★

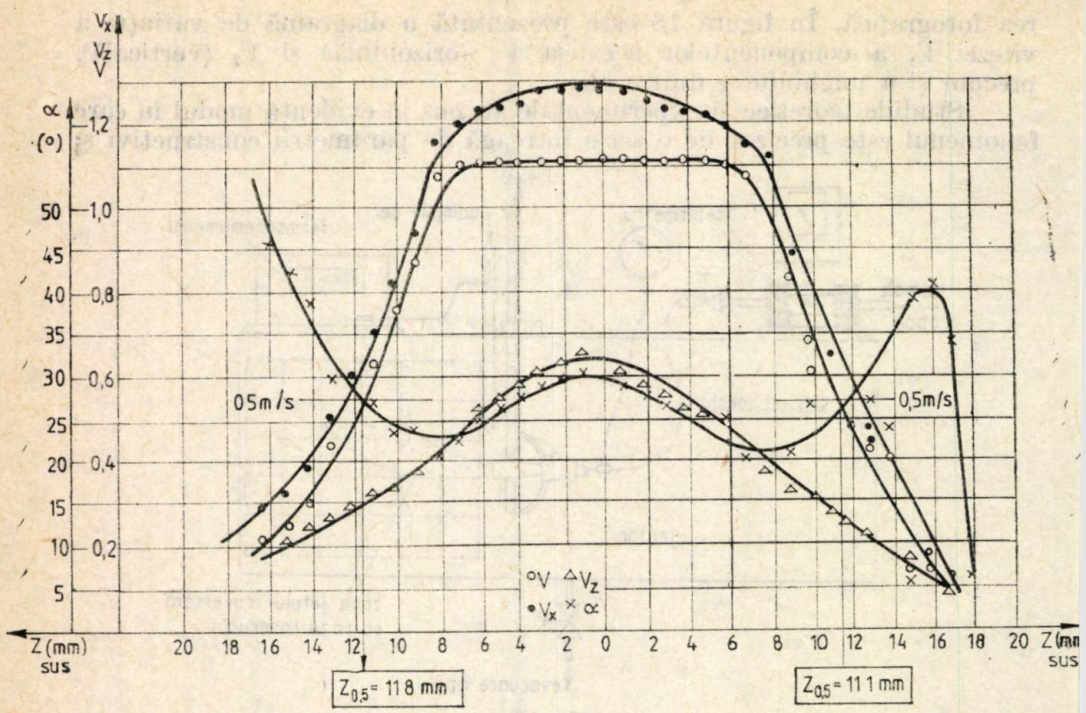


Fig. 18

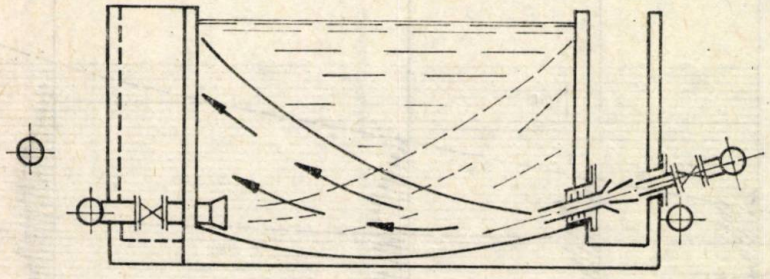


Fig. 19

Tot în scopul optimizării fenomenului din bazinele de aerare a fost propusă [20] o soluție nouă de aerare prin folosirea jeturilor transversale dispuse ca în figura 19.

Procedeul propus și realizat are un grad ridicat și omogen de aerare cu un consum scăzut de energie. De asemenea, este ușor de utilizat și nu conține piese în mișcare ce creează mari dificultăți în exploatare, cunoscute astăzi la aeratoarele mecanice folosite în prezent.

★

Dacă în prezent, așa cum s-a arătat, s-a reușit măsurarea separată a caracteristicilor mișcării celor două faze apă-aer, totuși, complexitatea mișcării bifazice în special în jeturi aduce însemnate dificultăți atît pen-

tru modelarea matematică, cît și în special pentru cercetarea experimentală și măsurătorile în natură. Plecînd de la aceste deosebite deficiențe am realizat o cercetare [21] privind mișcarea indusă a unei mase de apă traversată de un jet de aer folosind analogia cu mișcarea unei mase de aer traversată de un jet de aer.

În acest sens, considerînd exprimarea funcției de curgere pentru jetul cu densitate constantă lansat printr-o fantă ca și pentru jetul de convecție, în cazul unei surse de căldură liniară, a fost stabilită relația

$$\frac{m}{\left(\frac{w}{\rho}\right)^{2/3}} \simeq D,$$

în care m este impulsul în cazul jetului cu densitate constantă, w este debitul gravimetric în cazul jetului cu densitate variabilă, iar D este înălțimea masei fluide traversată de jet.

Similitudinea a fost verificată experimental atît pentru modelul analogic, cît și pentru masa de fluid traversată de jetul de gaz. În experimentări s-au măsurat caracteristicile mișcării în jet și caracteristicile mișcării induse prin utilizarea termoanemometriei.

În figura 20 sînt prezentate pentru trei lungimi ale domeniului liniile de curent ale mișcării medii induse, iar în figura 21 sînt prezentate distribuțiile turbulenței în formă adimensională.

În urma cercetării efectuate au rezultat o serie de concluzii ce se prezintă în cele ce urmează.

— Compararea jetului bifazic cu jetul datorat convecției este reală.

— Experimentările în cazul real al jetului de gaz lansat în apă, confirmă în general rezultatele obținute prin analogia considerată.

— În cazul jetului de gaz nu este necesar a se asigura în secțiunea de lansare o presiune mai mare decît presiunea necesară lansării bulelor. Presiuni și respectiv viteze mai mari ale fazei gazoase sînt disipate pe o distanță relativ foarte mică.

— În principal se constată că și în modelul analogic vitezele în axul jetului lansat sînt aproximativ constante ca și în cazul jetului de aer lansat în masa lichidă.

— În cazul unui domeniu cu o lungime mai mare de două ori înălțimea sa (figura 21) se produce o mișcare indusă de ordinul al II-lea. În această situație a fost făcută recomandarea, ce a și fost introdusă în practică, de a nu avea bazine de aerare cu lățimi peste această limită, caz în care apar astfel de mișcări secundare și în care transferul de oxigen de la bulele de aer nu se mai poate efectua.

Primită la redacție la 18 iulie 1984

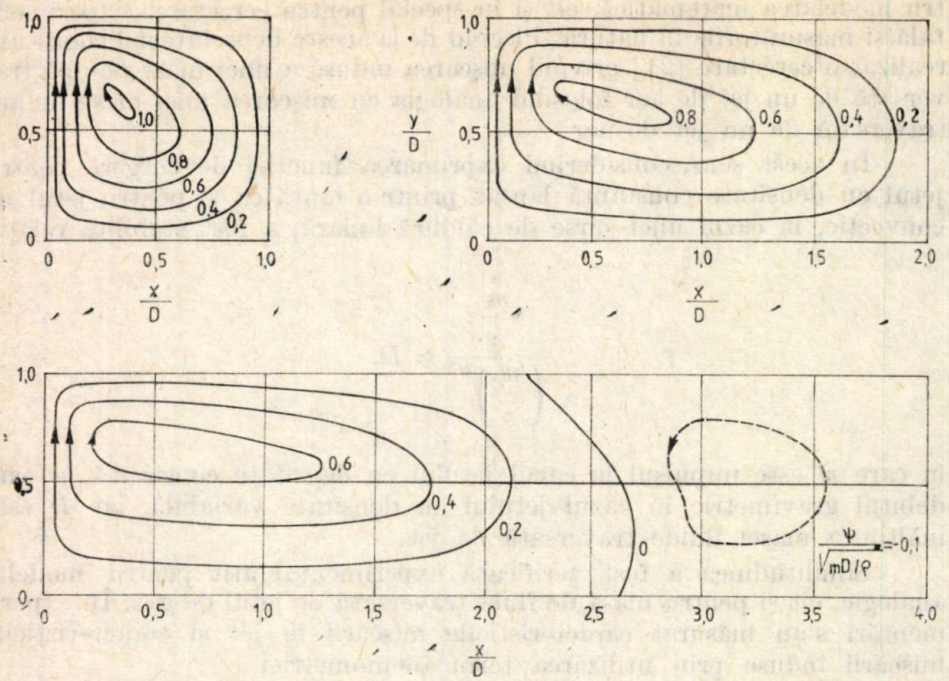

1,0
0,5
0
0
0,5
1,0
x/D
y/D
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
1,5
2,0
2,5
3,0
3,5
4,0
Ψ/√mD/ρ
=-0,1

Fig. 20

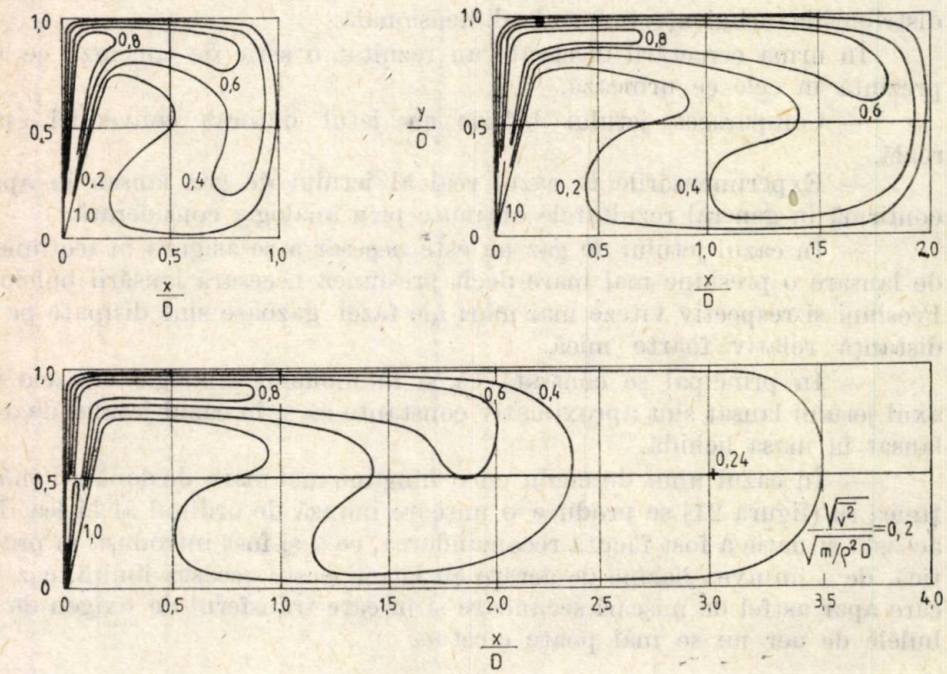

1,0
0,5
0
0,5
1,0
1,5
2,0
x/D
y/D
0,8
0,6
0,4
0,2
1,0
0,24
√v²/√m/ρ²D
=0,2
3,0
3,5
4,0

Fig. 21

BIBLIOGRAFIE

1. P. STOENESCU, *Jet turbulent circular în curent transversal cu mișcare uniformă*, Teză de doctorat I. C. B., 1978, conducător științific prof. dr. ing. C. Iamandi.
2. C. IAMANDI, P. STOENESCU, GH. DUTA, *Traiectoria jetului circular curbat și unele aplicații la domeniul ventilării și poluării*, Simpozionul Interacțiunea construcțiilor cu mediul înconjurător, Iași, 1978, vol. II pg. 161—168.
3. C. IAMANDI, AL. MARUTA, L. SANDU, V. PETRESCU, R. DAMIAN, A. ANTON, *Cercetări privind influența apei calde provenite de la termocentrale asupra curgerii în emisari*, Referat I. C. B., 1974.
4. L. SANDU, GH. MIHALACHE *Jet termic tridimensional în curent transversal*, Simpozionul „Calitate și eficiență în hidraulică", I. C. B., 1983.
5. I. COLDA *Contribuții la dinamica jeturilor neizoterme*, Teză de doctorat, I. C. B., 1892, conducător științific prof. dr. ing. C. Iamandi.
6. C. IAMANDI, I. COLDA, *Aspecte ale studiului pe model al ventilării halelor industriale*, Conferința a X-a de instalații, Sinaia, 1976.
7. C. IAMANDI, I. COLDA, *A computation Method for warm vertical jets*, A 7-a conferință de încălziri, ventilare și aer condiționat, Bratislava, 1984.
8. GH. DUTA, I. COLDA, D. ENACHE, *Nomograme de calcul pentru dimensionarea gurilor de refulare a aerului cu jet neizoterm*, Raport I. C. B., pag. 45, București, 1984.
9. C. IAMANDI, V. PETRESCU, R. DAMIAN, L. SANDU, *Limitarea poluării marine prin sisteme de evacuare de tip distribuitor*, Sesiunea științifică I. I. S., Constanța, 1981.
10. V. PETRESCU, *Asupra mișcării fluidelor stratificate și unele probleme de poluare*, Teză de doctorant I. C. B., 1981.
11. C. IAMANDI, V. PETRESCU, L. SANDU, R. DAMIAN, A. ANTON M. DEGETRATU *Difuzia, dispersia, curent de densitate și combaterea poluării mediului*, Sesiunea științifică jubiliatră — Buletinul științific I. C. B., 1983.
12. C. IAMANDI, O. LUCA, *Descărcătorul de ape mari al amenajării MARUN—IRAN*, Raport I. C. B., 1984.
13. D. CIOC, O. LUCA, H. RĂDULESCU, B. PITIGOI, A. ANTON, *Instalație pentru realizarea de jeturi compacte*, Brevet de invenție R. S. R. 73. 771/1980.
14. D. CIOC, O. LUCA, C. POPESCU, B. PITIGOI, A. ANTON, L. SANDU, *Procedeu și instalație pentru răcirea benzilor laminate la cald*, Brevet de invenție R.S.R. 75.358/ /1980.
15. N. NICULESCU, *Hidraulica pulverizării apei în camere de tratare a aerului*, Teză de doctorat I. C. B., 1975, conducător științific prof. dr. ing. C. Iamandi.
16. R. DAMIAN, *Contribuții la dinamica jeturilor de gaz în lichid*, Teză de doctorat I. C. B.. 1980, conducător științific prof. dr. ing. C. Iamandi.
17. C. IAMANDI, R. DAMIAN, *Observatores on Scale Effects of Bubble Planne Dynamics*, Symposium on Scale Effects in Modelling hydraulic Structures, Esslingen, 1984, paper 5—12
18. C. IAMANDI, R. DAMIAN, M. DEGERATU, Studiul privind posibilitatea realizării unor *instalații de aerare aferente marilor platforme de sevocultură*, Raport I. C. B., 1984.
19. C. IAMANDI, V. PETRESCU, A. ANTON, R. DAMIAN, L. SANDU, *Cercetări privind hidraulica bazinelor de aerare echipate cu aerator cu jet*, Raport I. C. B., 1980 și 1981 (2 volume).
20. C. IAMANDI, O. LUCA, I. CIOCONE, *Procedeu și instalație pentru aerarea hidraulică a apei*, Brevet de invenție R.S.R. 76. 567/1978.
21. C. IAMANDI, H. ROUSE, *Jet induced Circulation and Diffusion*, Journal of the hydraulics Division, Proceedings of the Amreican Society of Civil Engineers, pp. 589— —600.

MODELE DE CALCUL ÎN MIȘCAREA NEPERMANENTĂ

de D. CIOC

Institutul de Construcții București

La început sînt analizate comparativ cele două modele fundamentale folosite în studiul mișcărilor nepermanente sub presiune, anume modelul Riemann (1860), reprezentat prin ecuația (6) și modelul Jukovski (1899), reprezentat prin ecuațiile (10) și (11).
Mai departe se studiază domeniul de aplicare al modelelor (6) și (11) cu concluzia că modelul (11) poate fi aplicat la studiul mișcării lichidelor (apei) cu o eroare relativă mai mică de 2% dacă suprapresiunea nu depășește 160 bari. În cazul gazelor (aer) această limită se reduce la $|\Delta p|<0{,}047\ p_0$, unde p_0 este presiunea inițială.
Această concluzie se extinde și asupra modelului (62).
În final este analizată eroarea de reprezentare pe intervale finite a pierderilor de sarcină în modelele (11) sau (62) neomogene.
Este verificată concluzia cunoscută că modelele pentru mișcări foarte rapide sau cu discontinuități mari trebuie să respecte condiția Courant. Abaterile de la condiția Courant sînt interpretate ca modificări ale vitezei de propagare a undelor.

1. INTRODUCERE

1.1. CONSIDERAȚII GENERALE

În stadiul actual, problemele de mișcare nepermanentă sub presiune se rezolvă de preferință prin trei metode numerice:

— metoda caracteristicilor;
— metoda diferențelor finite (MDF);
— metoda elementelor finite (MEF).

Prima metodă, ca metodă generală de rezolvare, este foarte larg folosită, fiind cunoscută și sub numele de metoda invarianților Riemann sau metoda undelor de calcul prin opoziție cu metoda undelor fizice. În cadrul acestei metode, rezolvarea problemelor se face folosind ecuații diferențiale ordinare de-a lungul curbelor caracteristice. Soluția aproximativă se obține în puncte discrete, ca în MDF, cu deosebirea că poziția acestor puncte nu poate fi dinainte stabilită și se obține în procesul de calcul. În cazul majorității problemelor de mișcare nepermanentă a lichidelor poate fi folosită o schemă ale cărei caracteristici sînt linii drepte, fixe, ceea ce înlătură dezavantajul menționat. În cazul mișcărilor unidimensionale (undelor plane) soluțiile ecuațiilor diferențiale de-a lungul caracteristicilor pot fi exprimate [1] ca relații simple între parametrii de stare (viteză-presiune, debit-cotă piezometrică) care apar sub forma unor expresii care se conservă sau se alterează după o anumită lege de-a lungul curbelor caracteristice. În ipoteza fluidului perfect, în conductă uniformă aceste expresii se propagă după aceeași lege ($a = v \pm c$) ca și undele fizice, adică își conservă valoarea.

Metoda diferențelor finite sub forma obișnuită, este mai puțin prezentă în literatura de specialitate. În schimb, o metodă derivată din ea (metoda cu pas de timp fix) este larg răspîndită constînd din căutarea soluțiilor în nodurile unei rețele fixe avînd de obicei pași egali după t, neegali, dar fixși după x, și care, pentru reprezentarea fenomenului de pro-

St. Cerc. Mec. Apl., Tom 43, Nr. 5—6, 1984, P. 484—511

pagare a undelor fiolosește ecuațiile diferențiale de-a lungul caracteristicilor sau în locul acestora, expresii de forma invarianților Riemann.

A treia metodă (MEF), des folosită în ultimul timp pentru problemele mediilor continui bi și tridimensionale, este de asemenea prezentă în rezolvarea problemelor unidimensionale. Aici trebuie citată folosirea de către Ch. Thirriot a metodei Rayleigh-Ritz pentru rezolvarea mișcării nepermanente într-o conductă de mare lungime.

Pentru rezolvarea problemelor de mișcare nepermanentă rapid variabilă (lovitură de berbec) în sisteme de conducte sub presiune a căpătat o largă răspîndire metoda cu pași ficși (invarianți Riemann + rețea cu noduri fixe la intersecția dreptelor $t = j.\ \Delta t,\ j = 1, 2\ \ldots\ n$ și $x = (x_0, x_1, \ldots\ x_n)$ cu pași $\Delta x_1,\ \Delta x_2,\ \ldots, \Delta x$ adaptați problemei). În cazul pașilor după x egali : $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \ldots\ \Delta x_n = \Delta x$ sau mai general $\Delta t_i = x_i/c_i$ = constant, metoda se reduce la metoda caracteristicilor în cazul cînd $V \ll c$, caz tratat cu precădere de Evangelisti [5], dar formulat prima dată de Jukovski [3].

O clasificare mai largă a metodelor care merită o analiză mai atentă este dată în lucrarea lui Streeter [6] astfel :

1 — metoda aritmetică ;
2 — metoda grafică ;
3 — metoda caracteristicilor ;
4 — metoda algebrică ;
5 — metoda impedanței ;
6 — metode speciale cu liniarizarea expresiei pierderilor de sarcină ;
7 — metode diferite.

Lipsește, cum era normal la acea dată, MEF dar și enunțarea explicită a metodei diferențelor finite, inclusă ca idee în primele patru sau în 7.

Metoda aritmetică prezintă similitudine cu metoda Allievi fără considerarea pierderilor de sacină. Metoda grafică este prezentată ca utilizînd o reprezentare grafică în planul variabilelor dependente (H, V) în timp ce metoda caracteristicilor folosește o reprezentare în planul variabilelor independente (x, t) și ca avînd la bază aceleași ecuații dacă se omit pierderile de sarcină. Se arată că metoda grafică poate ține seama de pierderile de sarcină prin concentrarea lor. Se vede că este vorba mai mult de istoria dezvoltării celor două metode decît de fondul lor.

Metoda algebrică este prezentată ca o variantă a metodei caracteristicilor în care $\Delta x = L$, lungimea cnductei, însă Δt este o fracțiune din L/c, ceea ce permite legarea directă a condițiilor la limită de la cele două capete ale conductei, la diferite momente t, distanțate la intervale L/c.

Metoda impedanței este metoda sonică a lui George Constantinescu la care însă autorii nu fac nici o referire.

Celelalte metode nu sînt tratate explicit.

Lucrarea de față se ocupă la început cu reprezentarea caracterului ondulatoriu al mișcării nepermanente în conducte cu ajutorul ecuațiilor pe curbele caracteristice și apoi la simplificarea ecuațiilor de bază și la modul de tratare al pierderilor de sarcină.

1.2. ECUAȚIILE MIȘCĂRII NEPERMANENTE ALE FLUIDELOE COMPRESIBILE ÎN CONDUCTE SUB PRESIUNE

Ecuațiile diferențiale ale fenomenului de lovitură de berbec se consideră pentru schema unidimensională (fig. 1);

$$V_t + \rho V V_s = + \rho U_s - p_s - \rho g J \cdot V/|V|, \tag{1}$$

$$(\rho A)_t + (\rho A V)_s = 0. \tag{2}$$

Ecuația (1) este de tip Euler, scrisă pentru curent finit, unidimensional cu $\alpha \simeq \beta \simeq 1$, avînd termenul de corecție $- \rho g J = - \tau_0 PL/(AL)$

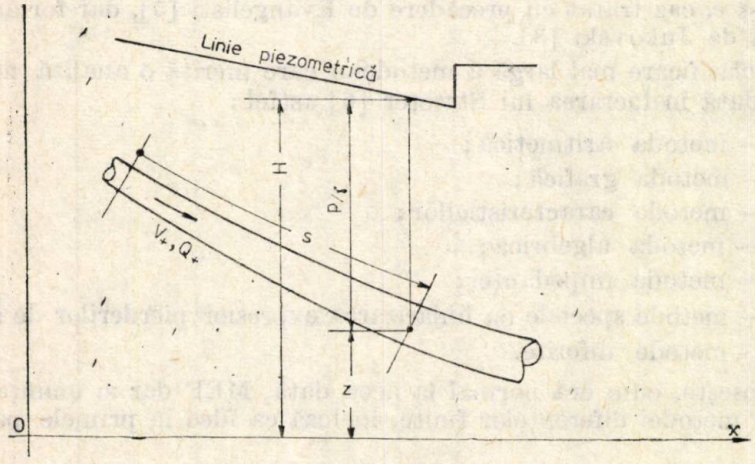


Fig. 1

care introduce disiparea de energie în schema unidimensională și în care J are semnul lui V și este raportat la greutatea fluidului.

Pentru scopul urmărit se va folosi pentru ecuațiile (1) și (2) transformarea Riemann, care se prezintă și se interpretează la punctul care urmează.

2. FORMA RIEMANN A ECUAȚIILOR LOVITURII DE BERBEC

2.1. RELAȚII PENTRU FLUID PERFECT, CONDUCTĂ UNIFORMĂ ȘI ORIZONTALĂ

Pentru cazul mișcării nepermanente a unui fluid perfect și compresibil, în conducta uniformă, indeformabilă și orizontală, Riemann [1, 2] a transformat ecuațiile (1) și (2) cu ajutorul funcției:

$$P^* = \int \frac{\mathrm{d}p}{\rho c}; \qquad \mathrm{d}P^* = \frac{\mathrm{d}p}{\rho c}. \tag{3}$$

Ținînd seama de (3) și de relația de compresibilitate $\mathrm{d}\rho = \beta\rho\ \mathrm{d}p$, β fiind coeficientul de compresibilitate, ecuațiile (1) și (2) în cazul studiat (A = constant; $J = 0$, $U_s = 0$) devin:

$$V_t = VV_s + c_0 P_s^* = 0, \tag{4}$$

$$P_t^* + VP_s^* + c_0 V_s = 0. \tag{5}$$

Prin adunare/scădere se obține

$$(P^* \pm V)_t + (V \pm c_0)(P^* \pm V)_s = 0 \tag{6}$$

în care

$$c_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}} = \sqrt{\frac{1}{\rho\beta}}. \tag{7}$$

Relațiile (6) exprimă conservarea valorii funcțiilor;

$$R_1 = P^* + V \qquad \text{și} \quad S_1 = P^* - V \tag{8}$$

de-a lungul curbelor caracteristice:

$$D^{\pm}(s) = (V \pm c_0)\mathrm{d}t. \tag{9}$$

Aici și în cele ce urmează, semnele de sus sînt pentru caracteristicile directe $C^+(a = V + c)$ și cele de jos pentru caracteristicile inverse $C^-(a = V - c)$.

Funcțiile S_1 și R_1 sînt „invarianții Riemann", iar ecuațiile (6) se numesc „ecuațiile în invarianți" sau în „forma canonică".

Pentru cazul loviturii de berbec, considerînd mișcarea nepermanentă a unui lichid perfect într-o conductă orizontală uniformă, Jukovski [3] scrie aceste ecuații astfel:

$$(p \pm \rho cV)_t + (V \pm c)(p \pm \rho cV)_s = 0 \tag{10}$$

și face observația că în cazul loviturii de berbec în conducte se poate neglija V în raport cu c și ecuațiile capătă forma:

$$(p \pm \rho cV)_t \pm c(p \pm \rho cV)_s = 0. \tag{11}$$

Această simplificare este echivalentă cu neglijarea, în ecuațiile (1), (2), a termenilor care au ca multiplicator pe V, ceea ce — în cazul cînd se neglijează pierderea de sarcină — conduce la forma folosită de Allievi pentru ecuațiile (1) și (2).

2.2. FLUID REAL, CONDUCTA NEUNIFORMĂ, DEFORMABILĂ ŞI ÎNCLINATĂ

2.2.1. Forma Riemann

Ecuaţiile (1) şi (2) sînt scrise pentru condiţiile enunţate în titlu. Ecuaţia (2) se transformă înlocuind :

$$\mathrm{d}\rho = \beta\rho\ \mathrm{d}p\,; \qquad c_0 = 1/\sqrt{\rho\beta}, \tag{12}$$

unde c_0 este celeritatea în conducta indeformabilă şi se obţine

$$A(p_t + Vp_s) + \rho c_0^2(A_t + VA_s) + \rho c_0^2 AV_s = 0. \tag{13}$$

Punem în evidenţă variabilitatea secţiunii conductei şi deformalitatea ei scriind :

$$A(s,\ t) = \bar{A}(s,\ p(t)), \tag{14}$$

de unde

$$A_t = \bar{A}_p \cdot p_t\,; \qquad A_s = \bar{A}_s + \bar{A}_p\ p_s. \tag{15}$$

Înlocuind în (13) se obţine :

$$A(p_t + V \cdot p_s)(1 + \rho c_0^2 Ap/A) + \rho c_0^2(AV_s + VA_s) = 0. \tag{16}$$

Considerînd L o dimensiune caracteristică a secţiunii transversale şi deformaţia conductei în domeniul elastic, avem :

$$\frac{\bar{A}_p}{A} = \frac{(kL^2)_p}{A} = 2\,\frac{L_p}{L} = 2\,\frac{\sigma_p}{E} = \frac{2K_1(s)}{E} = K, \tag{17}$$

în care K depinde de caracteristicile secţiunii (formă, dimensiuni, material).

Notînd :

$$c^2 = c_0^2/(1 + K \cdot \rho \cdot c_0^2), \tag{18}$$

ecuaţia (13) se scrie astfel :

$$p_t + Vp_s + \rho c^2 V_s + \rho c^2 V\bar{A}_s/A = 0. \tag{19}$$

Introducînd funcţia (3), ecuaţiile (1) şi (19) devin :

$$V_t + VV_s + cP_s^* = U - gJV/|V| = F_1, \tag{20}$$

$$P_t^* + VP_s^* + cV_s = -cV\bar{A}_s/A = -F_2. \tag{21}$$

Prin adunare şi scădere în locul ecuaţiei (6) se obţine:

$$\frac{D^{\pm}}{dt}(P^* \pm V) = (P^* \pm V)_t + (V \pm c)(P^* \pm V)_s = \pm F_1 - F_2, \qquad (22)$$

care constituie forma Riemann a ecuaţiilor mişcării nepermanente a curentului unidimensional de fluid real într-o conductă neuniformă, înclinată.

2.2.2. Forma Jukovski

În ecuaţiile (1) şi (19), în locul funcţiei P^* se introduce funcţia $V^* = \rho c V$ şi se obţine:

$$V_t^* + VV_s^* + cp_s = V[(\rho c)_t + V(\rho c)_s] + \rho c F_1, \qquad (23)$$

$$p_t + Vp_s + cV_s^* = cV(\rho c)_s - \rho c^2 V \bar{A}_s/A, \qquad (24)$$

din care rezultă ecuaţiile pe curbele caracteristice

$$\frac{D^{\pm}}{dt}(p \pm V^*) = \pm V \frac{D^{\pm}}{dt}(\rho c) \pm \rho c F_1 - \rho c F_2. \qquad (25)$$

Relaţia obţinută, în comparaţie cu ecuaţia (22), este mai simplă în partea stîngă, conţinînd explicit parametrii V şi p, dar partea dreaptă a ei este mai complicată deoarece conţine termenul suplimentar $\pm VD(\rho c)/dt$, care introduce influenţa compresibilităţii în evoluţia funcţiei $(p \pm \rho c V)$. Acest termen este neglijat în ecuaţiile (10) şi (11).

În ecuaţiile (22), (25) operatorul de derivare

$$\frac{D^{\mp}(f)}{dt} = f_t + (V \pm c) f_s \qquad (26)$$

este luat de-a lungul caracteristicilor (9). Cu simplificarea Jukovski (V neglijabil faţă de c) el se scrie:

$$\frac{D^{\pm}(f)}{dt} = f_t \pm c f_s \qquad (27)$$

şi se observă că şi în acest caz ecuaţia (25) rămîne neschimbată ca formă.

2.3. ASPECTUL FIZIC AL FENOMENULUI

Examinăm mai întîi cazul fluidului perfect în conductă uniformă şi orizontală care poate fi tratat mai uşor cu ajutorul ecuaţiei (22), care,

în condițiile enunțate ($J = 0$; $U_s = 0$; $A_s = 0$), conduc la

$$D^{\pm}(P^* \pm V) = 0. \tag{28}$$

În figura 2 considerăm o perturbație de debit $\Delta Q = q > 0$ introdusă în secțiunea N a unei conducte compuse (conducta 1 : aria A_1 și cele-

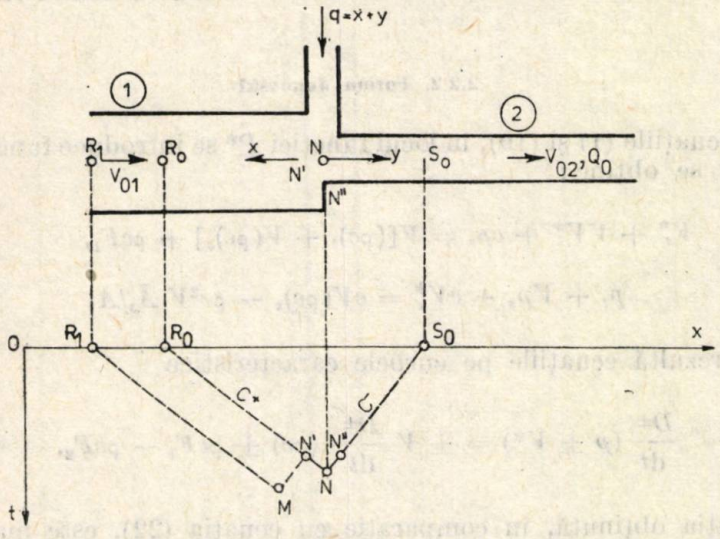


Fig. 2

ritatea c_1 ; conducta 2 : aria A_2, celeritatea c_2) în care pînă la momentul $t = 0$ (cînd se introduce perturbația q) există o mișcare permanentă de fluid perfect cu $Q = Q_0$, $V_{R_1} = V_{R_0} = V_{N'} = V_{01}$; $V_{N''} = V_{S_0} = V_{02}$; $p_{R1} = p_{R0} = p_{N'} \simeq p_{N''} = p_{S0} = p_0$. Semnul $\simeq$ arată că s-a neglijat influența variației energiei cinetice care poate fi tratată ca în cazul mai complicat $J \neq 0$.

Intuitiv se vede că perturbația q modifică cu x, respectiv cu y debitele în secțiunea $N(Q_{N'} = Q_0 - x$; $Q_{N''} = Q_0 + y$, $x > 0$; $y > 0)$ și produce creșterea presiunii p cu $\Delta p = p_N - p_0 > 0$.

Ecuația (28) scrisă sub forma: $D^{\pm}(P^*) = \pm D^{\pm}(V)$ arată că perturbațiile introduse în secțiunea N se propagă de-a lungul caracteristicilor, dar nu constituie o relație directă de calcul pentru parametrii de stare p și Q deoarece semnele nu corespund.

Pentru determinarea parametrilor de stare în punctul N la $t = 0 + \varepsilon$, adică imediat după producerea perturbației q folosim relațiile (28) ca unde de calcul — relații de-a lungul caracteristicilor $C^+(R_0 \to N')$ și $C^-(S_0 \to N'')$, împreună cu condiția la limită din secțiunea $N(x + y = q)$ astfel :

$$R_0 \to N' : (P^* + V)_{N'} - (P^* + V)_{R_0} = 0, \tag{29}$$

$$S_0 \to N'' : (P^* - V)_{N''} - (P^* - V)_{S_0} = 0, \tag{30}$$

în care

$$V_{N'} = V_{01} - \frac{x}{A_1}; \quad V_{N''} = V_{02} + \frac{y}{A_2},$$

Rezultă

$$P^*_{N'} - P^*_0 = -(V_{N'} - V_{01}) = -\Delta V_1 = \frac{x}{A_1}, \tag{31}$$

$$P^*_{N''} - P^*_0 = V_{N''} - V_{02} = \Delta V_2 = \frac{y}{A_2}. \tag{32}$$

Ținînd seama că $p_{N'} = p_{N''}$ și deci $P^*_{N'} = P^*_{N''}$, se obține :

$$-\Delta Q_1 = x = q\frac{A_1}{A_1 + A_2}; \quad \Delta Q_2 = y = q\frac{A_2}{A_1 + A_2}; \quad \Delta P^* = \frac{q}{A_1 + A_2} \tag{33}$$

Relațiile (33) exprimă modificarea parametrilor de stare în secțiunea N ca urmare a perturbației q. Aceste modificări se propagă spre stînga în conducta 1 (unda inversă sau regresivă) și spre dreapta în conducta 2 (unda directă sau progresivă).

Modificarea presiunii se obține din (3) și (33) ;

$$\Delta P^*_N = \int_{p_0}^{p_N} \frac{dp}{\rho c} = \frac{q}{A_1 + A_2}. \tag{34}$$

Cu simplificarea Jukovski, corespunzînd relației (11) se obține

$$\Delta P_N = \rho c \cdot \frac{q}{A_1 + A_2}, \tag{35}$$

În cadrul simplificării Jukovski, relațiile (31), (32) se scriu :

$$\Delta p = \pm \rho c \Delta V \tag{36}$$

și se interpretează ca relații între undele fizice asociate de viteză și presiune (relația Jukovski).

Modul de propagare al perturbației inițiale rezultă mai clar din relațiile pe caracteristicile R_1M și $N'M$ ținînd seama și de (29) :

$$(P^* + V)_M = (P^* + V)_{R_1} = (P^* + V)_{R_0} = (P^* + V)_{N'},$$

$$(P^* - V)_M = (P^* - V)_{N'}$$

Rezultă

$$V_M = V_{N'}\,;\quad P_M^* = P_{N'}^*, \tag{37}$$

adică, modificările, induse în N' se propagă neschimbate în conducta 1 ca o undă inversă. În mod analog apare unda fizică care se propagă ca o undă directă în conducta 1.

2.4. LIMITELE SIMPLIFICĂRII JUKOVSKI

Comparînd ecuaţiile (11) cu ecuaţia (25) în condiţiile $U_s = 0\,;\ J = 0$ $A_s = 0$, simplificarea Jukovski se reflectă în neglijarea termenului $\pm VD^{\pm}(\rho c)\mathrm{d}t$, ceea ce revine la adoptarea ipotezei ρc=constant de-a lungul caracteristicilor. Această ipoteză stă la baza relaţiei simplificate (36) dedusă din relaţia exactă (34) şi a relaţiilor (10) şi (11).

Abaterea introdusă prin această simplificare poate fi exprimată prin diferenţa

$$\Delta = \int_{p_0}^{p} \frac{\mathrm{d}p}{\rho c} - \frac{p - p_0}{\rho_0 c_0}. \tag{37}$$

In cazul lichidelor, pe baza relaţiei de compresibilitate $\mathrm{d}V = -\beta V_0 \mathrm{d}p$, scrisă sub forma:

$$\mathrm{d}\rho = \beta\rho\mathrm{d}p\,;\ \mathrm{d}p/\mathrm{d}\rho = c^2 = 1/(\rho\beta) = \varepsilon/\rho, \tag{38}$$

obţinem (considerînd ε = constant):

$$\mathrm{d}p = \varepsilon\mathrm{d}\rho/\rho\,;\ p - p_0 = \varepsilon\ln(\rho/\rho_0)\,;\quad \rho = \rho_0 \mathrm{e}^{\frac{p-p_0}{\varepsilon}}. \tag{39}$$

Exprimăm pe ρc:

$$\rho c = \sqrt{\varepsilon\rho} = \sqrt{\varepsilon\rho_0}\ \mathrm{e}^{\frac{p-p_0}{2}} = \rho_0 c_0 \mathrm{e}^{\frac{p-p_0}{2\varepsilon}} \tag{40}$$

şi calculăm integrala:

$$\Delta P^* = \int_{p_0}^{p} \frac{\mathrm{d}p}{\rho c} = \frac{2\varepsilon}{\rho_0 c_0}\ (1 - \mathrm{e}^{\frac{p-p_0}{2\varepsilon}}). \tag{41}$$

Prin dezvoltarea în serie se obţine:

$$\Delta P^* = \frac{p - p_0}{\rho_0 c_0} - \frac{p - p_0}{\rho_0 c_0} - \frac{p - p_0}{4\varepsilon} + \frac{p - p_0}{\rho_0 c_0}\ \frac{(p - p_0)}{24\ \varepsilon^2} - \ldots. \tag{42}$$

Luînd primii doi termeni ai dezvoltării în serie rezultă:

$$\Delta = \Delta P^* - \frac{p - p_0}{\rho_0 c_0} \simeq - \frac{p - p_0}{\rho_0 c_0} \frac{p - p_0}{4\varepsilon}. \tag{43}$$

Abaterea formulei aproximative (36) este deci acoperitoare.

Pentru o abatere relativă de maximum 2%, limita de aplicare rezultă din:

$$\frac{\Delta}{\frac{p - p_0}{\rho_0 c_0}} = -(p - p_0)/(4\varepsilon) \leqslant 0{,}02\,; \quad |\Delta p| = |p - p_0| \leqslant 0{,}08\varepsilon. \tag{44}$$

Cînd lichidul este apă, domeniul cu erori sub 2% este:

$$|\Delta p| \leqslant 0{,}08 \cdot 2 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2 = 160 \text{ bari},$$

deci limite foarte largi de aplicare.

Tot în cazul apei, al treilea termen din dezvoltarea în serie introduce o abatere relativă de circa +0,0003, deci neglijabilă față de 0,02.

Același rezultat se obține dacă se operează direct cu modificările de presiune.

In cazul gazelor evaluăm abaterea (37) pentru cazul proceselor politrope (în particular, proces adiabatic cu $n = k$), folosind relațiile:

$$c^2 = \mathrm{d}p/\mathrm{d}\rho = np/\rho = \varepsilon/\rho\,; \quad p\rho^{-n} = p_0\rho_0^{-n} = k^{-n} = \text{const.} \tag{44}$$

Obținem

$$\rho c = \rho \sqrt{np/\rho} = \sqrt{np\rho} = \sqrt{nk}\, p^{\frac{n+1}{2n}} \tag{45}$$

și calculăm integrala

$$I = \int_{p_0}^{p} \frac{\mathrm{d}p}{\rho c} = \frac{1}{\sqrt{nk}} \int_{p_0}^{p} p^{-\frac{n+1}{2n}}\, \mathrm{d}p,$$

$$I = \frac{2np_0^{\frac{n-1}{2}}}{(n-1)\sqrt{nk}} \left[(p/p_0)^{\frac{n-1}{2n}} - 1\right]. \tag{46}$$

Înlocuim pe k după (44) și obținem:

$$I = \frac{2}{n-1} c_0 \left[(p/p_0)^{\frac{n-1}{2n}} - 1\right]. \tag{47}$$

Notăm $p = p_0 + \Delta p$ şi dezvoltăm în serie paranteza mare:

$$(p/p_0)^{\frac{n-n}{2n}} - 1 = \frac{n-1}{2n}\frac{\Delta p}{p_0} - \frac{(n-1)(n+1)}{8n^2}\left(\frac{\Delta p}{p_0}\right)^2 + \dots$$

şi rezultă

$$\Delta = I - \frac{\Delta p}{\rho_0 c_0} = -\frac{(n+1)c_0}{4n^2}\left(\frac{\Delta p}{p_0}\right)^2. \tag{48}$$

La stabilirea relaţiei (48) am ţinut seama că după (44) avem:

$$\frac{c_0}{n} - \frac{p_0}{\rho_0 c_0} = \frac{(\rho_0^2 c_0^2 - n p_0 \rho_0)/\rho_0}{n \rho_0 c_0} = 0$$

Abaterea relativă faţă de soluţia aproximativă este:

$$e = \Delta/(\Delta p/\rho_0 c_0) = -\frac{n+1}{4n}\frac{\rho_0^2 c_0^2}{n \rho_0 p_0}\cdot\frac{\Delta p}{p_0} = -\frac{n+1}{4n}\frac{\Delta p}{p_0}. \tag{49}$$

Condiţia ca abaterea relativă să nu depăşească 2% ($|e| < 0{,}02$) conduce la relaţia:

$$\left|\frac{n+1}{4n}\frac{\Delta p}{p_0}\right| \leqslant 0{,}02,$$

adică limita de aplicare este

$$|\Delta p| \leqslant \frac{0{,}08\, n}{n+1}\, p_0. \tag{50}$$

Pentru aer ($n = \varkappa = 1{,}4$) se obţine

$$\frac{|\Delta p|}{p_0} \leqslant 0{,}047, \tag{51}$$

deci simplificarea Jukovski se poate aplica în limite foarte strînse cînd unda de presiune nu depăşeşte circa 5% din valoarea presiunii iniţiale.

Limitările examinate mai înainte se datoresc neglijării termenului $\pm VD\pm(\rho c)/\mathrm{d}t$ în ecuaţiile (10) şi (11).

Ecuaţia (11) conţine în plus faţă de ecuaţia (10) simplificarea Jukovski propriu-zisă, adică neglijează pe V în raport cu c. În acelaşi fel ar putea fi interpretată şi neglijarea termenului $\pm VD\pm(\rho c)/\mathrm{d}t$, menţionat mai înainte, deoarece are ca multiplicator pe V.

Vom examina totuşi separat compatibilitatea ecuaţiei (10), considerînd acum curgerea permanentă a unui fluid real ($J \neq 0$), într-o conductă uniformă ($A_s = 0$), dar înclinată ($U_s \neq 0$) (fig. 4 ; fig. 1).

Pentru cazul considerat (mişcare permanentă), în locul lui (28) folosim ecuaţia (22) sub forma :

$$(V \pm c)(P^* \pm V)_s = \pm F_1, \tag{52}$$

în care $F_1 = U_s - gJV/|V|$ conform ecuaţiei (20).

Ecuaţiile (52) constituie reprezentarea exactă a fenomenului şi lor le corespunde reprezentarea aproximativă prin ecuaţiile (10) şi (11) astfel :

$$(V \pm c)(p \pm \rho cV)_s = \pm F_1 \tag{53}$$

şi

$$\pm c(p \pm \rho\, cV)_s = \pm F_1. \tag{54}$$

Ecuaţiile (52), (53), (54) vor fi aplicate mişcării permanente din figura 3, operînd pe caracteristicile AM' şi BM' pentru ecuaţiile (52) şi (53) pe caracteristicile AM şi BM care corespund ecuaţiilor (54). Aceasta conduce la soluţii localizate în M' şi, respectiv, în M care este situat la mijlocul sectorului AB.

Folosind (53) şi (54) se obţin relaţiile :

$$\begin{aligned} (p + \rho cV)_{M'} - (p + \rho cV)_A &= F_1, \\ (p - \rho cV_{M'} - (p - \rho cV)_B &= -F_1, \end{aligned} \tag{55}$$

$$\begin{aligned} (p + \rho cV)_M - ((p + \rho cV)_A &= F_1, \\ (p - \rho cV)_M - (p - \rho cV)_A &= -F_1. \end{aligned} \tag{56}$$

din care rezultă soluţii identice pentru p şi V în M şi M', ceea ce nu e posibil.

În ipoteza ρc = constant şi deci ρ = constant (cu $\varepsilon = 1/\beta$ = constant), soluţia pentru problema din figura 3 este :

$$p_M = \frac{1}{2}(p_A + p_B) = p_A - \frac{1}{2}\gamma h_{AB}, \tag{57}$$

care concordă cu soluţia ecuaţiilor (55) şi (56) în aceeaşi ipoteză, *dar ca localizare* corespunde numai ecuaţiilor (56) şi respectiv (11). Rezultă deci că ecuaţia (10) nu este aplicabilă pentru M'. Soluţia corectă în punctul M' se poate obţine numai din ecuaţia exactă (52). Pentru a evita integrarea, folosim (52) sub formă diferenţială şi obţinem :

$$\frac{1}{\rho c}\, p_s \pm V_s = \frac{\pm F_1}{V \pm c} = \frac{F_1}{c \pm V}. \tag{58}$$

Considerăm conducta indeformabilă ($A_p = 0$) şi din relaţia de continuitate $\rho V = \text{const.}$

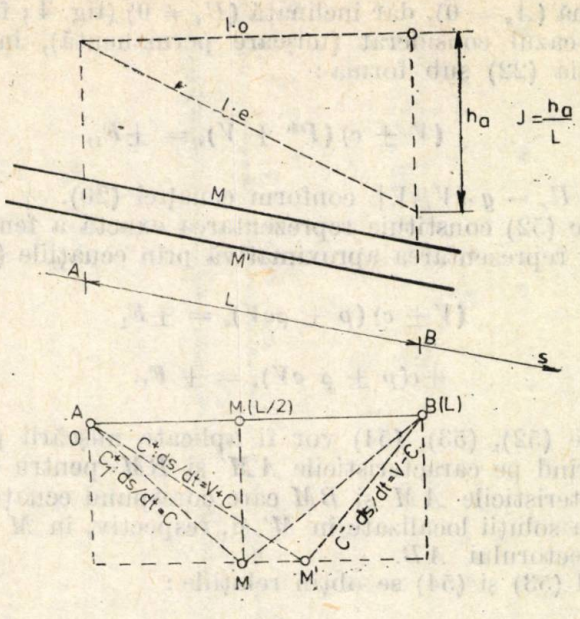


Fig. 3

obţinem

$$\frac{\rho_s}{\rho} + \frac{V_s}{V} = 0.$$

Ţinînd seama de relaţia de compresibilitate,

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\beta \frac{1}{\rho}\,\mathrm{d}p,$$

avem

$$V_s = -V\frac{\rho_s}{\rho} = -V\beta p_s = -Vp_s/(\rho c^2)$$

şi înlocuind în (58) rezultă

$$\frac{p_s}{\rho c^2}(c \pm V) = \frac{F_1}{c \pm V}.$$

Pentru conductă în cîmp gravitaţional uniform se obţine:

$$p_s = \frac{\rho(U_s - gJ)}{1 - M^2} = \frac{+g(-Z_s - J)}{1 - M^2} = \frac{g(i - J)}{1 - M^2}, \tag{59}$$

în care $i = -Z_s$ este panta de așezare a conductei. O relație identică se obține și pentru mișcarea permanentă a gazelor folosind relațiile :

$$V_s = -V\frac{\rho_s}{\rho} = -\frac{V}{\rho c^2}p_s;\ c^2 = \frac{dp}{d\rho}.$$

Relația (59) poate fi obținută și direct din relația energetică și relația de continuitate pentru mișcarea permanentă a fluidelor compresibile, ceea ce arată valabilitatea ecuației (52) pentru rezolvarea problemei.

Observăm că relația (59) este identică cu ecuația mișcării gradual variate, cu suprafața liberă în canale prismatice $(h_s = (i - J)/(1 - F_r)$ ținînd seama că $M^2 = V^2/c^2 = Fr$, ceea ce confirmă indirect corectitudinea ei și faptul că în cazul cînd se ia $a = V \pm c$, deci nu se neglijează V, soluția se obține cu ajutorul ecuației (52).

3. MODELE DE CALCUL

Pentru studiul mișcărilor nepermanente ale fluidelor în conducte sub presiune sînt folosite variate modele de calcul din care vom examina o parte. Considerațiile de la punctul precedent ne vor ajuta să stabilim mai exact domeniul lor de aplicare.

3.1. MODELUL 1 (Riemann)

Este reprezentat prin ecuația (6) și este necesar să fie folosit pentru a evita abateri relative mai mari de 2% ale presiunilor care depășesc limitele indicate prin relațiile (44) și respectiv (50). Este în mod curent cazul mișcării nepermanente a gazelor în conducte și numai excepțional cazul lichidelor la variații foarte mari ale presiunii sau ale celerității.

3.2. MODELUL 2 (JUKOVSKI)

Este reprezentat prin ecuația (11) și se aplică în limitele date de relațiile (44), respectiv, (50), deci este curent aplicabil în cazul mișcării nepermanente a lichidelor în conducte. El rezultă din două simplificări efectuate față de modelul 1 și anume :

— la trecerea de la ecuația (10) la ecuația (11), se neglijează V în raport cu c — celeritate ;

— se neglijează termenul $\pm VD^{\pm}_{\downarrow}(\rho c)/dt$ în ecuația (25). Acest termen introduce influența compresibilității fluidului prin variația lui ρc, dar poate introduce și influența variabilității lui c pentru ρ = constant. Acesta din urmă ar putea fi cazul mișcării lichidelor în conducte foarte deformabile sau/și foarte neuniforme.

3.3. MODELUL 3

În mod curent, în locul expresiei $p \pm \rho cV$, conținînd funcția Jukovski, se introduce [5, 6, 7, 8] expresia $H \pm cV/g$. conducînd în locul ecuației (11) la ecuațiile (fig. 1):

$$(H \pm cV/g)_t \pm c(H \pm cV/g)_s = 0 \tag{60}$$

sau forma echivalentă:

$$(H \pm mQ)_t \pm c(H \pm mQ)_s = 0, \tag{61}$$

cu $H = z + p/\gamma$ — cota piezometrică și
Q — debitul.

Ecuația (60) se obține din (25) pentru $J=0$ (fluid perfect) și $F_2=0$ (conductă uniformă) înlocuind $p = \rho g(H - z)$. Rezultă:

$$D^{\pm}(p \pm \rho cV) = D^{\pm}[\rho g(H - z) \pm \rho cV] = g\left[(H - z) \pm \frac{c}{g} V\right] \times$$

$$\times D^{\pm}(\rho) + g\rho D^{\pm}\left(H \pm \frac{cV}{g}\right) + \rho g D^{\pm}(z).$$

Pentru conductă fixă:
$\rho g D^{\pm}(z) = \rho g(\pm cZ_s)$ care se anulează cu același termen din partea dreaptă care provine din $U_s = -gz$ în cîmp gravitațional uniform.

Apare de aici că între modelul 2 reprezentat prin ecuația (11), și modelul 3, reprezentat prin ecuația (60) sau (61), există următoarele diferențe:

— modelul 3 include direct în funcțiile $(H \pm mQ)$ sau $(H \pm cV/g)$ influența cîmpului gravitațional, adică a termenilor din partea dreaptă a ecuației (20) care provin din $U_s \neq 0$;

— în modelul 3 se neglijează termenul $\frac{1}{\rho}[(H - z) \pm cV/g]D^{\pm}(\rho)$ în raport cu variațiile presiunii, ceea ce este acceptabil în cazul lichidelor; simplificarea este asemănătoare cu aceea prin care se trece de la ecuația (6) la ecuația (11), care presupune neglijarea influenței compresibilității exprimată prin $-VD(\rho c)$.

În concluzie, putem practic accepta pentru modelul 3 aproximativ același domeniu de aplicare ca pentru modelul 2, cu avantajul că în modelul 3 influența înclinării conductei este exprimată direct.

3.4. MODELUL 4

În cazul fluidului real și al conductei uniforme, ecuația (25) se reduce la:

$$(H \pm mQ)_t \pm c(H - mQ)_s = \pm cJ \cdot V/|V|; \tag{62}$$

$$m = \frac{c}{gA},$$

sau

$$\frac{D^{\pm}}{dt}(H \pm mQ) = \mp cJ \cdot V/|V| \tag{63}$$

aplicabilă de-a lungul caracteristicilor

$$C^{\pm} : ds/dt = \pm c.$$

Sub altă formă, ecuaţia (63) poate fi scrise şi astfel :

$$D \pm (H \pm mQ) = V/|V| \cdot J\, ds, \tag{64}$$

în care $ds = \pm c\, dt$ este luat de-a lungul caracteristicilor C^+ şi C^-.

Modelul 4 este reprezentat prin ecuaţiile (63) sau (64) şi constituie o completare a modelului 3 prin pierderile de sarcină prezente în partea dreaptă.

Acest model este curent folosit pentru studiul mişcării nepermanente a lichidelor în conducte sub presiune [5, 6, 7, 8].

Panta hidraulică J se exprimă prin relaţiile cunoscute, care pentru mişcarea turbulentă sînt neliniare în V sau Q, ceea ce, de regulă, nu permite integrarea directă a ecuaţiei (63) şi face necesară recurgerea la metodele aproximative de integrare numerică pe intervale finite. Este cazul metodelor enunţate la început.

Ultima parte a lucrării tratează modalităţi de evaluare aproximativă a termenului din partea dreaptă a ecuaţiei (63).

Rezolvarea prin integrare directă a ecuaţiei (63) este uşurată prin liniarizarea pierderilor de sarcină din partea dreaptă. Este modul de rezolvare folosit în metoda impedanţei pornind fie de la ecuaţii în forma (22) cu $F_2 = 0$ şi $U_s = 0$ sau folosind direct ecuaţiile primare (1) şi (2) în aceleaşi condiţii ($A_s = 0$; $U_s = 0$). Un mod de tratare analog a fost folosit de Gogu Constantinescu în [11] şi reluat în [10].

3.5. MODELUL 5

În cazul unei conducte neuniforme modelul 4 poate fi completat în partea dreaptă cu încă un termen $\left(\frac{c^2}{g} V \cdot \bar{A}_s/A\right)$ care introduce deci influenţa neuniformităţilor geometrice asupra evoluţiei fenomenului (reflecţii, refracţii) asemănător termenului care introduce influenţa pierderilor de sarcină.

Observaţie. La folosirea MDF sau MEF este mai comod să se folosească ecuaţiile primare (1) şi (2) simplificate în mod corespunzător şi aduse la forme care corespund modelelor tratate mai înainte.

4. EVALUAREA PIERDERILOR DE SARCINĂ

4.1. CONSIDERAȚII GENERALE

Folosirea modelului 4 reprezentat prin ecuația (63) sau (64) pe intervale finite — metoda caracteristicilor, metoda cu pas de timp specificat — impune evaluarea pierderilor de sarcină pe intervalul de integrare. Aceeași problemă apare în cazul folosirii modelului 1, completat cu pierderi de sarcină, respectiv a ecuațiilor (22).

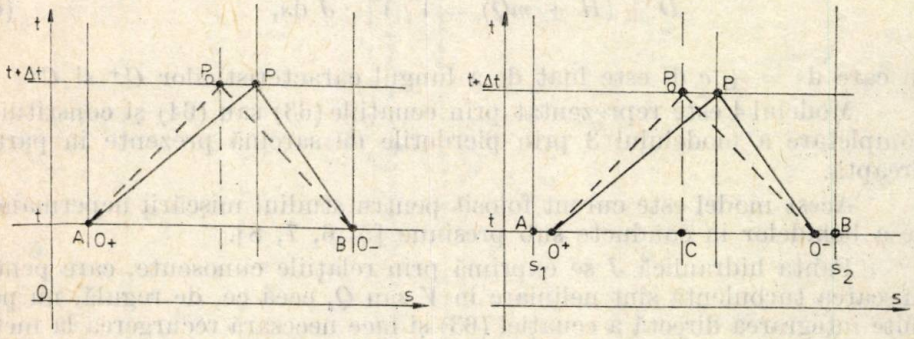


Fig. 4

În figura 4 este ilustrată punerea problemei pentru cele două cazuri. În stînga figurii este ilustrată metoda caracteristicilor în cadrul căreia punctele P sau P_0 în care se determină Q și H sau p sînt situate la intersecția caracteristicilor care pornesc din punctele A și B în care situația este cunoscută, determinată la timpul anterior prin același procedeu.

În dreapta figurii este ilustrată metoda cu pas de timp specificat în care valorile parametrilor Q și H sau p se determină în nodurile unei rețele rectangulare fixe în punctele s_0, s_1, s_2 ... s_k la timpi specificați : t_1, t_2, t_3 ... t_N. De obicei, pasul de timp este constant : $t_n - t_{n-1} = \Delta t =$ = constant, în timp ce intervalele $s_k - s_{k-1} = \Delta s_k$ sînt de obicei diferite pentru a se adapta mai bine instalațiilor studiate.

Ideea metodei este următoarea : pentru a determina situația în nodurile specificate P sau P_0 (punctul P_0 corespunde unui model de tip Jukovski, punctul P ar corespunde unui model de tip Riemann) se folosesc caracteristicile $O_+ P_0$ și $O_- P_0$ în care punctele de plecare O_+ și O_- nu coincid, de regulă, cu nodurile rețelei (notate pe figură cu A și B).

Valorile Q și H sau p în punctele O_+ și O_- necesare pentru calculul invarianților Riemann se determină prin interpolare între valorile cunoscute anterior în nodurile rețelei (A, C, B).

Este comod ca punctele O_+ și O_- să fie alese la dreapta și respectiv la stînga punctelor A și B, pentru a avea formule simple de interpolare.

În cazul ambelor metode folosind ecuația (64) obținem pentru determinarea valorilor Q și H în punctul P_0 următoarele relații :

$$(H + mQ)_{P_0} = R_{0+} - \int_{0+}^{P_0} V/|V|\, J\, ds, \tag{65}$$

$$(H - mQ)_{P_0} = S_{0-} + \int_{P_0}^{0-} V/|V|\, J\, ds, \tag{66}$$

în care am notat invarianții Riemann :

$$R = H + mQ; \qquad S = H - mQ. \tag{67}$$

Relațiile de mai sus sînt valabile pe porțiuni de conductă uniformă, iar la aplicarea lor, în ambele metode — metoda caracteristicilor, metoda intervalelor specificate sau altele asemănătoare — trebuie evaluate pe intervale finite integralele din partea dreaptă a relațiilor (65) și (66). Cîteva procedee pentru rezolvarea acestei probleme vor fi examinate la punctele următoare.

Înainte de aceasta ne vom opri asupra interpretării integralelor din partea dreaptă a ecuațiilor (65), (66).

În cazul metodei caracteristicilor (fig. 4) interpretarea este evidentă : ele reprezintă pierderea de sarcină în mișcarea relativă a undei de calcul față de fluidul în mișcare (deci pe distanța $\int \pm c\,dt$ și nu $\int (V \pm c)\,dt$).

În cazul metodei cu intervale specificate, interpretarea este aceeași, dar apare problema dacă trebuie introduse suplimentar pierderile de sarcină aferente mișcării relative pe intervalele AO_+ și O_-B(fig. 4). Examinînd problema pentru mișcarea permanentă (fig. 3) se vede că soluția corectă se obține dacă se introduc numai pierderile de sarcină pe porțiunile O_+P_0 și P_0O_- care sînt parcurse de unda care poartă invariantul în mișcarea față de fluid, deci așa cum rezultă din ecuația (64).

Folosind pentru panta hidraulică o formulă de tipul :

$$J = b\, Q|Q|, \tag{68}$$

în schemele cu intervale finite — ecuațiile (65), (66) — trebuie să se exprime :

$$h_{0P} = \int_0^P \tau\, ds = \int_0^P b|Q|Q = f(Q_0, Q_P), \tag{69}$$

în care b poate fi o funcție de numărul Reynolds care se presupune cunoscut, fiind, de regulă, suficientă evaluarea lui la începutul intervalului, în O.

Modul de exprimare al pierderii de sarcină, care conform (68) implică o neliniaritate în Q, diferențiază diferite variante de rezolvare ale sistemului (65, 66) pentru problema elementară: determinarea valorilor Q_P, H_P (fig. 4) în funcție de valorile cunoscute la momentul anterior: (Q_{O+}, H_{O+}) și (Q_{O-},H_{O-}).Vom expune cîteva asemenea variante cunoscute sau propuse și o analiză comparativă a lor.

Facem precizarea că formula (69) este scrisă în ipoteza Jukovski ($a = V \pm c \simeq \pm c$) cu $ds = \pm c\, dt$. În cazul general ea trebuie modificată conform ecuației (6), urmînd a se evalua integrala

$$I_r = \int_{t_0}^{t+\Delta t} (\pm F_1 + F_2)dt, \tag{70}$$

în care t_0 reprezintă momentul în care unda se află în O_+ sau O_- și $t_0 + \Delta t$ momentul în care unda a ajuns în P (fig. 4).

4.2. VARIANTE DE SCHEME

Varianta 1. Este cea mai simplă și mai des folosită (ex. [6]) avînd o formă explicită și liniară. Pierderile de sarcină se exprimă cu valorile de la începutul intervalului și ecuațiile (65, 66) se scriu astfel:

$$H_P + m_A Q_P = R_{O+} - M_{O+P}|Q_{O+}|Q_{O+} \tag{71}$$

$$H_P - m_B Q_P = S_{O-} + M_{O-P}|Q_{O-}|Q_{O-}, \tag{72}$$

în care am introdus coeficientul de rezistență hidraulică M.

Varianta a 2-a. Se calculează pierderea de sarcină cu valoarea debitului din nodul P, folosind caracteristicile tronsonului corespunzător. Relațiile de calcul sînt:

$$H_P + m_A Q_P = R_{O+} - M_{O+P}|Q_I Q_P, \tag{73}$$

$$H_P - m_B Q_P = S_{O-} M_{O-P}|Q_P|\, Q_P. \tag{74}$$

Acest sistem conduce la o ecuație în Q_P de forma:

$$ax|x| + bx + c = 0, \tag{75}$$

care, în condițiile problemei, admite soluția unică

$$x = \text{sign}(c)\ (b - \sqrt{b^2 + 4a|c|})/(2a), \tag{76}$$

ceea ce permite calculul fără iterații.

Varianta a 3-a. Este o combinație între variantele 1 și 2 : se exprimă separat pierderea de sarcină cu valorile de la capetele intervalului și se face media aritmetică a lor. Ecuațiile care rezultă sînt :

$$H_P + m_A Q_P = R_{O+} - \frac{1}{2}\,(M_{O+P}|Q_{O+}|Q_{O+} + M_{PO+}|Q_P|Q_P, \qquad (77)$$

$$H_P - m_B Q_P = S_{O-} + \frac{1}{2}\,(M_{O-P}|Q_{O-}|Q_{O-} + M_{P*}|Q_P|Q_P. \qquad (78)$$

Ecuațiile sînt neliniare în Q_P, dar conduc la o ecuație de forma (75) cu soluția unică (76).

Notațiile M_{OP} și M_{PO} pun în evidență faptul că modulul de rezistență M ar putea fi evaluat pentru numere Reynolds diferite corespunzînd situației din O (adică O_+ sau O_-) și din P.

Cu o eroare neglijabilă se poate lua $M_{OP} = M_{PO}$, evaluat pentru situația (fig. 4) care corespunde unui număr Reynolds

$$Re = \frac{1}{2}\,(Re_A + Re_C) \text{ sau } Re = \frac{1}{2}\,(Re_B + Re_C).$$

Varianta a 4-a, pe care o adăugăm pentru examinare, folosește pentru exprimarea pierderilor de sarcină media geometrică a debitelor de la capetele intervalului :

$$H_P + m_A Q_A = R_{O+} - M_{O+}|Q_{O+}|Q_P, \qquad (79)$$

$$H_P - m_B Q_P = S_{O-} + M_{O-}|Q_{O-}|Q_P \qquad (80)$$

și conduce la ecuații liniare în H_P și Q_P.

Varianta a 5-a. Este propusă de Evangelisti [5] și folosește pentru exprimarea pierderilor de sarcină media (ca în varianta 3) :

$$h_{OP} = (M_O|Q_O|Q_O + M_P|Q_P|Q_P)/2, \qquad (81)$$

dar pentru rezolvarea ecuațiilor (65, 66) utilizează metoda predictor-corector. În faza predictor se calculează H_P și Q_P ca în varianta 1, folosind relațiile (71, 72) și în fazele corector se folosește formula (81) în care Q_P se introduce cu valoarea de la faza anterioară.

La o singură iterație se reduce la varianta 1, iar la mai multe iterații devine echivalentă cu varianta a 3-a, dacă în nodul P nu sînt condiții la limită neliniare. Și în această ultimă situație se pot găsi — în majoritatea cazurilor — soluții care folosesc ecuația (76) și elimină iterațiile.

Varianta a 6-a. Este soluția folosită în programul nostru LOVBE [10] și se inspiră din metoda diafragmelor. Pierderile de sarcină se con-

centrează într-un număr de noduri, de preferință cu condiții la limită liniare. Aceste noduri sînt tratate ca diafragme fixe, avînd valori diferite ale cotei piezometrice : H' înainte și H'' după nod. Într-un nod P avînd numai diafragmă, relațiile de bază sînt :

$$H'_P - H''_P = M_P|Q_PQ_P, \tag{82}$$

$$H'_P + m_A Q_P = R''_{O+}, \tag{83}$$

$$H''_P - m_B Q_P = S'_{O-}. \tag{84}$$

Și aceste relații conduc la o ecuație în Q_P de forma (75) și cu soluția unică (76), deci cu rezolvare directă.

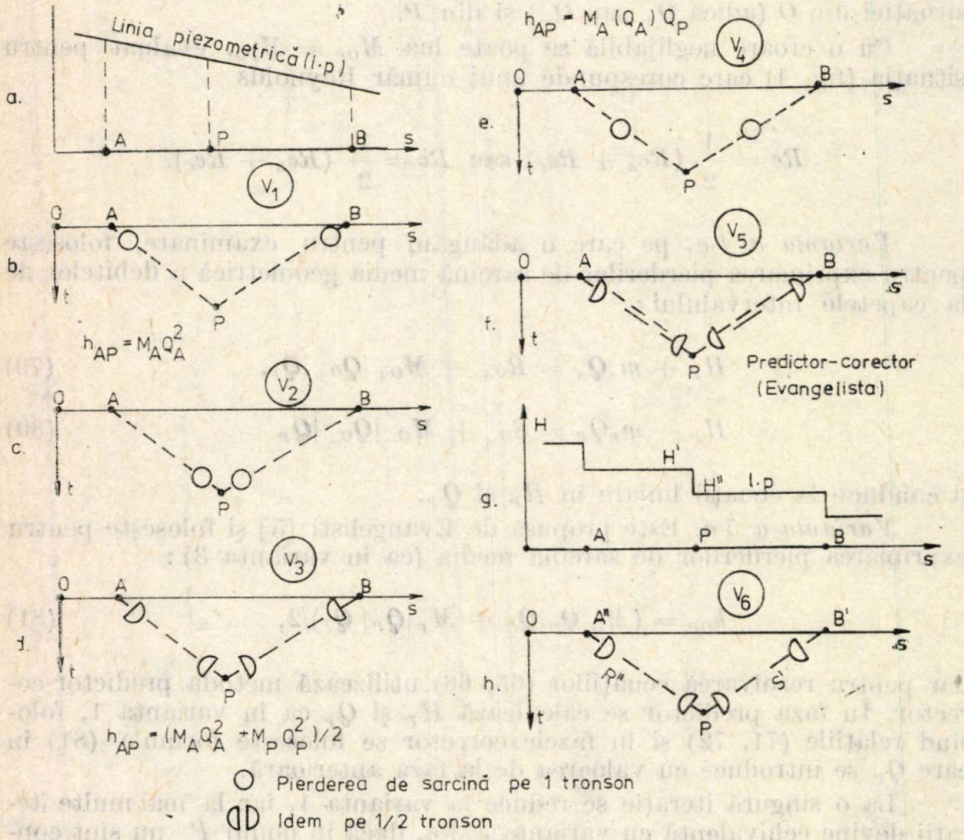


Fig. 5

În figura 5 se dă o reprezentare sinoptică a celor șase variante, arătîndu-se forma liniei piezometrice în planul (s, H) și schema undelor de calcul (caracteristicile) în planul (s, t).

Examinînd figura 5 se observă că:

— variantele 1, 2, 3, 4, 5 furnizează o singură valoare pentru cota piezometrică în nod și deci conduc la o reprezentare grafică printr-o linie piezometrică continuă.

— varianta 6 are o linie piezometrică discontinuă, marcînd nodurile cu pierderi de sarcină (diafragme);

— variantele 3 și 5 sînt echivalente din punctul de vedere al reprezentării fenomenului.

4.3. COMPARAȚIE CU O SOLUȚIE CVASI-EXACTĂ

Compararea variantelor se face pentru fenomenul generat de închiderea bruscă și totală a unei vane la capătul unei conducte uniforme *CD* ilustrat în figura 6.

Condițiile inițiale și la limită sînt:

$$H(s,\ 0) = H_0 = s' \cdot J_0;\ Q(s',\ 0) = Q_0;\ Q(s' = 0,\ t) = 0$$

Cu ajutorul undelor de calcul arătate pe figură se obține o soluție cvasiexactă a problemei. Soluția nu este exactă deoarece se neglijează pierderile de sarcină pe trasee ca: D_2P_2, P_2D_3, D_3PA_3, cu viteze foarte mici.

Soluția cvasiexactă care se obține este:

$$H(s',t) = mQ_0 + \frac{1}{2}\,ctJ_0 = H_0 + mQ_0 - \frac{1}{2}\,ctJ_0, \tag{85}$$

$$Q(s',\ t) = s' \cdot J_0/(2m), \tag{86}$$

$$H(0,\ t) = mQ_0 + \frac{1}{2}\,ctJ_0 \tag{87}$$

și este valabilă pentru zona perturbată ($s' < c.t.$), situată pe figura 6 sub linia hașurată.

În figurile 7 și 8 se prezintă comparativ soluțiile obținute cu ajutorul variantelor 1 ... 6 — notate pe cele două figuri cu $V_1 \ldots V_6$ și soluția cvasiexactă — notată cu V_0.

Pentru variantele V_1, V_2, V_3, V_4 și V_6 s-au efectuat calcule directe și pe calculator. Pentru varianta 5 nu s-au efectuat calcule; ea a fost echivalentă cu varianta V_3, ceea ce implică cîteva iterații. În figura 7 se arată liniile piezometrice (trasate prin unirea punctelor rezultate din calcul) la momentul $t = 4 \cdot \Delta s'/c$; în figura 8 se reprezintă variația în timp a cotei piezometrice lîngă vană, comparată cu soluția (87).

Din examinarea celor două figuri se constată clasarea variantelor în trei categorii de echivalență:

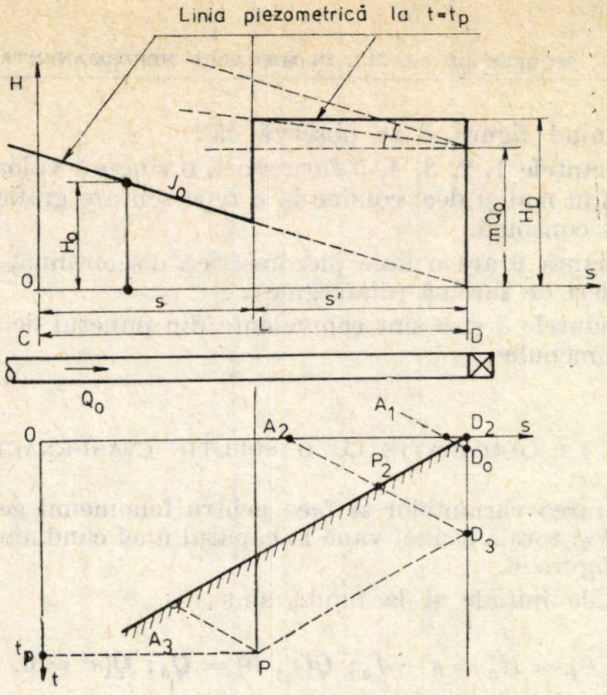

Linia piezometrică la t=tp
H
J0
H0
0
s
s'
L
C
D
mQ0
HD
Q0
A1
A2
D2
D0
P2
D3
A3
P
tp
t

Fig. 6

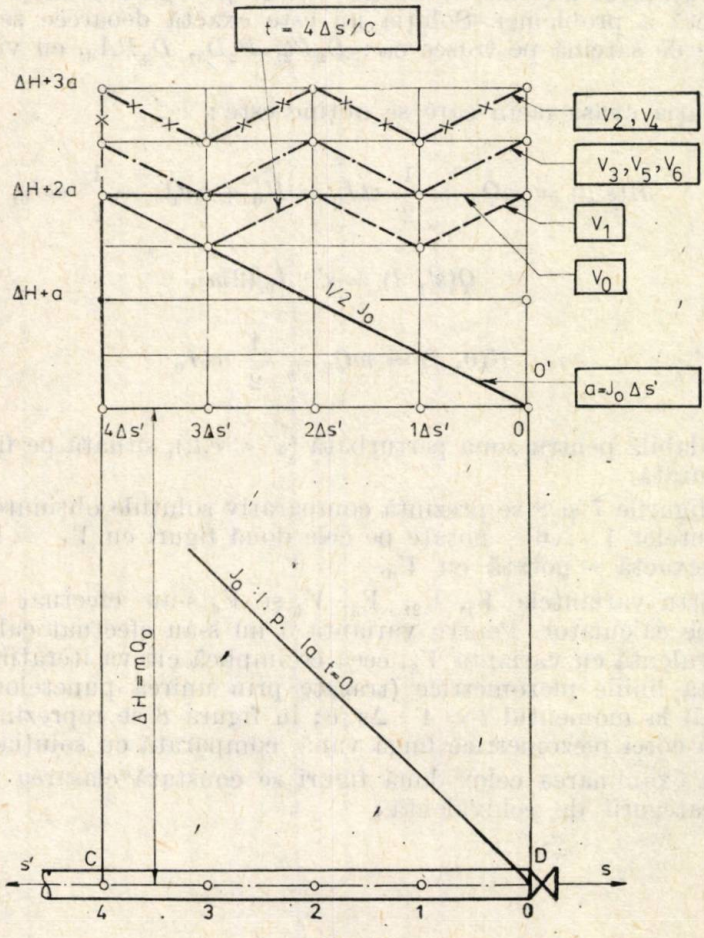

t = 4Δs'/C
ΔH+3a
ΔH+2a
ΔH+a
V2, V4
V3, V5, V6
V1
V0
V2 J0
0'
a=J0 Δs'
4Δs'
3Δs'
2Δs'
1Δs'
0
J0 = l. p. la t=0
ΔH = mQ0
s'
C
D
s
4
3
2
1
0

Fig. 7

(1) V_1 care aproximează prin lipsă cu eroarea maximă $a = J_0 \cdot \Delta s$;

(2) V_2 și V_4 care aproximează prin exces cu eroarea maximă a;

(3) V_3, V_5 și V_6 care se comportă cel mai bine încadrînd soluția cvasiexactă cu abaterile extreme de $\pm a/2$.

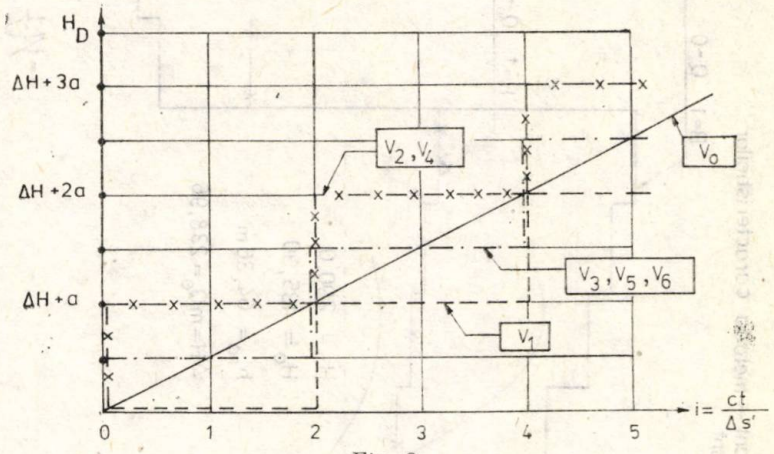


Fig. 8

Între variantele V_3, V_5 și V_6 apreciem că varianta V_3 este preferabilă. Față de varianta V_5 cu care este echivalentă ca precizie, nu comportă iterații. Chiar în situația cînd în nod există condiții la limită neliniare, în majoritatea cazurilor (de exemplu castel de echilibru sau hidrofor) se pot construi algoritme care folosesc varianta V_3.

Varianta V_6 nu mai este echivalentă cu V_3 și V_5 cînd rețeaua nu respectă condiția Courant. ($\Delta x = c\Delta t$) decît dacă diafragmelor li se afectează pierderile de sarcină aferentă distanțelor $c \cdot \Delta t$.

În cazul cînd rețeaua nu respectă condiția Courant (adică $\Delta x \neq c \cdot \Delta t$ pe toată lungimea sau numai pe unele tronsoane) pe lîngă erorile de reprezentare a pierderilor de sarcină — dacă nu se efectuează corecția menționată) mai apare și o abatere care provine dintr-o schimbare virtuală a vitezei de propagare. Fenomenul este ilustrat în figura 9 unde, pentru schema din figura 7, se arată variația cotelor piezometrice la capătul conductei în D pentru două manevre de modificare bruscă a debitului de la $Q = Q_0$ la $Q_1 = 0$ și de la $Q = Q_0$ la $Q_1 = \frac{1}{2} Q_0$.

Curbele în trepte reprezintă soluția obținută cu un algoritm bazat pe varianta V_3, cu respectarea condiției Courant ($\Delta t = \Delta x/c$). Soluția cu linie curbă continuă (care aproximează soluția cu discontinuități) a fost obținută cu același algoritm și aceleași date, dar cu $\Delta t = 0{,}58 \cdot \Delta x/c$.

Se vede că pentru ambele manevre soluțiile sînt foarte apropiate pînă la momentul $4{,}66 = 0{,}58 \cdot 8$ (unitatea de măsură pentru timp fiind $0{,}25 \cdot L/c$, corespunzătoare împărțirii conductei în patru tronsoane de calcul), după care diferă foarte mult.

Explicația este evidentă pe figură. În cazul respectării condiției Courant viteza de propagare a perturbației realizată în modelul de calcul

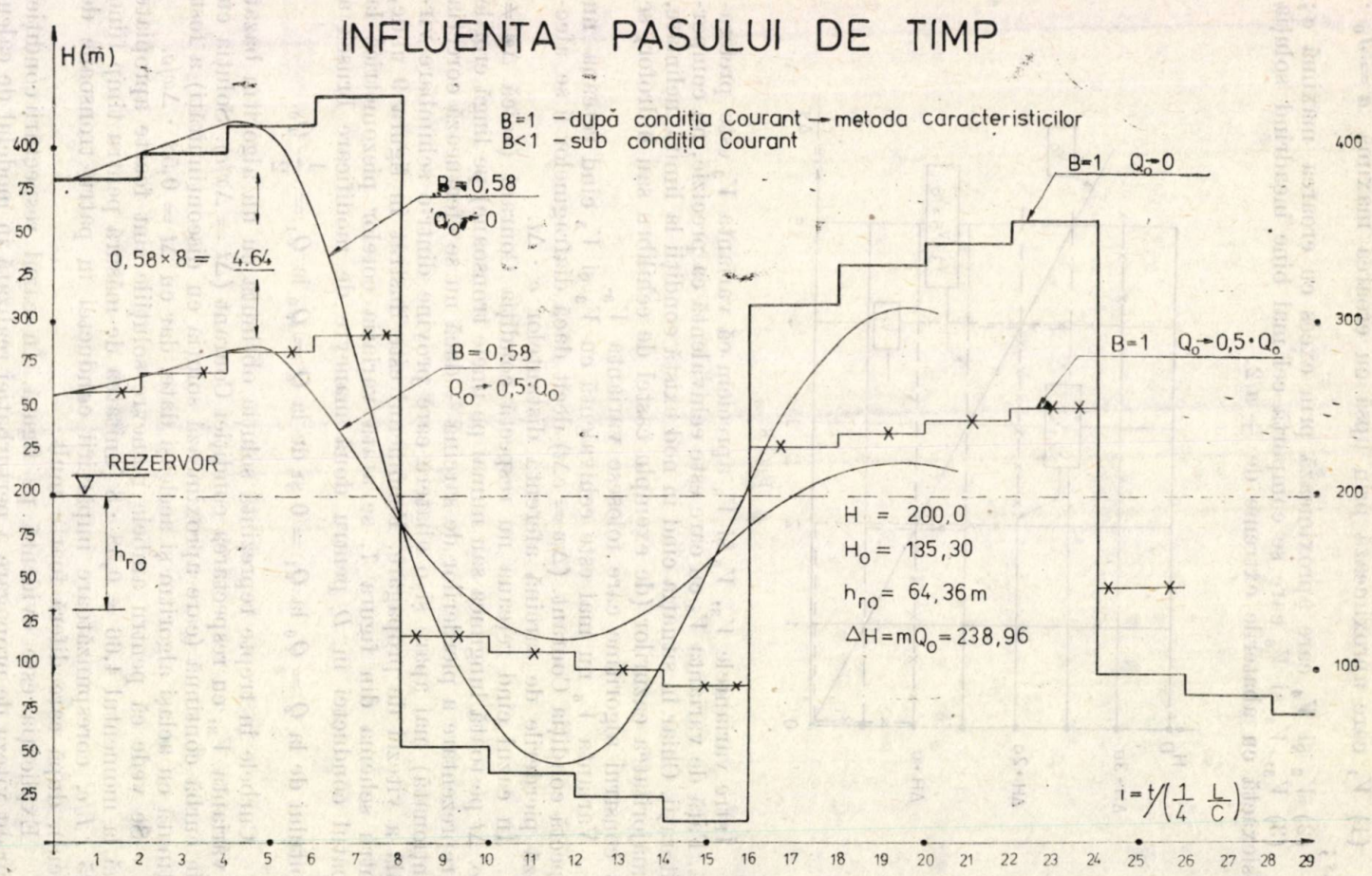

INFLUENTA PASULUI DE TIMP
H(m)
B=1 – după condiția Courant – metoda caracteristicilor
B<1 – sub condiția Courant
B=0,58
Q₀→0
0,58×8 = 4,64
B=0,58
Q₀→0,5·Q₀
B=1 Q₀→0
B=1 Q₀→0,5·Q₀
REZERVOR
h_ro
H = 200,0
H₀ = 135,30
h_r0 = 64,36 m
ΔH=mQ₀=238,96
i=t/(1/4 L/C)
400
300
200
100

Fig. 9

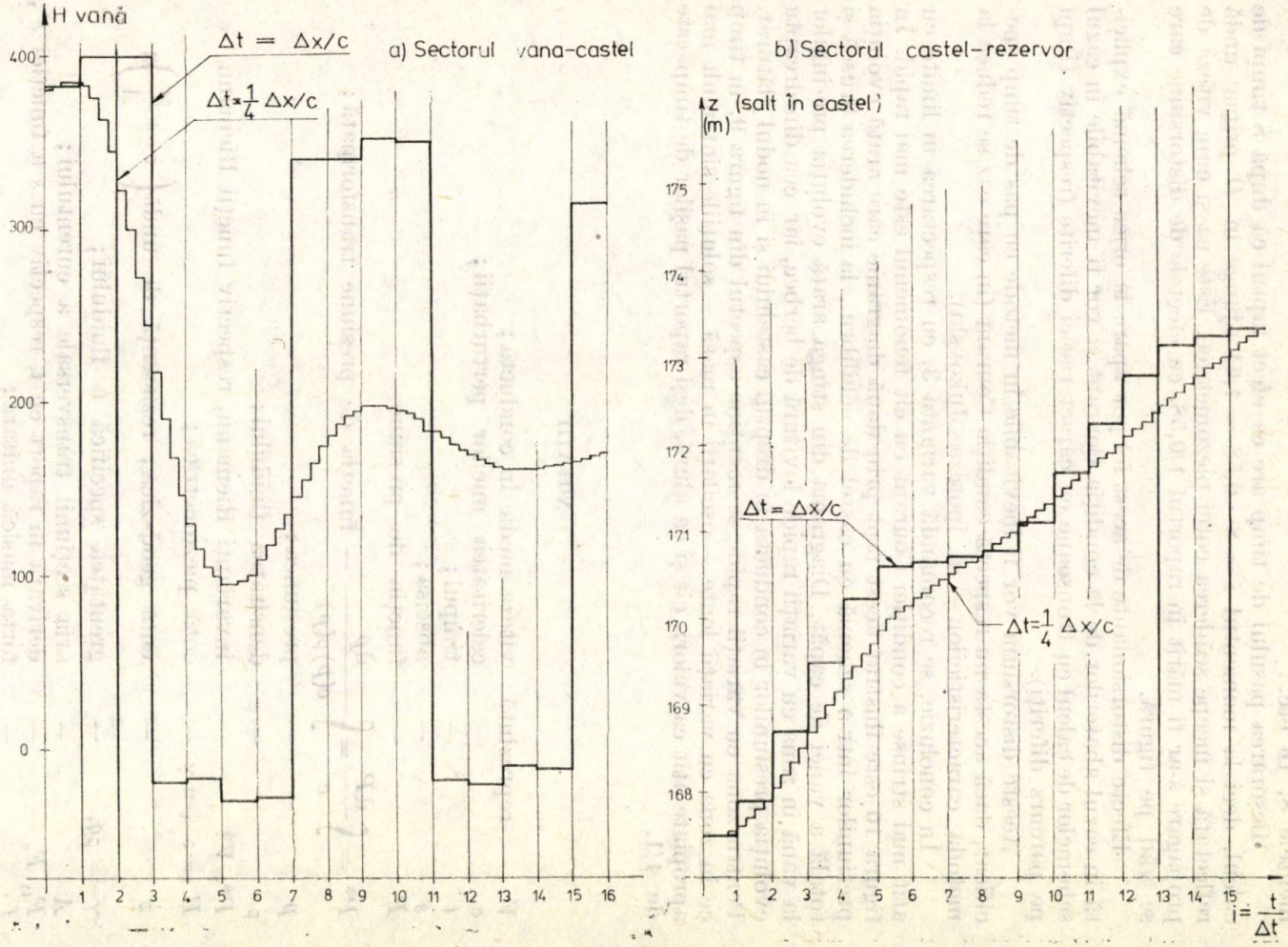

H vană
400
300
200
100
0
Δt = Δx/c
Δt=1/4 Δx/c
a) Sectorul vana-castel
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16
b) Sectorul castel-rezervor
z (salt în castel)
(m)
175
174
173
172
171
170
169
168
Δt= Δx/c
Δt=1/4 Δx/c
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
i = t/Δt

Fig. 10

coincide cu cea a undei fizice și reproduce corect discontinuitățile la momentele 8, 16 etc.

Micșorarea pasului de timp are ca efect faptul că după 8 timpi de calcul, deci la momentul $i = 8 \cdot 0{,}58 = 4{,}64$ ajunge în D prima undă reflectată și începe scăderea cotei piezometrice. Este ca și cum viteza de propagare s-ar fi mărit în raportul 1/0,58, cu efectele de distorsiune care se văd pe figură.

Efecte distorsionante de acest fel pot apare la orice schemă explicită în cazul abaterilor de la condiția Courant și vor fi inevitabile în cazul schemelor de calcul cu tronsoane cu caracteristici diferite (respectiv timpi pe parcurs diferiți).

Aceste distorsiuni vor fi inevitabile în metode cu pas de timp specificat, dacă acesta nu respectă condiția Courant (în care caz se reduce la metoda caracteristicilor — în ipoteza Jukovski).

În concluzie, se recomandă varianta 3, cu respectarea în limite cu atît mai strînse a condiției Courant cu cît fenomenul este mai rapid. În figura 10 este ilustrat acest fapt prin două diagrame care arată evoluția presiunilor într-o schemă cu castel de echilibru., la închiderea bruscă și totală a vanei de capăt. Diagrama din stînga arată evoluția presiunilor la vană în zona cu variații rapide lovitură de berbec, iar cea din dreapta evoluția presiunilor în conductă în dreptul castelului și în nodul alăturat. Pentru zona cu variații rapide se menține aspectul din figura 9, în timp ce în zona cu variații lente — oscilații în masă — soluțiile sînt mult mai apropiate atît ca valori, cît și ca alură, deși raportul pașilor de timp este de 4/1.

NOTAȚII

V reprezintă viteza medie în conductă;
c — celeritatea micilor perturbații;
t — timpul;
s — abscisa;
P — funcția de presiune
$P^* = \int \frac{dP}{c} = \int \frac{dp}{c(p)\rho(p)}$ — funcția de presiune transformată;
p — presiunea;
ρ — densitatea fluidului;
P^*, V^* — invarianți Riemann, respectiv funcții Riemann
$H = z + n/\gamma$ — cotă piezometrică;
z — cota geodezică; rezistență de undă $\left(z = \frac{\rho c}{A} \right)$;
$\gamma = \rho g$, — greutatea specifică a fluidului;
A — aria secțiunii transversale a curentului;
F_t, F_s — derivata în raport cu t, respectiv cu s a funcției F;
f — forța masică unitară;
DF/dt — derivata substabțială (Euler) a funcției F după $Ds = dt$;
g — accelerația gravitației;

$J = \mathrm{d}h_r/\mathrm{d}s$ — panta hidraulică;
h_r — pierderea de sarcină;
α — coeficientul lui Coriolis;
β — coeficient de corecţie pentru impuls, coeficient de compresibilitate;
τ_0 — efortul tangenţial la contactul cu peretele conductei;
P — perimetrul udat
L — lungime, dimensiunea transversală a conductei în ecuaţia (12)
$R = H + mQ$ — invariant Riemann direct, după $Ds = (V + c)\mathrm{d}t$;
$S = H - mQ$ — invariant Riemann invers după $Ds = (V - c)\mathrm{d}t$;
$m = \frac{c}{gA}$ — rezistenţa de undă, raportată la debit;
Q — debitul volumic al curentului;
k — constantă
U — funcţie de forţă ($\vec{f} = \mathrm{grad}\ \vec{U}$).

BIBLIOGRAFIE

1. B. RIEMANN, *Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite*, Abh. d. G. d. Wiss, Göttingen, 1860.
2. L. G. LOITIANSKI, *Mehanika jidkosti i Gaza*, GITTL, Moskva, 1957.
3. N. E. JUKOVSKI, *O ghidrovliceskom udare v vodoprovdnih trubah*, Biul. Pol. Obscestvo, *5*, p. 225–290 (1899).
4. L. ALLIEVI, *Teoria generale del moto perturbato dellacqua nei tubi in pressione*, Ann. Soc. Ing. Arch. Italiani, Milano, 1903.
5. G. EVANGELISTI, et. al., *Some applications of waterhammer analysis by the method of characteristics*, L'Energia Elettrica, *1*(1973), *6* (1974).
6. L. V. STREETER, E. B. WYLIE, *Hydraulic Transients*, McGraw Hill, N. Y. 1967.
7. L. BERGERON, *Du coup de bélier en hydraulique au coup de foudre en électricité*, Dunod, Paris, 1950.
8. D. CIOC, *Hidraulică şi Elemente de Mecanica Fluidelor*, vol. II, E. D. P., Bucureşti, 1960.
9. O. SCHNYDER, *Druckstösse in Pumpensteig analagen*, Schw. Bauztg, **94**, *22*, 23 (1979).
10. D. CIOC, *Contribuţii la calculul mişcărilor nepermanente în conducte şi la teoria sonicităţii cu aplicare la pompajul sonic*, ISCH, Studii de hidraulică, XVIII (1968).
11. G. CONSTANTINESCU, *Theory of Sonics. A Treatise on Transsmision of Power by Vibraiton* Vol. I, London 1918 (Traducere în l. română: Teoria sonicităţii de D. Ghermani, Bucureşti, 1922).

SOLUȚIONAREA PROBLEMEI MIȘCĂRII HOMOCORE A FLUIDELOR PERFECTE ÎN PREZENȚA ELICELOR PROPULSIVE ȘI A ROTOARELOR EOLIENE

de OCTAVIAN POPA

Institutul Politehnic „Traian Vuia", Timișoara

Ne propunem soluționarea problemei mișcării homocore a fluidelor perfecte în prezența rotoarelor eoliene sau a elicelor propulsive, ținînd seama de prezența dîrei turbionare din avalul acestora, precum și de evazarea suprafețelor de curent. Soluțiile se construiesc observînd două ipoteze alternative : 1) ipoteza vîrtejurilor libere și 2) ipoteza identității energiilor geopiezopotențiale asimptotice $(2.5)_2$; prima conduce la ecuația funcțională (8.2), soluționabilă cu ajutorul formulei de recurență (8.6), a doua, la ecuația funcțională (5.2), admițînd o soluție analitică. Ignorînd evazarea suprafețelor de curent, ecuația (5.2) ne conduce la soluția clasică enunțată de Glauert [2], p. 197, prin intermediul factorilor de interferență axială și rotațională.

1. NOTAȚII, DEFINIȚII ȘI CONCEPTE FUNDAMENTALE

Vom face apel la următoarele mulțimi : $\mathbb{R}$, *mulțimea numerelor reale* ; $\mathbb{R}^+$, *mulțimea numerelor reale pozitive* ; $\mathbb{B}$, *corpul continuu de clasă* C^r, $(r \geqslant 1)$, în sensul definiției lui Noll [5], cu elementul generic $X \in \mathbb{B}$, denumit *punct material* ; $\mathbb{I}$, *intervalul de timp*, cu elementul generic $\tau \in \mathbb{I}$, denumit *moment* ; $\mathbb{E}$, *sistemul de referință inerțial* și $\mathbb{E}'$, *sistemul de referință neinerțial* — spații punctuale euclidiene tridimensionale, cu elementele generice $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$, $\mathbf{x}' \in \mathbb{E}'$, denumite *puncte spațiale* ; $\mathbb{V}$, *spațiul translației lui* $\mathbb{E}$, și $\mathbb{V}'$, *spațiul translației lui* $\mathbb{E}'$, cu elementele generice $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$, $\mathbf{u}' \in \mathbb{V}'$, denumite *vectori spațiali* ; $\mathbb{L}$, *spațiul tuturor transformărilor liniare ale lui* $\mathbb{V}$ *în el însuși*, cu elementul generic $\mathbf{T} \in \mathbb{L}$, denumit *tensor de ordinul doi*.

Dacă $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}$, atunci vectorul $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$, $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$, reprezintă *translația lui* $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$ *în* $\mathbf{y} \in \mathbb{E}$. Dacă $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \in \mathbb{V}$, atunci vom înțelege, pe rînd, prin

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \in \mathbb{V}, \quad \mathbf{u}\mathbf{v} \in \mathbb{L}, \tag{1.1}$$

produsul scalar, *vectorial* și *tensorial* al vectorilor $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{V}$. În mare măsură, notațiile folosite în continuare aparțin lui W. Noll [5].

Aplicațiile definite prin

$$\mu : \mathbb{B} \times \mathbb{I} \to \mathbb{E}, \qquad \mu' : \mathbb{B} \times \mathbb{I} \to \mathbb{E}', \qquad \alpha : \mathbb{E}' \times \mathbb{I} \to \mathbb{E}, \tag{1.2}$$

și explicit prin

$$\mathbf{x} = \mu(X, \tau), \quad \mathbf{x}' = \mu'(X, \tau), \quad \mathbf{x} = \alpha(\mathbf{x}', \tau), \tag{1.3}$$

reprezintă, pe rînd : *mișcarea lui* $\mathbb{B}$ *în raport cu* $\mathbb{E}$ (*mișcarea absolută*), *mișcarea lui* $\mathbb{B}$ în *raport cu* $\mathbb{E}'$ (*mișcarea relativă*) și *mișcarea de antrenament a lui* $\mathbb{E}'$ *în raport cu* $\mathbb{E}$.

Perechea de mișcări (μ, μ'), definită prin $(1.2)_{1,2}$, descrie mișcarea aceluiași corp $\mathbb{B}$ în raport cu sistemele de referință $\mathbb{E}$ și $\mathbb{E}'$ și prin aceasta

ea aparţine clasei C_{EM} : *clasa tuturor perechilor de mişcări echivalente ale lui* $\mathbb{B}$.

Folosind variabilele independente (X, τ), ne situăm în (MD), *descrierea materială a mişcărilor* $(\mu, \mu') \in C_{EM}$, iar dacă folosim variabilele independente $(\mathbf{x}, \tau)$, respectiv $(\mathbf{x}', \tau)$, ne situăm în *descrierea spaţială a mişcărilor* $(\mu, \mu') \in C_{EM}$. În cele două descrieri vom folosi următorii operatori temporali :

$$\mathrm{d}/\mathrm{d}\tau = \partial/\partial\tau\,|_{X=\mathrm{ct.}},\quad \partial/\partial\tau = \partial/\partial\tau\,|_{x=\mathrm{ct.}},\quad \partial'/\partial\tau = \partial/\partial\tau\,|_{x'=\mathrm{ct}}, \tag{1.4}$$

primul, definit în (MD), reprezintă *operatorul derivată materială*, ultimii doi, definiţi în (SD), *operatorii derivată locală*, în raport cu $\mathbb{E}$, respectiv $\mathbb{E}'$. Operatorul $(1.4)_1$, definit în (MD), se exprimă în (SD), relativ la $\mathbb{E}$, respectiv $\mathbb{E}'$, după cum urmează:

$$\mathrm{d}/\mathrm{d}\tau = \partial/\partial\tau + \mathbf{v}\cdot\nabla, \qquad \mathrm{d}/\mathrm{d}\tau = \partial'/\partial\tau + \mathbf{v}'\cdot\nabla', \tag{1.5}$$

unde $\mathbf{v} : \mathbb{R}\times\mathbb{I}\to\mathbb{V}$, *cîmpul vitezei în mişcarea* μ (*cîmpul vitezei absolute*) şi $\mathbf{v}' : \mathbb{R}\times\mathbb{I}\to\mathbb{V}$, *cîmpul vitezei în mişcarea* μ', (*cîmpul vitezei relative*), se definesc prin

$$\mathbf{v} = \mathrm{d}\mu/\mathrm{d}\tau, \qquad \mathbf{v}' = \mathrm{d}\mu'/\mathrm{d}\tau, \tag{1.6}$$

şi unde

$$\nabla = \partial/\partial\mathbf{x}, \qquad \nabla' = \partial/\partial\mathbf{x}', \tag{1.7}$$

reprezintă *gradienţii spaţiali* în raport cu $\mathbb{E}$, respectiv $\mathbb{E}'$.

Între $\mathbf{v}\in\mathbb{V}$ şi $\mathbf{v}'\in\mathbb{V}'$ există următoarea relaţie [5], [12—14]:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_e + \mathbf{Q}\cdot\mathbf{v}', \text{ unde } \mathbf{w} = \mathbf{Q}\cdot\mathbf{v}'\in\mathbb{V}, \tag{1.8}$$

se identifică cu $\mathbf{v}'\in\mathbb{V}'$ exprimat în raport cu baza vectorială din $\mathbb{E}$, şi unde $\mathbf{v}_e\in\mathbb{V}$, *viteza de antrenament a lui* $\mathbb{E}'$ *în raport cu* $\mathbb{E}$ şi *tensorul ortogonal* $\mathbf{Q}\in\mathbb{L}$, deci cu proprietatea $\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}$, se definesc prin

$$\mathbf{v}_e = \partial'\alpha(\mathbf{x}', \tau)/\partial\tau, \quad \mathbf{Q} = \nabla\mathbf{x}' = \nabla(\alpha_\tau^{-1}(\mathbf{x})). \tag{1.9}$$

Derivata substanţială a lui $(1.8)_1$ ne conduce la următoarea relaţie satisfăcută de cîmpurile acceleraţiilor în (MD) :

$$\mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}\mathbf{v}_e/\mathrm{d}\tau + \mathbf{Q}\cdot(\mathrm{d}\mathbf{v}'/\mathrm{d}\tau) + (\mathbf{v}-\mathbf{v}_e)\cdot\nabla\mathbf{v}_e, \tag{1.10}$$

echivalentă, prin intermediul operatorilor (1.5), cu următoarea expresie în (SD) :

$$\mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}\tau = \partial\mathbf{v}_e/\partial\tau + \mathbf{Q}\cdot(\partial'\mathbf{v}'/\partial\tau) - \nabla(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_e) - \boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{v}_e, \tag{1.11}$$

unde $\boldsymbol{\omega} = \nabla \wedge \mathbf{v} \in \mathbb{V}$ *reprezintă vectorul vorticitate.* Exprimînd accelerația $d\mathbf{v}/d\tau$ în (SD), prin intermediul lui $(1.5)_1$, expresia (1.11) ne va conduce la următoarea relație, în (SD), dintre accelerațiile locale în raport cu $\mathbb{E}$, respectiv $\mathbb{E}'$

$$\partial \mathbf{v}/\partial\tau = \partial \mathbf{v}_e/\partial\tau + \mathbf{Q} \cdot (\partial' \mathbf{v}'/\partial\tau) - \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_e) - \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_e. \tag{1.12}$$

Fie $(\mu, \mu') \in \mathcal{C}_{EM}$ o pereche de mișcări echivalente ale fluidului $\mathbb{B}$ în prezența corpului rigid

$$v'_\Sigma = \bigcup_{n=1}^{N} v'_{\Sigma n}, v'_\Sigma \subset \mathbb{E}', \tag{1.13}$$

un *rotor eolian* sau *o elice propulsivă*, pe scurt un *rotor*, cu N *palete* $v'_{\Sigma n} \subset \mathbb{E}'$, *fix în raport cu* $\mathbb{E}'$.

Vom raporta $\mathbb{E}$ la sistemul de coordonate cilindrice (x, r, ϑ), care induce pe $\mathbb{E}$ următoarea *bază vectorială ortonormată*:

$$(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_r(\vartheta), \mathbf{e}_\vartheta(\vartheta)), \tag{1.14}$$

iar $\mathbb{E}'$ la sistemul de coordonate cilindrice (x', r', ϑ'), considerînd că $\mathbf{O} \in \mathbb{E}$, *originea lui* $\mathbb{E}$, și $\mathbf{O}' \in \mathbb{E}'$, *originea lui* $\mathbb{E}'$, coincid și că *axele* x *și* x' *se suprapun, coincizînd cu axa rotorului* (1.13).

Rotorul $v'_\Sigma \subset \mathbb{E}'$, fix în raport cu $\mathbb{E}'$, se consideră animat în raport cu $\mathbb{E}$ de o mișcare rigidă de rotație pură în jurul axei x, cu viteza unghiulară

$$\mathbf{q} = q\mathbf{e}_x, \tag{1.15}$$

astfel încît $\mathbf{v}_e$, viteza de antrenament $(1.9)_1$, va avea expresia

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{q} \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{O}) = \mathbf{q} \wedge \mathbf{r} = qr\mathbf{e}_\vartheta, \tag{1.16}$$

deoarece

$$\mathbf{x} - \mathbf{O} = x\mathbf{e}_x + \mathbf{r}, \text{ unde } \mathbf{r} = r\mathbf{e}_r. \tag{1.17}$$

Soluțiile determinate în continuare se aplică și elicelor propulsive, animate de o mișcare de antrenament cu viteza

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_0 + qr\mathbf{e}_\vartheta, \text{ unde } \mathbf{v}_0 = v_0\mathbf{e}_x \tag{1.18}$$

reprezintă *viteza de translație a elicei*, înlocuind, peste tot, viteza absolută $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ cu $(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) \in \mathbb{V}$, ceea ce, conform $(1.18)_2$, se reduce la înlocuirea lui $v_x = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{v} \in \mathbb{R}$ cu $(v_x - v_0) \in \mathbb{R}$.

Fiecărei raze $r' \in (r_b, r_a)$, unde r_b reprezintă *raza interioară*, iar r_a, *raza exterioară a rotorului* v'_Σ, i se asociază o *suprafață de curent relativă*

$$s'(r'), \qquad r' \in (r_b, r_a), \tag{1.19}$$

identică cu *suprafaţa de curent absolută*

$$s(r), \quad r \in (r_b, r_a), \tag{1.20}$$

definită prin

$$s(r) = \alpha_\tau(s'(r')), \text{ unde } \alpha_\tau : \mathbb{E}' \to \mathbb{E} \tag{1.21}$$

reprezintă *restricţia la momentul* $\tau \in \mathbb{I}$ *a mişcării de antrenament* $(1.3)_3$. Suprafaţa spaţială $s(r)$, definită prin $(1.21)_1$, se identifică cu suprafaţa de curent absolută, deoarece mişcarea de antrenament α este de rotaţie pură în jurul axei $x = x'$. Suprafeţele de curent $s'(r')$ şi $s(r)$ sînt *fixe în raport cu* $\mathbb{E}'$, *evazate* şi *asimptotic cilindrice* : de rază r_1 la infinit amonte şi de rază r_2 la infinit aval de rotor (fig. 1.1), raze care satisfac următoarele implicaţii :

$$v'_\Sigma = v'^{T}_\Sigma \Rightarrow r_1 < r_2, \quad v'_\Sigma = v'^{P}_\Sigma \Rightarrow r_1 > r_2, \tag{1.22}$$

unde v'^{T}_Σ = *rotor eolian*, iar v'^{P}_Σ = *elice propulsivă*.

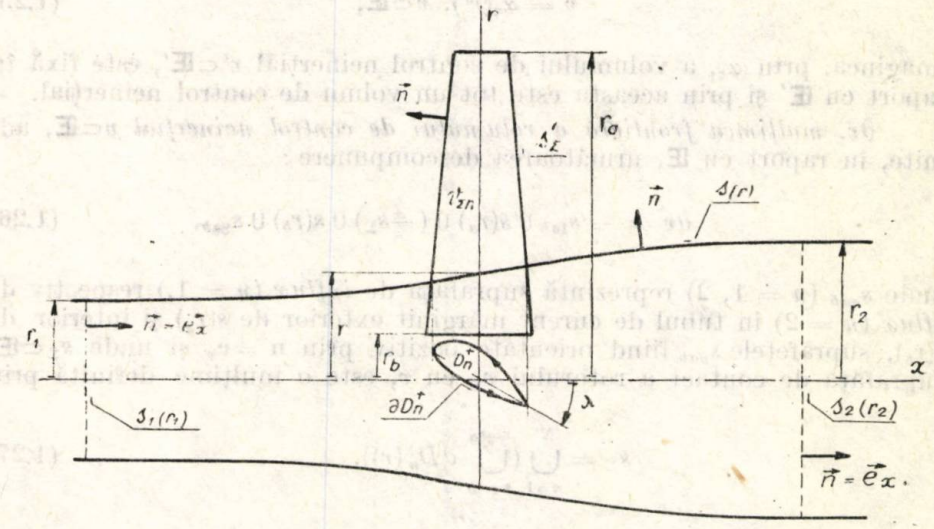


Fig. 1.1

$\partial s(r)$, *mulţimea frontieră a suprafeţei de curent* $s(r)$, admite, conform figurii 1, descompunerea

$$\partial s(r) = \partial s_1(r_1) \bigcup_{n=1}^{N} (-\partial D_n^+(r)) \bigcup (-\partial s_2(r_2)), \tag{1.23}$$

unde

$s_1(r_1) = \alpha_\tau(s'_1(r_1))$ — *suprafaţa de influx* în tubul de curent $s(r)$: un disc de rază r_1, orientat pozitiv prin $\mathbf{n} = \mathbf{e}_x$;

$s_2(r_2) = \alpha_\tau(s'_2(r_2))$ — *suprafaţa de flux* din tubul de curent $s(r)$: un disc de rază r_2, orientat pozitiv prin $\mathbf{n} = \mathbf{e}_x$;

$\pm\partial s_n(r_n)$ — *mulțimea frontieră a discului* $s_n(r_n)$ $(n = 1, 2)$, orientată pozitiv prin $\tau = \pm \mathbf{e}_3$;

$\pm\ \partial D_n^+(r)$ — mulțimea frontieră a profilului aerodinamic $D_n^+(r) = \alpha_\tau (D_n'^+(r'))$, același pentru orice $n = 1, 2, \ldots, N$, corespunzător razei $r = r'$ a paletei $v_{\Sigma n} \subset v'_\Sigma$, sensul pozitiv de parcurs fiind cel ce lasă pe $D^+(r)$ la stînga, în cazul semnului $(+)$, și la dreapta, în cazul semnului $(-)$.

Reuniunea tuturor suprafețelor de curent (1.19) generează mulțimea spațială

$$v' = \bigcup_{r=r_b}^{r=r_a} s'(r'), \quad v' \subset \mathbb{E}', \tag{1.24}$$

fixă în raport cu $\mathbb{E}'$, denumită *volum de control neinerțial*. Mulțimea spațială

$$v = \alpha_\tau(v'), \ v \subset \mathbb{E}, \tag{1.25}$$

imaginea, prin α_τ, a volumului de control neinerțial $v' \subset \mathbb{E}'$, este fixă în raport cu $\mathbb{E}'$ și prin aceasta este tot un volum de control neinerțial.

∂v, *mulțimea frontieră a volumului de control neinerțial* $v \subset \mathbb{E}$, admite, în raport cu $\mathbb{E}$, următoarea descompunere:

$$\partial v = -s_{1ab} \cup s(r_a) \cup (-s_\Sigma) \cup s(r_b) \cup s_{2ab}, \tag{1.26}$$

unde s_{nab} $(n = 1, 2)$ reprezintă suprafața de *influx* $(n = 1,)$ respectiv de *eflux* $(n = 2)$ în tubul de curent mărginit exterior de $s(r_a)$ și interior de $s(r_b)$, suprafețele s_{nab} fiind orientate pozitiv prin $\mathbf{n} = \mathbf{e}_x$ și unde $s_\Sigma \subset \mathbb{E}$, suprafața de contact a rotorului v'_Σ cu v, este o mulțime definită prin

$$s_\Sigma = \bigcup_{n=1}^{N} \left(\bigcup_{r=r_b}^{r=r_a} \partial D_n^+(r) \right). \tag{1.27}$$

Mulțimea frontieră ∂v este orientată pozitiv prin

$$\mathbf{n} : \partial v \to \mathbb{V}, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1. \tag{1.27}$$

vectorul unitate normală exterioară la ∂v.

Pe segmentele mulțimii frontieră ∂v sînt satisfăcute următoarele *condiții cinematice*:

$$\mathbf{v}_e \cdot \mathbf{n} = 0, \ \forall \mathbf{x} \in -s_{1ab} \cup s(r_a) \cup s(r_b) \cup s_{2b}, \tag{1.28}$$

$$(\mathbf{v} - \mathbf{v}_e) \cdot \mathbf{n} = 0, \ \forall \mathbf{x} \in s_\Sigma, \tag{1.29}$$

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0) \wedge (\mathbf{v} - \mathbf{v}_e) \cdot \mathbf{n} = 0), \ \forall \mathbf{x} \in s(r_a) \cup s(r_b). \tag{1.30}$$

2. FORMULAREA PROBLEMEI, IPOTEZE ŞI ECUAŢII FUNDAMENTALE

Vom defini prin

$$\mathbf{v}_1 = \lim_{x \to -\infty} \mathbf{v}, \qquad \mathbf{v}_2 = \lim_{x \to +\infty} \mathbf{v}, \tag{2.1}$$

viteza asimptotică din amontele şi viteza asimptotică din avalul rotorului v'_Σ.

Observînd aplicaţiile

$$p : \mathbb{B} \times \mathbb{I} \to \mathbb{R}^+, \qquad \rho : \mathbb{B} \times \mathbb{I} \to \mathbb{R}^+, \quad \Omega : \mathbb{E} \to \mathbb{R}, \tag{2.2}$$

reprezentînd, pe rînd, *presiunea hidrostatică*, *densitatea masei fluidului* $\mathbb{B}$ şi *potenţialul acceleraţiei gravitaţionale* $\mathbf{f} \in \mathbb{V}$, în sensul că

$$\mathbf{f} = -\nabla \Omega, \tag{2.3}$$

atunci $H : v \times \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, *densitatea energiei mecanice a părţii* $\mathbb{P} \subset \mathbb{B}$ *care ocupă instantaneu volumul de control* $v \subset \mathbb{E}$, se defineşte prin

$$H = v^2/2 + \Pi, \text{ unde } \Pi = p/\rho + \Omega \tag{2.4}$$

reprezintă *densitatea energiei geopiezopotenţiale a părţii* $\mathbb{P} \subset \mathbb{B}$.

$H_1 \in \mathbb{R}$, *densitatea energiei mecanice din amontele rotorului* şi $H_2 \in \mathbb{R}$, *densitatea energiei mecanice din avalul rotorului*, definite în sensul lui (2.1), se exprimă prin

$$H_n = v_n^2/2 + \Pi_n, \quad \text{unde } \Pi_n = p_n/\rho + \Omega_n \quad (n = 1, 2). \tag{2.5}$$

În cuprinsul prezentului articol, ne propunem soluţionarea problemei mişcării în prezenţa rotoarelor eoliene sau a elicelor propulsive, parcurgînd următoarele etape:

E — 1) Construirea ecuaţiilor funcţionale ale componentelor vitezei asimptotice $v_2 \in \mathbb{V}$.

E — 2) Reducerea mişcării μ în prezenţa rotorului v'_Σ la mişcarea în prezenţa unei familii de reţele plane de profile.

E — 3) Determinarea aplicaţiilor $r_n = r_n(r)$ $(n = 1, 2)$, pentru $r \in (r_b, r_a)$, a puterii mecanice de antrenament a rotorului v'_Σ şi a debitului prin tubul de curent mărginit de $s(r_a)$ şi $s(r_b)$.

E — 4) Construirea soluţiilor ecuaţiilor funcţionale de la punctul E — 1).

Soluţionarea problemei mişcării în prezenţa rotorului v'_Σ se va rezolva observînd următoarele două *ipoteze alternative*, supuse restricţiei $r \neq r_2$:

A — I) Ipoteza vîrtejurilor libere, în virtutea căreia liniile de curent relative coincid cu liniile de vîrtej absolute, deci

$$\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{v} - \mathbf{v}_e) = \mathbf{0}, \tag{2.6}$$

MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

unde $\boldsymbol{\omega} = \nabla \mathbf{v} \in \mathbb{T}$ reprezintă *vectorul vorticitate în mişcarea absolută* μ.

A — II) Ipoteza identităţii energiilor geopiezopotenţiale Π_n, $(n = 1, 2)$ deci

$$\Pi_1(r_1) = \Pi_2(r_2). \tag{2.7}$$

Soluţia problemei mişcării μ în prezenţa rotoarelor eoliene, observînd ipoteza vîrtejurilor libere şi ipoteza evazării tuburilor de curent, face obiectul lucrărilor [9] şi [11]. Dacă în cazul ipotezei A—II) considerăm $r = r_2$, regăsim rezultatele clasice enunţate de Glauert [2].

Fluidul $\mathbb{B}$, perechea de mişcări echivalente $(\mu, \mu') \in C_{KM}$ şi mişcarea de antrenament α, vor satisface, în cele ce urmează, următoarele ipoteze :

I — 1) *Fluidul* $\mathbb{B}$ *este perfect*, avînd ecuaţia constitutivă

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I}, \quad \forall X \in \mathbb{B}, \quad \forall \tau \in \mathbb{I}, \tag{2.8}$$

unde $\mathbf{T} \in \mathbb{L}$ este *tensorul tensiunilor*, $\mathbf{I} \in \mathbb{L}$, *tensorul unitate*, iar p, presiunea hidrostatică $(2.2)_1$.

I — 2) *Mişcarea* μ *este homocoră*, deci

$$\rho = \text{const.}, \quad \forall X \in \mathbb{B}, \quad \forall \tau \in \mathbb{I}. \tag{2.9}$$

I—3) *Mişcarea de antrenament* α *este staţionară*, deci

$$\partial \mathbf{v}_e / \partial \tau = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{q} = q\mathbf{e}_x = \text{const.}, \tag{2.10}$$

ipoteza extinzîndu-se şi la viteza de translaţie v_0, deci

$$\mathbf{v}_0 = \text{const}, \tag{2.11}$$

I—4) *Mişcarea relativă* μ' *este staţionară*, deci

$$\partial \mathbf{v}' / \partial \tau = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{x} \in v', \quad \forall \tau \in \mathbb{I}. \tag{2.12}$$

I—5) *Mişcarea absolută* μ *este irotaţională în amontele rotorului* v'_Σ, deci

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \wedge \mathbf{v} = 0, \quad \forall x > 0, \tag{2.13}$$

unde s-a considerat că partea frontală a rotorului v'_Σ este tangentă la suprafaţa plană $x = 0$.

I—6) *Mişcarea absolută* μ *este asimptotic staţionară*, deci, observînd notaţiile (2.1),

$$\partial \mathbf{v}_n / \partial \tau = \mathbf{0} \quad (n = 1, 2). \tag{2.14}$$

I—7) *Mişcarea absolută* μ *din amontele rotorului* v'_Σ *este asimptotic uniformă*, deci

$$\mathbf{v}_1 = v_m \mathbf{e}_x \qquad \text{dacă } v'_\Sigma = v'^T_\Sigma, \tag{2.15}$$

$$\mathbf{v}_1 = (v_m - v_0)\mathbf{e}_x \qquad \text{dacă } v'_\Sigma = v^P. \tag{2.16}$$

I—8) *Mişcarea absolută* μ *din avalul rotorului* v'_Σ *este asimptotic bidimensională*, componentele radiale ale cîmpurilor vectoriale fiind nule, deci

$$\mathbf{v}_2 = v_{2x}\mathbf{e}_x + v_{2\vartheta}\mathbf{e}_\vartheta, \tag{2.17}$$

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \omega_{2x}\mathbf{e}_x + \omega_{2\vartheta}\mathbf{e}_\vartheta. \tag{2.18}$$

I—9) *Suprafeţele de curent absolute* $s(r)$, $r \in (r_b, r_a)$, *sînt suprafeţe de tip Bernoulli*, în sensul că

$$\mathbf{n} : s(r) \to \mathbb{V}, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1, \tag{2.19}$$

vectorul unitate normală exterioară (în sensul lui $\mathbf{e}_r$) la $s(r)$, este paralel cu vectorul $\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{v} - \mathbf{v}_e)$, deci

$$\mathbf{n} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{v} - \mathbf{v}_e)) = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{x} \in s(r), \quad \forall r \in (r_b, r_a). \tag{2.20}$$

În virtutea ipotezei (2.9), ecuaţia de continuitate va avea expresia

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \ \forall X \in \mathbb{B}, \ \forall \tau \in \mathbb{I}, \tag{2.21}$$

iar, în virtutea ipotezelor (2.8—10) şi (2.12), ecuaţia de mişcare a lui Cauchy

$$\rho d\mathbf{v}/d\tau = \rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \mathbf{T}, \quad \forall X \in \mathbb{B}, \quad \forall \tau \in \mathbb{I}, \tag{2.22}$$

va dobîndi, observînd (1.11), $(1.5)_1$, (2.3) şi (2.4), următoarea expresie în (SD):

$$\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{v} - \mathbf{v}_e) = \nabla (H - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_e), \quad \forall \mathbf{x} \in v, \quad \forall \tau \in \mathbb{I}, \tag{2.23}$$

denumită ecuaţia de mişcare a lui Lamb şi Boggio : ecuaţia de mişcare a lui $\mathbb{B}$, în raport cu $\mathbb{E}'$, exprimată în (SD) pe $v \subset \mathbb{E}$, prin intermediul cîmpurilor vectoriale raportate la baza vectorială din $\mathbb{E}$.

În ipoteza vîrtejurilor libere (2.6) *integrala spaţială* a ecuaţiei lui Lamb şi Boggio (2.23) ne va conduce la următoarea *ecuaţie a lui Bernoulli* :

$$H - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_e = C, \quad \forall \mathbf{x} \in v, \quad \forall \tau \in \mathbb{I}, \tag{2.24}$$

unde $C \in \mathbb{R}$ este o constantă spaţială, iar în ipoteza (2.20), *integrala superficială*, în lungul suprafeţelor de tip Bernoulli $s(r)$, ne va conduce la următoarea *ecuaţie a lui Bernoulli* :

$$H - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_e = C(r), \quad \forall \mathbf{x} \in s(r), \quad \forall r \in (r_b, r_a), \quad \forall \tau \in \mathbb{I}, \tag{2.25}$$

unde $C(r) \in \mathbb{R}$ este o constantă de suprafaţă.

Observînd ipotezele (2.10), (2.12) şi (2.14), din (1.12) rezultă că la infinit amonte de rotorul v'_Σ are loc relaţia

$$\mathbf{v}_{2e} \wedge \boldsymbol{\omega}_2 = \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_e), \tag{2.26}$$

unde, ținînd seama de (1.16) și de ipotezele (2.17) și (2.18),

$$\mathbf{v}_{2e} = qr_2\mathbf{e}_\vartheta, \qquad \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_{2e} = qr_2v_{2\vartheta}, \tag{2.27}$$

$$\mathbf{v}_{2e} \wedge \boldsymbol{\omega}_2 = qr_2\omega_{2x}\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_r q\partial(r_2v_{2\vartheta})/\partial r_2. \tag{2.28}$$

Înlocuind $(2.27)_2$ și (2.28) în (2.26), obținem

$$\mathbf{e}_r\partial(r_2v_{2\vartheta})/\partial r_2 = \nabla(r_2v_{2\vartheta}),$$

ceea ce nu poate avea loc decît dacă

$$v_2 = v_{2\vartheta}(r_2). \tag{2.29}$$

Deoarece, în virtutea ipotezei (2.18),

$$\omega_{2r} = \mathbf{e}_r \cdot \boldsymbol{\omega}_2 = \frac{1}{r_2}\,\partial v_{2x}/\partial\vartheta - \partial v_{2\vartheta}/\partial x = 0, \tag{2.30}$$

observînd (2.29), rezultă că

$$\partial v_{2x}/\partial\vartheta = 0. \tag{2.31}$$

Observînd ipoteza (2.17) și rezultatul (2.29), expresia, în coordonate cilindrice, a ecuației de continuitate (2.21) ne va conduce la

$$\partial v_{2x}/\partial x = 0. \tag{2.32}$$

Astfel, dacă mișcarea μ este homocoră și dacă sînt observate ipotezele (2.10), (2.12), (2.14), (2.17) și (2.18), atunci

$$v_2 = v_{2x}(r_2)\mathbf{e}_x + v_{2\vartheta}(r_2)\mathbf{e}_\vartheta, \tag{2.33}$$

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \nabla \wedge \mathbf{v}_2 = \omega_{2x}(r_2)\mathbf{e}_x + \omega_{2\vartheta}(r_2)\mathbf{e}_\vartheta. \tag{2.34}$$

În virtutea expresiilor (2.27), (2.34) și a ipotezei (2.16), au loc următoarele egalități:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_{2e} = 0, \qquad \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_{2e} = qr_2v_{2\vartheta}. \tag{2.35}$$

Observînd (2.35) și (2.5), din (2.23) sau (2.24) obținem

$$H_1(r_1) - H_2(r_2) = -qr_2v_{2\vartheta}, \tag{2.36}$$

expresia asimptotică a ecuației lui Bernoulli în raport cu suprafața de curent $s(r)$, $r \in (r_b, r_a)$.

Ținînd seama de (2.5) și de egalitatea

$$v_1^2 - v_2^2 = v_m^2 - v_{2x}^2 - v_2^2, \tag{2.37}$$

rezultînd din (2.15) și (2.33), din (2.36) obținem

$$\Pi_1(r_1) - \Pi_2(r_2) = -qr_2v_{2\vartheta} + \frac{1}{2}(v_{2x}^2 + v_{2\vartheta}^2 - v_m^2), \tag{2.38}$$

expresia diferenței energiilor geopiezopotențiale asimptotice în raport cu suprafața de curent $s(r)$, $r \in (r_b, r_a)$.

Dezvoltînd produsul (2.20) și ținînd seama că, în virtutea definiției (1.21),

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_e) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in s(r), \quad \forall r \in (r_b, r_a), \tag{3.39}$$

rezultă că

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in s(r), \quad \forall r \in (r_b, r_a), \tag{2.40}$$

deci suprafața de curent $s(r)$ este și *suprafață de vîrtej în mișcarea absolută* μ.

Definind prin

$$\Gamma(\partial s(r)) = -\int_{\partial s(r)} \mathbf{dx}\mathbf{v} \tag{2.41}$$

circulația vitezei absolute $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ *în lungul circuitului* $\partial s(r)$, în virtutea teoremei lui Stokes, observînd (2.40), obținem

$$\Gamma(\partial s(r)) = 0. \tag{2.42}$$

Ținînd seama de descompunerea (1.23) în segmente disjuncte și de aditivitatea circulației vitezei ca măsură scalară, din (2.42) rezultă

$$\Gamma_1(r_1) - \Gamma_2(r_2) = N\Gamma(r), \tag{2.43}$$

unde, ținînd seama de (2.41), (2.15) și (2.33),

$$\Gamma_1(r_1) = \Gamma(\partial s_1(r_1)) = 0, \tag{2.44}$$

$$\Gamma_2(r_2) = \Gamma(\partial s_2(r_2)) = -2\pi r_2 v_{2\vartheta} \tag{2.45}$$

și

$$\Gamma(r) = \Gamma(\partial D_n^+(r)) = -\int_{\partial D_n^+(r)} \mathbf{dx} \cdot \mathbf{v} \tag{2.46}$$

reprezintă *circulația vitezei în lungul frontierei profilului* D_n^+ ($n = 1, 2, \ldots, N$), aceeași pentru orice n, la un r dat, fapt pentru care notația folosită ignoră indicele n.

Ținînd seama de (2.44) și (2.45), egalitatea (2.43) va dobîndi expresia

$$N\Gamma(r) = 2\pi r_2 v_{2\vartheta}(r_2), \tag{2.47}$$

de unde rezultă posibilitatea retranscrierii expresiei asimptotice (2.36) a ecuației lui Bernoulli sub forma

$$H_1(r_1) - H_2(r_2) = \frac{qN}{2\pi}\,\Gamma(r). \tag{2.48}$$

Deoarece funcționarea normală a profilelor D_n^+ implică o valoare pozitivă a circulației (2.46), deci

$$\Gamma(r) > 0, \qquad \forall r \in (r_b,\ r_a) \tag{2.49}$$

și deoarece

$$H_1(r_1) - H_2(r_2) > 0 \Rightarrow v'_\Sigma = v'^T_\Sigma, \tag{2.50}$$

$$H_1(r_1) - H_2(r_2) < 0 \Rightarrow v'_\Sigma = v'^P_\Sigma, \tag{2.51}$$

rezultă că componenta q a vitezei unghiulare q, exprimată prin (1.15), va satisface următoarele implicații :

$$v'_\Sigma = v'^T_\Sigma \Rightarrow q = -q^T, \qquad q^T > 0, \tag{2.52}$$

$$v'_\Sigma = v'^P_\Sigma \Rightarrow q = +q^P, \qquad q^P > 0, \tag{2.53}$$

3. PUTEREA MECANICĂ DE ANTRENAMENT A ROTORULUI

Ne vom referi, în continuare, la rotorul $v'_\Sigma \subset \mathbb{E}'$, considerîndu-l ca mulțime spațială din $\mathbb{E}$, folosind notația $v \subset \mathbb{E}$ și definindu-l, prin intermediul aplicației $(1.21)_2$, după cum urmează

$$v_\Sigma = \alpha_\tau(v'_\Sigma), \tag{3.1}$$

mulțimea v_Σ fiind fixată în raport cu $\mathbb{E}'$.

În virtutea teoremei 3.2 din [8], dacă este respectată euația de mișcare Cauchy (2.22),atunci $P_e(v,\tau)$, *puterea mecanică de antrenament* sub acțiunea forțelor exterioare, a mulțimii materiale $\mathbb{P}\,\mathbb{B}$, care ocupă instantaneu volumul de control $v \subset \mathbb{E}$, în raport cu $\mathbb{E}'$, se definește prin

$$P_e(v,\ \tau) = \int_v \rho \mathbf{v}_e\ (\mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}\alpha, \text{ unde } \alpha = \text{mes } v \tag{3.2}$$

și se exprimă prin

$$P_e(v,\ \tau) = \int_v \rho \mathbf{v}_e \cdot [\partial \mathbf{v}_e/\partial\tau + \mathbf{Q}\cdot(\partial'\mathbf{v}'/\partial\tau)]\mathrm{d}\alpha + \int_{\partial v} \rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_e)(\mathbf{v}-\mathbf{v}_e)\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}\alpha. \tag{3.3}$$

În virtutea teoremei 3,5 din [8], dacă volumul de control v este adiacent rotorului v_Σ și dacă fluidul $\mathbb{B}$ este perfect, atunci

$$P_e(v,\ \tau) = -P_e(v_\Sigma,\ \tau), \tag{3.4}$$

unde $P_e(v_\Sigma, \tau)$ reprezintă *puterea mecanică de antrenament a rotorului* v_Σ.

Observînd ipotezele (2.10) şi (2.12), descompunerea (1.26) a mulţimii frontieră ∂v, condiţiile cinematice (1.28—30) şi faptul că, în virtutea lui (1.15) şi (2.15),

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_e = 0, \qquad \forall \mathbf{x} \in s_{1ab}, \tag{3.5}$$

din (3.3) şi (3.4) rezultă că

$$P_e(v_\Sigma, \tau) = -\int_{\partial v} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_e)(\mathbf{v} - \mathbf{v}_e) \cdot \mathbf{n} da. \tag{3.6}$$

Observînd ipotezele (2.10) şi (2.14),

$$P_e(v_\Sigma, \tau) = P_e(v_\Sigma), \tag{3.7}$$

deci P_e este o măsură scalară staţionară.

Dacă $\mathbf{x} \in s_{2ab}$, atunci cîmpurile vectoriale de sub integrala expresiei (3.6) se vor exprima prin

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_x, \qquad \mathbf{v}_e = \mathbf{v}_{2e}, \qquad \mathbf{v} = \mathbf{v}_2, \tag{3.8}$$

ultimele două, împreună cu $(2.27)_2$ şi (2.47), justificînd egalitatea

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_e = q r_2 v_{2\vartheta} = \frac{qN}{2\pi} \Gamma(r). \tag{3.9}$$

Observînd (3.7—9) şi introducînd notaţia

$$f = f(r_2) = v_{2x}(r_2)/v_m, \tag{3.10}$$

expresia (3.6) a puterii mecanice de antrenament va dobîndi forma

$$P_e(v_\Sigma) = -\rho q N v_m \int_{r_{2b}}^{r_{2a}} \Gamma f r_2 dr_2. \tag{3.11}$$

Conform (2.52) şi (2.53), P_e este pozitivă în cazul rotoarelor eoliene şi negativă în cazul elicelor propulsive.

4. ECUAŢIA FUNCŢIONALĂ A COMPOENTELOR VITEZEI ASIMPTOTICE DIN AVAL ÎN IPOTEZA VÎRTEJURILOR LIBERE [9]

Ţinînd seama de (2.33) şi (2.34), ecuaţia (2.6) a vîrtejurilor libere va dobîndi expresia scalară

$$\omega_{2x}(v_{2\vartheta} - q r_2) = \omega_{2\vartheta} v_{2x}, \tag{4.1}$$

unde

$$\omega_{2x} = \mathbf{e}_x \cdot \boldsymbol{\omega}_2 = \frac{1}{r_2}\,\partial(r_2 v_{2\vartheta})/\partial r_2, \tag{4.2}$$

$$\omega_{2\vartheta} = \mathbf{e}_\vartheta \boldsymbol{\omega}_2 = -\,\partial v_{2x}/\partial r_2, \tag{4.3}$$

deoarece, conform (2.17), $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{v}_2 = 0$, astfel încît (4.1) ne va conduce la următoarele două expresii echivalente

$$(v_{2\vartheta} - qr_2)\,\frac{1}{r_2}\,\mathrm{d}(r_2 v_2)/\mathrm{d}r_2 = -\,v_{2x}\mathrm{d}v_{2x}/\mathrm{d}r_2, \tag{4.4}$$

$$\left(\frac{1}{r_2}\right)^2 \mathrm{d}(r_2 v_{2\vartheta})^2/\mathrm{d}r_2 - 2q\mathrm{d}(r_2 v_{2\vartheta})/\mathrm{d}r_2 = -\,\mathrm{d}v_{2x}^2/\mathrm{d}r_2, \tag{4.5}$$

reprezentînd *expresiile ecuației diferențiale ale componentelor vitezei asimptotice din avalul rotorului* $v'_\Sigma \subset \mathbb{E}'$.

În raport cu $v_{2\vartheta}$, ecuația diferențială (4.5) este de tip Abel; în raport cu v_{2x}, o ecuație diferențială ordinară de ordinul I.

Din (4.4) rezultă că

$$\mathrm{d}v_{2x}/\mathrm{d}r_2 = 0 \Rightarrow r_2 v_{2\vartheta} = \mathrm{const.}, \tag{4.6}$$

ceea ce ne informează că $v_{2\vartheta}$ coincide cu viteza indusă de un vîrtej potențial filiform, dispus în lungul axei x, contrazicîndu-se, prin aceasta, atît ipoteza mișcării irotaționale din amonte (2.13), cît și cea a mișcării rotaționale din avalul rotorului (2.18).

Observînd (2.47), ecuația funcțională (4.5) se va putea retranscrie sub forma

$$\left(\frac{N}{2\pi}\right)^2 \frac{\Gamma}{r_2^2}\,\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}r_2} - q\left(\frac{N}{2\pi}\right)\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}r_2} = -\,\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_2}\,v_{2x}^2, \tag{4.7}$$

locul componentei $v_{2\vartheta}$ fiind preluat de circulația Γ.

Integrala expresiei (4.7), pe intervalul (r_{2b}, r_2), cu limita superioară variabilă, ne va conduce la

$$\left(\frac{N}{2\pi}\right)^2 \int_{r_{2b}}^{r_2} \frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}r_2}\,\frac{\Gamma}{r_2^2}\,\mathrm{d}r_2 = -\,\frac{1}{2}\,v_{2x}^2 + q\,\frac{N\Gamma}{2\pi} + C. \tag{4.8}$$

Folosind procedeul integrării prin părți, integrala din membrul stîng al expresiei (4.8) se va putea exrprima prin

$$\int (\Gamma/r_2^2)(\mathrm{d}\Gamma/\mathrm{d}r_2)\mathrm{d}r_2 = \frac{1}{2}\,(\Gamma/r_2)^2 + \int (\Gamma^2/r_2^3)\mathrm{d}r_2. \tag{4.9}$$

Înlocuind (4.9) în (4.8) și observînd următoarele condiții asociate suprafeței de curent $s(r_a)$, corespunzătoare extremității paletelor rotorului $v'_\Sigma \subset \mathbb{E}'$,

$$\Gamma(r_{2a}) = 0, \qquad v_{2x}(r_{2a}) = v_m, \tag{4.10}$$

expresia lui (4.9) pentru $r_2 = r_{2a}$ ne va conduce la următoarea valoare a constantei C

$$C = \frac{1}{2} v_m^2 + \left(\frac{N}{2\pi}\right)^2 \int_{r_{2b}}^{r_{2a}} (\Gamma^2/r_2^3)\mathrm{d}r_2. \tag{4.11}$$

Înlocuind (4.9) și (4.11) în (4.8), împărțind, apoi, cu v_m^2 și observînd, alături de (3.10), următoarele notații:

$$U_2 = U(r_2) = qr_2, \qquad \mathrm{U} = \mathrm{U}(r) = qr, \tag{4.12}$$

$$G_2 = G(r_2) = (N\Gamma)/(2\pi v_m r_2), \qquad G = G(r) = (N\Gamma)/(2\pi v_m r), \tag{4.13}$$

integrala ecuației diferențiale (4.7) va dobîndi expresia

$$f^2 = 1 + 2G_2U_2/v_m - G_2^2 + \int_{r_2}^{r_{2a}} (G^2/r_2)\mathrm{d}r_2. \tag{4.14}$$

Observînd (2.46) și notațiile (3.10) (4.12) și (4.13), expresia diferențelor energiilor geopiezopotențiale (2.38) se va putea retranscrie sub forma

$$\Pi_1 - \Pi_2 = \frac{1}{2} v_m^2 \left(f^2 - 1 + G_2^2 - 2\frac{U}{v_m} G\right). \tag{4.15}$$

Derivînd expresia (2.38) în raport cu r_2, obținem

$$\mathrm{d}(\Pi_1 - \Pi_2)/\mathrm{d}r_2 = -q\mathrm{d}(r_2 v_{2\vartheta})/\mathrm{d}r_2 - \frac{1}{2}\mathrm{d}(v_{2x}^2 + v_{2\vartheta}^2)/\mathrm{d}r_2. \tag{4.16}$$

Pe de altă parte, din (4.4) rezultă că

$$q\mathrm{d}(r_2 v_{2\vartheta})/\mathrm{d}r_2 - \frac{1}{2}\mathrm{d}(v_{2x}^2 + v_{2\vartheta}^2)/\mathrm{d}r_2 = v_{2\vartheta}^2/r_2. \tag{4.17}$$

Înlocuind (4.17) în (4.16), obținem

$$\mathrm{d}(\Pi_1 - \Pi_2)/\mathrm{d}r_2 = \frac{1}{2} v_{2\vartheta}^2, \tag{4.18}$$

ecuația diferențială a diferenței energiilor geopiezopotențiale asimptotice
Din (4.18) rezultă validitatea următoarei implicații

$$(\omega_{2\wedge}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_{2e}) = \mathbf{0})/(\Pi_1 - \Pi_2 = 0) \Rightarrow v_{2\vartheta} = 0, \tag{4.19}$$

prin care se atestă incompatibilitatea ipotezei vîrtejurilor libere (2.6) cu ipoteza identității energiilor Π_1 și Π_2, deoarece, așa după cum ne informează teza implicației (4.19), în acest caz mișcarea din avalul rotorului este pur axială.

5. ECUAȚIA FUNCȚIONALĂ A COMPONENTELOR VITEZELOR ASIMPTOTICE DIN AVAL ÎN IPOTEZA IDENTITĂȚII ENERGIILOR Π_n (n=1, 2) [9]

Ipoteza (2.7) a identității energiilor geopiezopotențiale asimptotice aplicată expresiei (2.38) ne conduce la următoarea ecuație funcțională:

$$-qr_2v_{2\vartheta} + \frac{1}{2}(v_{2x}^2 + v_{2\vartheta}^2 - v_m^2) = 0, \tag{5.1}$$

echivalentă, prin intermediul expresiei (4.15), cu

$$f^2 + G_2^2 - 2\frac{U}{v_m}G - 1 = 0. \tag{5.2}$$

Vom arăta, în continuare, că ipoteza $\Pi_1 = \Pi_2$ este incompatibilă cu ipoteza vîrtejurilor libere (2.6). Astfel, observînd (4.1—3), rezultă că

$$\omega_{2\wedge}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_{2e}) = \mathbf{e}_r\left[-q\mathrm{d}(r_2v_{2\vartheta})/\mathrm{d}r_2 + \frac{1}{2}\mathrm{d}(v_{2x}^2 + v_{2\vartheta}^2)/\mathrm{d}r_2 + v_{2\delta}^2/r_2\right], \tag{5.3}$$

de unde, ținînd seama de (2.38), rezultă că

$$\omega_{2\wedge}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_{2e}) = -\mathbf{e}_r[\mathrm{d}(\Pi_1 - \Pi_2)/\mathrm{d}r_2 + v_{2\vartheta}^2/r_2]. \tag{5.4}$$

În ipoteza identității energiilor Π_n (n = 1, 2), din (5.4) rezultă că

$$\omega_{2\wedge}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_{2e}) = -\mathbf{e}_r(v_{2\vartheta}^2/r_2), \tag{5.5}$$

ceea ce ne informează că vîrtejurile din avalul rotorului $v'_\Sigma \subset \mathbb{E}'$ nu mai sînt libere, ele fiind supuse unei forțe radiale avînd densitatea egală cu termenul liber din dreapta egalității (5.5).

6. REDUCEREA MIȘCĂRII μ LA MIȘCAREA PLANĂ ÎN PREZENȚA REȚELELOR DE PROFILE [9]

Mișcarea μ în lungul familiei de suprafețe de curent evazate $s(r)$, $r \in (r_b, r_a)$, definită prin (1.21), se va reduce la mișcarea în lungul familiei de suprafețe de curent cilindrice

$$\mathscr{S}(r), \quad r \in (r_b, r_a), \tag{6.1}$$

spunînd despre suprafețele $s(r)$ și $\mathscr{S}(r)$ că sînt echivalente, dacă vor fi satisfăcute ipotezele R—1, 2, 3, formulate mai jos.

Cîmpul vitezei absolute în lungul familiei (6.1) se va nota prin $\mathbf{V} \in \mathbb{V}$, cel al vitezei relative, prin $\mathbf{W} \in \mathbb{V}$. cel al vitezei de antrenament, prin $\mathbf{U} \in \mathbb{V}$, între acestea existînd relația

$$\mathbf{V}(r) = \mathbf{U}(r) + \mathbf{W}(r), \text{ unde } \mathbf{U} = U\mathbf{e}_\vartheta = qr\mathbf{e}_\vartheta, \tag{6.2}$$

iar $\mathbf{V}_n$ $(n = 1, 2)$, *vitezele asimptotice în raport cu* s (r), se definesc, conform (2.1), prin

$$\mathbf{V}_1 = \lim_{x \to -\infty} \mathbf{V}, \qquad \mathbf{V}_2 = \lim_{x \to +\infty} \mathbf{V} \tag{6.3}$$

I p o t e z a **R—1**. $\mathbf{V}_1 \in \mathbb{V}$, *viteza asimptotică din amontele lui* $\mathscr{S}(r)$, are aceeași orientare ca $\mathbf{v}_1 \in \mathbb{V}$, viteza asimptotică din amontele lui $s(r)$, deci

$$\mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{V}_1 = \mathbf{0}, \qquad \forall r \in (r_b, r_a). \tag{6.4}$$

I p o t e z a **R — 2**. $V_x = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{V} \in \mathbb{R}$, *viteza axială în lungul suprafețelor de curent cilindrice* $\mathscr{S}(r)$, este egală cu media aritmetică a componentelor axiale ale vitezelor asimptotice (2.1), deci

$$V_x(r) = \frac{1}{2}(v_m + v_{2x}(r_2)) = \frac{1}{2} v_m(1 + f(r_2)), \qquad \forall r \in (r_b, r_a), \tag{6.5}$$

în ultima egalitate observîndu-se notația (3.10).

I p o t e z a **R—3**. Dacă $H_n(r_n) \in \mathbb{R}$ și $H_n(r) \in \mathbb{R}$ $(n = 1, 2)$, reprezintă *densitățile energiilor mecanice asimptotice în raport cu suprafețele de curent* $s(r)$, respectiv $\mathscr{S}(r)$, atunci

$$H_1(r_1) - H_2(r_2) = H_1(r) - H_2(r), \qquad \forall r \in (r_b, r_a), \tag{6.6}$$

densitatea $H \in \mathbb{R}$ definindu-se prin (2.4).

În cazul mișcării în lungul familiei de suprafețe cilindrice $\mathscr{S}(r)$, *forma asimptotică* (2.36) *a ecuației lui Bernoulli* se exprimă prin

$$H_1(r) - H_2(r) = -qrV_{2\vartheta}(r). \tag{6.7}$$

Observînd (2.36) și (6.7), ipoteza (6.6) ne va conduce la următoarea egalitate :

$$r_2 v_2(r_2) = r V_{2\vartheta}(r), \tag{6.8}$$

de unde, în virtutea lui (2.47), $\Gamma(r) \in \mathbb{R}$, circulația vitezei se va exprima prin

$$\Gamma(r) = \frac{2\pi}{N} r V_{2\vartheta}(r) = t V_{2\vartheta}(r), \tag{6.9}$$

unde *pasul* $t \in \mathbb{R}$ se exprimă prin

$$t = 2\pi r/N. \tag{6.10}$$

În virtutea ipotezelor (6.4) și (6.5), vitezele asimptotice (6.3) vor avea expresiile

$$\mathbf{V}_1(r) = V_x(r)\mathbf{e}_x, \quad \mathbf{V}_2(r) = V_x(r)\mathbf{e}_x + V_{2\vartheta}(r)\mathbf{e}_\vartheta \quad \forall r \in (r_b, r_a). \tag{6.11}$$

Spre deosebire de suprafețele de curent $s(r)$, suprafețele de curent cilindrice $\mathcal{S}(r)$ sînt desfășurabile. Desfășurarea plană a suprafeței cilindrice $\mathcal{S}(r)$ ne va conduce la rețeaua de profile $D^+(r)$ raportată la sistemul de coordonate (x,y) (fig. 6.1), axa x coincizînd cu coordonata cilindrică x, iar axa y, cu desfășurarea plană a coordonatei cilindrice - ϑ, astfel încît rezultatele de mai sus se vor converti în planul rețelei observînd egalitatea

$$\mathbf{e}_y = -\mathbf{e}_\vartheta, \text{ de unde } \mathbf{U} = -U\mathbf{e}_y = -qr\mathbf{e}_y. \tag{6.12}$$

Observînd (6.12) și (6.10), vitezele asimptotice (6.11) se vor exprima prin

$$\mathbf{V}_1 = V_x \mathbf{e}_x, \qquad \mathbf{V}_2 = V_x \mathbf{e}_x - \frac{\Gamma}{t} \mathbf{e}_y. \tag{6.13}$$

$\mathbf{V}_\infty$, *media geometrică a vitezelor asimptotice* $\mathbf{V}_n (n = 1, 2)$, și $\mathbf{W}_\infty$, *media geometrică a vitezelor asimptotice* $\mathbf{W}_n$, $(n = 1, 2)$, definite prin

$$\mathbf{V}_\infty = \mathbf{U} + \mathbf{W}_\infty = \frac{1}{2}(\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2), \quad \mathbf{W}_\infty = \frac{1}{2}(\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2), \tag{6.14}$$

ne vor conduce la posibilitatea exprimării vitezelor asimptotice (6.13) după cum urmează

$$\mathbf{V}_n = \mathbf{W}_\infty - \left[U + (-1)^n \frac{\Gamma}{2t}\right]\mathbf{e}_y \quad (n = 1, 2), \tag{6.15}$$

$$\mathbf{W}_n = \mathbf{W}_\infty - \left[(-1)^n \frac{\Gamma}{2t}\right]\mathbf{e}_y \quad (n = 1, 2), \tag{6.16}$$

unde

$$\mathbf{W}_n = \mathbf{V}_n - \mathbf{U} \quad (n = 1, 2, \infty); \; U = qr. \tag{6.17}$$

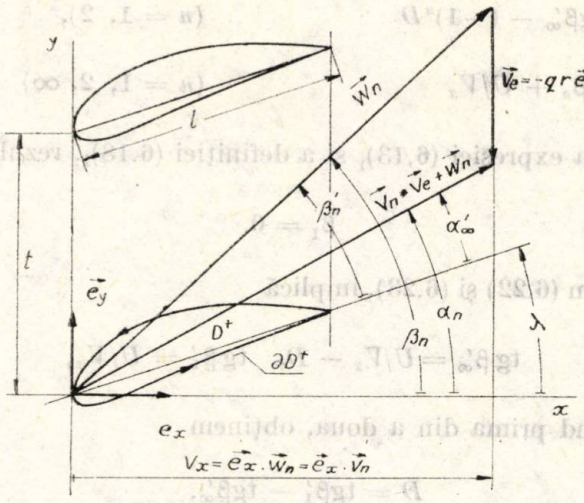


Fig. 6.1

Unghiurile β_n, respectiv β'_n, formate de vitezele $\mathbf{W}_n (n = 1, 2, \infty)$, cu axa x, respectiv coarda profilului dispus în rețea, se definesc prin

$$\operatorname{tg} \beta_n = (\mathbf{V}_n \cdot \mathbf{e}_y)/V_x, \quad \operatorname{tg} \beta'_n = (\mathbf{W}_n \cdot \mathbf{e}_y)/V_x$$

$$(n = 1, \; 2, \infty), \tag{6.18}$$

unde s-a ținut seama de faptul că, în virtutea expresiilor (6.13—17),

$$\mathbf{V}_n \, \mathbf{e}_x = \mathbf{W}_n \, \mathbf{e}_x = V_x \qquad (n = 1, 2, \infty). \tag{6.19}$$

Dacă λ reprezintă *unghiul de instalare al rețelei de profile* (unghiul format de coarda profilului D^+ cu axa x), atunci între unghiurile β_n, β'_n și *unghiurile de incidență* α_n, α'_n (unghiurile formate de vitezele V_n, respectiv $W_n (n = 1, 2, \infty)$, cu coarda profilului D^+) există, conform figurii 6.1., următoarele relații:

$$\beta_n = \alpha_n + \lambda, \quad \beta'_n = \alpha'_n + \lambda \quad (n = 1, 2, \infty). \tag{6.20}$$

În virtutea definițiilor (6.18) și a următoarei definiții pentru $D \in \mathbb{R}$, *semideflecția mișcărilor asimptotice în raport cu rețeaua de profile* D^+,

$$D = \Gamma/(2t V_x), \tag{6.21}$$

unghiurile β_n şi β'_n vor satisface următoarele relaţii :

$$\operatorname{tg}\beta_n = \operatorname{tg}\beta'_\infty - U/V_x - (-1)^n D, \qquad (n = 1, 2), \tag{6.22}$$

$$\operatorname{tg}\beta'_n = \operatorname{tg}\beta'_\infty - (-1)^n D \qquad (n = 1, 2), \tag{6.23}$$

$$\operatorname{tg}\beta'_n = \operatorname{tg}\beta_n + U/V_x \qquad (n = 1, 2, \infty) \tag{6.24}$$

În virtutea expresiei $(6.13)_1$ şi a definiţiei $(6.18)_1$, rezultă că

$$\beta_1 = 0. \tag{6.25}$$

ceea ce, conform (6.22) şi (6.23), implică

$$\operatorname{tg}\beta'_\infty = U/V_x - D, \quad \operatorname{tg}\beta'_1 = U/V_x, \tag{6.26}$$

de unde, scăzînd prima din a doua, obţinem

$$D = \operatorname{tg}\beta'_1 - \operatorname{tg}\beta'_\infty, \tag{6.27}$$

rezultat identic cu (6.24) pentru $n = 1$.

$C_A \in \mathbb{R}$, *coeficientul de portanţă al profilului* D^+, se defineşte prin

$$C_A = (2\Gamma)/(W_\infty l) = (2\Gamma\cos\beta'_\infty)/(V_x l), \tag{6.28}$$

unde $l \in \mathbb{R}^+$ reprezintă *lungimea corzii profilului* D^+, şi se exprimă prin

$$C_A = C_{A0}\cos\alpha'_\infty + C_{A1}\sin\alpha'_\infty. \tag{6.29}$$

Observînd a doua egalitate (6.28) şi definiţia (6.21), obţinem

$$D = c_a/\cos\beta'_\infty, \quad \text{unde} \quad c_a = \frac{1}{4}\left(\frac{l}{t}\right) C_A, \tag{6.30}$$

Egalînd părţile din dreapta ale expresiilor (6.27) şi $(6.30)_1$, după cîteva calcule simple, obţinem următoarea ecuaţie în $\operatorname{tg}\beta'_\infty$:

$$(1 - c_a^2)(\operatorname{tg}\beta'_\infty)^2 - 2(\operatorname{tg}\beta'_1)\operatorname{tg}\beta'_\infty + ((\operatorname{tg}\beta'_1)^2 - c_a^2) = 0, \tag{6.31}$$

observînd, în plus, şi descompunerea (6.29), obţinem o ecuaţie în $\operatorname{tg}\alpha'_\infty$ a cărei soluţie este

$$\operatorname{tg}\alpha'_\infty = E_1/E_2, \tag{6.32}$$

unde

$$E_1 = (\operatorname{tg}\beta_1')\cos\lambda - \sin\lambda - c_{a0}, \text{ unde } c_{a0} = \frac{1}{4}\left(\frac{l}{t}\right) C_{A0}, \tag{6.33}$$

$$E_2 = (\operatorname{tg}\beta_1')\sin\lambda + \cos\lambda + c_{a1}, \text{ unde } c_{a1} = \frac{1}{4}\left(\frac{l}{t}\right) C_{A1}. \tag{6.34}$$

Exprimînd $\operatorname{tg}(\alpha_\infty' + \lambda)$ în funcție de $\operatorname{tg}\alpha_\infty'$ și $\operatorname{tg}\lambda$ și observînd (6.32—33), obținem

$$\operatorname{tg}\beta_\infty' = (\operatorname{tg}\beta_1' - B)/(1 + A), \tag{6.35}$$

unde

$$A = c_{a1}\cos\lambda + c_{a0}\sin\lambda \qquad B = c_{a0}\cos\lambda - c_{a1}\sin\lambda. \tag{6.36}$$

Înlocuind (6.35) în (6.27) obținem următoarea expresie pentru D:

$$D = A_1 \operatorname{tg}\beta_1' + B_1 \tag{6.37}$$

unde

$$A_1 = A/(1 + A), \qquad B_1 = B/(1 + A). \tag{6.38}$$

Ținînd seama de notațiile introduse mai sus, Γ, circulația vitezei în lungul lui ∂D^+, dobîndește următoarele expresii echivalente:

$$\Gamma = tV_{2\vartheta} = tv_m(1 + f)D = tv_m G, \tag{6.39}$$

prima este identică cu (6.9), a doua rezultă înlocuind $(6.6)_2$ în (6.21), iar ultima, înlocuind (6.10) în $(4.13)_2$.

Din (6.39) rezultă următoarele relații:

$$D = G/(1 + f), \qquad V_{2\vartheta} = v_m G = v_m(1 + f)D, \tag{6.40}$$

ultimele două conducîndu-ne la următoarele expresii echivalente ale formei asimptotice (6.7) a ecuației lui Bernoulli:

$$H_1 - H_2 = -v_m UG = -v_m U(1 + f)D. \tag{6.41}$$

Expresiile (6.31—41) sînt utile în rezolvarea problemei directe (calculul unui rotor dat) și inverse (calculul de dimensionare) a elicelor și rotoarelor eoliene.

7. DETERMINAREA APLICAȚIILOR $r_n(r)$ (n=1,2). FORMULELE PUTERII MECANICE ȘI DEBITULUI [9]

Echivalența suprafețelor de curent $s(r)$ și $\mathscr{S}(r)$, în sensul ipotezelor (6.4—6), implică validitatea următoarelor relații:

$$v_m r_1 dr_1 = v_{2x} r_2 dr_2 = V_x r dr, \tag{7.1}$$

decurgînd din egalitatea debitelor elementare.

Acceptînd ipotezele

$$dr_n/dr \cong r_n/r \qquad (n = 1,2), \tag{7.2}$$

din (7.1) rezultă, pe rînd, egalităţile aproximative

$$V_x/v_m \cong (dr_1/dr)^2, \qquad V_x/V_{2x} \cong (dr_2/dr)^2, \tag{7.3}$$

de unde, observînd $(6.5)_2$ şi notaţia (3.10), rezultă

$$dr_1 \cong ((1+f)/2)^{1/2}dr, \qquad dr_2 \cong ((1+f)/(2f))^{1/2}dr. \tag{7.4}$$

Prin integrarea expresiilor (7.4), de la $r = r_b$, pînă la o rază oarecare $r \in (r_b, r_a)$, obţinem următoarele expresii aproximative ale aplicaţiilor $r_n(r)$ $(n = 1, 2)$:

$$r_1(r) \cong \int_{r_b}^{r} dr((1+f)/2)^{1/2}, \qquad r_2(r) \cong \int_{r_b}^{r} dr((1+f)/(2f))^{1/2}. \tag{7.5}$$

Debitul Q se defineşte şi se exprimă, observînd $(6.5)_2$, prin

$$Q = 2\pi \int_{r_b}^{r_a} V_x r dr = \pi v_m \int_{r_b}^{r_a} (1+f) r dr. \tag{7.6}$$

$P_e(v_\Sigma)$, puterea mecanică de antrenament a rotorului v_Σ, exprimată prin (3.11), ne va conduce, observînd $(6.39)_3$, (6.10) şi expresia

$$r_2 dr_2 = ((1+f)/(2f)) r dr, \tag{7.7}$$

rezultînd din (7.1), la formula

$$P_e(v_\Sigma) = -\rho q v_m^2 \int_{r_b}^{r_a} ((1+f)r)^2 D dr, \tag{7.8}$$

echivalentă, prin intermediul lui (6.30), cu

$$P_e(v_\Sigma) = -\frac{\pi}{4} \rho q v_m^2 \int_{r_b}^{r_a} ((1+f)r)^2 (l/t)(C_A/\cos\beta'_\infty) dr. \tag{7.9}$$

Pornind de la (7.1), obţinem

$$(V_x r)/(v_m r_2) = (v_{2x}/v_m)(dr_2/dr) = (dr_2/dr)f.$$

unde s-a ținut seama de (3.10), observînd, apoi, (7.2), pentru $n = 2$, rezultă următoarea egalitate aproximativă:

$$(V_z r)/(v_m r_2) \cong (f(1+f)/2)^{1/2}, \tag{7.10}$$

în virtutea căreia obținem o a doua relație aproximativă privind evaluarea funcției G_2, definită prin $(4.13)_1$,

$$G_2 \cong (2f(1+f))^{1/2} D. \tag{7.11}$$

Observînd, alături de (7.11), egalitatea aproximativă (7.2), pentru $n = 2$, obținem

$$G_2^2 \mathrm{d}r_2/r_2 \cong 2f(1+f)D^2 \mathrm{d}r/r. \tag{7.12}$$

Ținînd seama de $(6.40)_1$ și de (7.11), expresia (4.15) va dobîndi forma

$$\Pi_1 - \Pi_2 \cong \frac{1}{2} v_m^2 (1+f)[f(1+2D^2) - 2(U/v_m)D - 1], \tag{7.13}$$

echivalentă cu

$$\Pi_1 - \Pi_2 \cong \frac{1}{2} v_m^2 [f^2(1+2D^2) + 2D\left(D - \frac{U}{v_m}\right)f - 2\frac{U}{v_m}D - 1]. \tag{7.14}$$

8. SOLUȚIILE ECUAȚIILOR FUNCȚIONALE (4.14) ȘI (5.2) [9], [11]

Prin intermediul relațiilor aproximative construite în paragraful anterior, vom construi soluția numerică a ecuației funcționale (4.14) și soluția analitică a ecuației funcționale (5.2), considerînd că toate funcțiile depinzînd de argumentul r_2 pot fi considerate ca funcții depinzînd de r, în virtutea aplicației $r_2(r)$, definită prin $(7.5)_2$.

Observînd egalitățile (7.11) și (7.12), precum și egalitatea

$$G_2 U_2 = GU, \tag{8.1}$$

rezultînd din (4.12) și (4.13), ecuația funcțională (4.14) va dobîndi expresia

$$(1+2D^2)f^2 + 2D\left(D - \frac{U}{v_m}\right)f - \left(2\frac{U}{v_m} + I + 1\right) \cong 0, \tag{8.2}$$

unde

$$I = I(r) = 2\int_r^{r_a} (1+f) f D^2 \frac{\mathrm{d}r}{r} \tag{8.3}$$

și unde, conform $(6.26)_1$ și $(6.5)_2$

$$D = D(r) = 2\frac{U}{v_m}\frac{1}{1+f} - \operatorname{tg}\beta'_\infty, \qquad U = U(r) = qr. \tag{8.4}$$

Soluția ecuației funcționale (8.2) și anume funcția

$$f = f(r) = v_{2x}(r_2(r))/v_m, \tag{8.5}$$

figurează atît în expresia lui D, cît și a lui I. Ea poate fi obținută pe cale numerică construind următoarea formulă de recurență, prin care ecuația (8.2) degenerează într-o ecuație de gradul 2 în f:

$$(1+2D^2)_{(n-1)}f^2_{(n)} + 2D\left(D - \frac{U}{v_m}\right)_{(n-1)} f_{(n)} - \left(2\frac{U}{v_m} + I + 1\right)_{(n-1)} = 0. \tag{8.6}$$

Coeficienții afectați de indicele $(n-1)$ se calculează cu valoarea $f = f_{(n-1)}$, corespunzătoare pasului $(n-1)$ al iterației, iar soluția $f_{(n)}$, corespunzătoare pasului (n) al iterației, se identifică cu soluția ecuației (8.6), considerată ca ecuație de gradul 2 în $f_{(n)}$. Cu ajutorul soluției $f = f_{(n)}$ se calculează coeficienții de indice (n), care vor genera o ecuație de gradul 2 în $f_{(n+1)}$ etc. Procesul iterativ încetează atunci cînd s-a atins gradul de aproximație dorit.

Calculul funcției $f(r)$ începe în secțiunea $r = r_a - \Delta r$, observînd următoarele condiții inițiale, deci pentru $r = r_a$,

$$f(r_a) = 1, \qquad l(r_a) = 0, \qquad D(r_a) = 0, \tag{8.7}$$

$$\operatorname{tg}\beta'_1 = \operatorname{tg}\beta'_\infty(r_a) = U(r_a)/v_m = qr_a/v_m, \tag{8.8}$$

și acceptînd pentru unghiul de incidență α'_∞ o valoare inițială

$$\alpha'_\infty(r_a) = \alpha'_{\infty a}. \tag{8.9}$$

Calculul se continuă, pînă la $r = r_b$, parcurgînd un număr de intervale suficient de mare pentru a permite evalurea cît mai exactă a integralei (8.3).

Observînd $(6.40)_1$ și (7.11), ecuația funcțională (5.2), tributară ipotezei (2.7) a identității energiilor geopiezopotențiale, va dobîndi expresia

$$(1+2D^2)f^2 + 2D\left(D - \frac{U}{v_m}\right)f - \left(2\frac{U}{v_m} + 1\right) \cong 0, \tag{8.10}$$

echivalentă cu

$$(1+f)f(1+2D^2) - 2\frac{U}{v_m}D - 1 \cong 0 \tag{8.11}$$

de unde obținem, pe de o parte,

$$f = -1, \tag{8.12}$$

o soluție lipsită de sens fizic, iar, pe de alta,

$$f \overset{\cdot}{\cong} \frac{1 + 2D(U/v_m)}{1 + 2D^2} \tag{8.13}$$

o *ecuație funcțională asociată ipotezei* $\Pi_1 = \Pi_2$.

Vom observa că expresiile (8.10) și (8.11) ale ecuației funcționale (5.2) pot fi obținute direct din (7.13) și (7.14), impunînd condiția $\Pi_1 = \Pi_2$. Comparînd (8.2) cu (8.10), rezultă că

$$\Pi_1 = \Pi_2 \Rightarrow I = 0, \tag{8.14}$$

cu alte cuvinte, dacă ignorăm valoarea integralei (8.3) din cuprinsul termenului liber al ecuației funcționale (8.2), atunci ecuația obținută convine ipotezei identității energiilor geopiezopotențiale (2.7) și nu ipotezei vîrtejurilor libere (2.6).

Ecuația funcțională (8.13) admite o soluție analitică. Astfel, dacă observăm (6.26) și $(6.5)_2$, rezută că

$$\operatorname{tg} \beta_1' = \frac{2U}{v_m(1 + f)}. \tag{8.15}$$

Înlocuind (8.15) în (6.37), obținem următoarea expresie a funcției f

$$f = 2A_1(U/v_m)/(D - B_1) - 1. \tag{8.16}$$

Egalînd (8.13) cu (8.16), obținem următoarea ecuație de gradul 3 în D:

$$D^3 + D^2\left[(2A_1 - 1)\frac{U}{v_m} - B_1\right] + D\left(B_1\frac{U}{v_m} + 1\right) + \\ + \left(A_1\frac{U}{v_m} - B_1\right) \cong 0, \tag{8.17}$$

soluție tributară, prin intermediul expresiei (8.13), ipotezei $\Pi_1 = \Pi_2$. Din cele trei soluții ale ecuației (8.17) se va reține cea mai mică soluție reală, pe care înlocuind-o în (8.13), obținem valoarea lui f. Cu această valoare cunoscută, obținem valoarea unghiului β_1' din (8.15), iar din (6.27), obținem valoarea unghiului β_∞'.

Admițînd ipoteza simplificatorie $r = r_2$, $\forall r \in (r_b, r_a)$ ecuația funcțională (5.2) va dobîndi expresia

$$(1+f)\left[f(1+D^2)-2\frac{U}{v_m}D+D^2-1\right]=0, \tag{8.18}$$

deoarece, în virtutea lui (4.13) are loc implicația

$$r_2=r\Rightarrow G_2=G, \tag{8.19}$$

unde G se exprimă prin intermediul lui (6.40) după cum urmează

$$G=(1+f)D. \tag{8.20}$$

Din (8.18), înlăturînd soluția $f=-1$, rezultă că

$$f=\frac{1-D^2+2(U/v_m)D}{1+D^2}, \tag{8.21}$$

soluție care convine ipotezei fundamentale $\Pi_1=\Pi_2$ și ipotezei simplificatorii $r_2=r$.

În literatura clasică [2], [3], [6], [15], componentele v_{2x} și v_{2y} ale vitezei asimptotice din avalul rotorului v'_Σ se evaluează făcînd apel la doi factori: a, *factorul de interferență axial* și a', *factorul de interferență radial*, definiți prin

$$V_x=v_m(1+a), \qquad W_y=U(1-a'). \tag{8.22}$$

Observînd $(6.5)_2$ și expresia

$$W_y=U-\Gamma/(2t)=U-\frac{1}{2}v_m(1+f)D \tag{8.23}$$

rezultînd din (6.16), pentru $n=1$, $(6.13)_1$, $(6.39)_3$ și (8.20), rezultă că

$$a=-\frac{1}{2}(1-f), \qquad a'=\frac{1}{2}\frac{v_m}{U}(1+f)D. \tag{8.24}$$

Factorii (8.24) satisfac, conform [2], p. 197, ecuația

$$a(a+1)+(U/v_m)^2\,a'(a'-1)=0, \tag{8.25}$$

tributară ipotezelor $\Pi_1=\Pi_2$ și $r_2=r$. Înlocuind în (8.25) expresiile (8.24) ale factorilor de interferență, obținem ecuația (8.18), căreia i se asociază soluția (8.21).

9. EXEMPLU NUMERIC PENTRU SOLUȚIONAREA PROBLEMEI DIRECTE, ÎN IPOTEZA VÎRTEJURILOR LIBERE

Considerăm paleta rotorului eolian 28,3/3/D, 340/70 kW, 60 Hz, manufacturată de firma Danish Wind Technology A/S, Viborg, Denmark, descrisă în prospecte prin:

1) Parametrii cinematici:

$$v_m=12{,}7\ \text{m};\ n=50{,}4\ \text{rot/min};\ (q^T=5{,}2779\ \text{s}^{-1}). \tag{9.1}$$

2) Razele caracteristice :

$$r_b = 2{,}25 \text{ m}; \quad r_c = 14{,}25 \text{ m}; \quad r_a = 14{,}65 \text{ m}. \tag{9.2}$$

3) Parametrii geometrici :

3.1) N, numărul de palete, (9.3)

$$N = 3 \text{ palete}.$$

3.2) Profilul generator al paletei — NACA 44**, având f/l, săgeata relativă, constantă în lungul razei, deci

$$f/l = 0{,}04. \tag{9.4}$$

3.3.) $l(r)$, lungimea corzii profilului $D^+(r)$, se consideră funcție liniară pe (r_b, r_c), cu valorile caracteristice :

$$l_b = l(r_b) = 1{,}8 \text{ m}; \qquad l_c = l(r_c) = 0{,}6 \text{ m}, \tag{9.5}$$

iar pe (r_c, r_a), funcție eliptică, descrisă prin

$$l(r) = l_c \sqrt{1 - ((r - r_c)/(r_a - r_c))^2} \qquad \forall r \in (r_c, r_a). \tag{9.6}$$

3.4) $d(r)$, grosimea maximă a profilului $D^+(r)$, se consideră funcție liniară pe (r_b, r_c), definită prin următoarele valori caracteristice ale grosimii relative d/l :

$$(d/l)_b = 0{,}20; \qquad (d/l)_c = 0{,}12, \tag{9.7}$$

iar pe (r_c, r_a), funcție definită prin restricția

$$(d/l) = (d/l)_c, \quad \forall r \in (r_c, r_a). \tag{9.8}$$

3.5) $\lambda(r)$, unhiul de instalare al rețelei de profile $D^+(r)$, se consideră funcție liniară pe (r_b, r_a), realizînd *torsionarea*

$$\Delta\lambda = \lambda(r_b) - \lambda(r_a) = 7{,}8^0. \tag{9.9}$$

În virtutea expresiei (4.24) din [10], $C_{An}(n = 0{,}1)$, componentele coeficientului de portanță C_A, definit prin (6.29), are următoarele expresii :

$$C_{A0} = -4\pi(f/l) \sum_{n=1}^{6} nA_n, \tag{9.10}$$

$$C_{A1} = 2\pi\left[1 + 2(d/l) \sum_{n=1}^{5} nB_n\right], \tag{9.11}$$

între A_n $(n = 0, 1 \ldots, 6)$ și B_n $(n = 1, 2, \ldots, 5)$, coeficienții reprezentării parametrice a profilului generator (profilul $D^+(r)$ cu $d/l = 1$ și $f/l = 1$) și cei ai reprezentării parametrice (4.17—18) din [10] existînd relațiile

$$a_n = (f/l)A_n, \quad b_n = (d/l)B_n. \tag{9.12}$$

Tabelul

Soluționarea problemei directe, în ipoteza vîrtejurilor libere, pentru rotorul turbinei A/S, Viborg,

r [m]	f	β_1' [°]	α_∞' [°]	λ [°]	l[m]
14,6500	1,0000	−80,6724	7,0000	−80,6724	0,0000
14,6499	0,9898	−80,7189	6,9522	−87,6724	0,0134
14,60	0,7761	−81,6731	5,9458	−87,6410	0,2905
14,40	0,5683	−82,5348	4,9458	−87,5152	0,5562
14,25	0,5385	−82,5990	4,7850	−87,4208	0,6000
14,0	0,5282	−82,5180	4,7065	−87,2635	0,6250
13,5	0,5095	−82,3383	4,5666	−86,9490	0,6750
13,0	0,4928	−82,1339	4,4508	−86,6345	0,7250
12,5	0,4780	−81,9036	4,3599	−86,3200	0,7750
12,0	0,4647	−81,6459	4,2954	−86,0055	0,8250
11,5	0,4525	−81,3594	4,2584	−85,6910	0,8750
11,0	0,4412	−81,0421	4,2506	−85,3765	0,9250
10,5	0,4304	−80,6918	4,2738	−85,0619	0,9750
10,0	0,4199	−80,3057	4,3302	−84,7474	1,0250
9,5	0,4093	−79,8805	4,4225	−84,4329	1,0750
9,0	0,3983	−79,4119	4,5540	−84,1184	1,1250
8,5	0,3867	−78,8948	4,7287	−83,8039	1,1750
8,0	0,3743	−78,3226	4,9514	−83,4894	1,2250
7,5	0,3607	−77,6870	5,2281	−83,1748	1,2750
7,0	0,3456	−76,9775	5,5660	−82,8603	1,3250
6,5	0,3290	−76,1804	5,9741	−82,5458	1,3750
6,0	0,3104	−75,2778	6,4633	−82,2313	1,4250
5,5	0,2897	−74,2454	7,0471	−81,9168	1,4750
5,0	0,2666	−73,0500	7,7423	−81,6023	1,5250
4,5	0,2410	−71,6445	8,5692	−81,2877	1,5750
4,0	0,2127	−68,9597	9,5520	−80,9732	1,6250
3,5	0,1819	−67,8898	10,718	−80,6587	1,6750
3,0	0,1488	−65,2636	12,090	−80,3442	1,7250
2,5	0,1146	−61,7898	13,667	−80,0297	1,7750
2,25	0,0978	−59,5860	14,5091	−79,8724	1,8000

În cazul familiei de profile NACA cu 4 cifre, sumele din expresiile (9.10—11) au următoarele valori:

$$\sum_{n=1}^{6} nA_n = -0{,}903438\,; \quad \sum_{n=1}^{5} nB_n = 0{,}108719. \tag{9.13}$$

Semnalăm faptul că restricțiile (9.6) și (9.8) ne aparțin, prospectele paletei omițînd informațiile de pe tronsonul (r_c, r_a).

Problema directă, constînd în calculul parametrilor aerodinamici ai paletei descrise mai sus, se va rezolva, observînd ipoteza vîrtejurilor libere (2.6), valorile inițiale (8.7), următoarea valoare inițială a unghiului de incidență

$$\alpha_\infty(r_a) = \alpha_{\infty a} = 7{,}8^0, \tag{9.14}$$

precum și convenția de semn (2.52) pentru rotoarele eoliene, deci

$$q^T = -q, \quad U^T = -U.$$

9.1

eoliene 29.3/3/D, 340/70 kW, 60 Hz, manufacturată de firma Danish Wind Technology Denmark.

d/l	D	Γ [m²/s]	C_A	P_e [kW]	$\overset{0}{\Delta H}$	$\overset{0}{\Delta \Pi}$
0,1200	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,1200	0,0008	0,6471	1,2311	0,12—3	0,0202	—6,7—10
0,1200	0,0184	12,6959	1,1195	1,1353	0,3967	1,601—6
0,1200	0,0359	21,5927	1,0083	11,8123	0,6747	2,399—5
0,1200	0,0388	22,6444	0,9903	21,4593	0,7076	4,914—5
0,1248	0,0404	22,9918	0,9821	37,6073	0,7184	0,0001
0,1333	0,0436	23,6089	0,9674	69,4018	0,7377	0,0002
0,1407	0,0468	24,1368	0,9553	100,4284	0,7542	0,0003
0,1471	0,0500	24,5914	0,9457	130,5804	0,7684	0,0004
0,1527	0,0534	24,9873	0,9391	159,7768	0,7808	0,0006
0,1577	0,0570	25,3375	0,9354	187,9572	0,7917	0,0008
0,1622	0,0608	25,6535	0,9350	215,0759	0,8016	0,0010
0,1662	0,0649	25,9457	0,9380	241,0987	0,8108	0,0012
0,1698	0,0694	26,2233	0,9447	265,9991	0,8194	0,0015
0,1730	0,0744	26,4942	0,9555	289,7564	0,8279	0,0018
0,1760	0,0800	26,7654	0,9707	312,3538	0,8364	0,0021
0,1787	0,0863	27,0426	0,9907	333,7766	0,8450	0,0026
0,1812	0,0935	27,3306	1,0161	354,0111	0,8540	0,0031
0,1835	0,1018	27,6328	1,0476	373,0442	0,8635	0,0037
0,1857	0,1116	27,9515	1,0860	390,8620	0,8734	0,0045
0,1876	0,1231	28,2874	1,1323	407,4500	0,8839	0,0054
0,1895	0,1370	28,6400	1,1876	422,7925	0,8949	0,0065
0,1912	0,1537	29,0068	1,2536	436,8737	0,9064	0,0080
0,1928	0,1744	29,3836	1,3319	449,6776	0,9182	0,0098
0,1943	0,2004	29,7643	1,4248	461,1896	0,9301	0,0122
0,1957	0,2336	30,1412	1,5348	471,3988	0,9419	0,0153
0,1970	0,2773	30,5063	1,6647	480,2999	0,9533	0,0194
0,1983	0,3366	30,8531	1,8167	487,8979	0,9641	0,0250
0,1994	0,4207	31,1810	1,9902	494,2117	0,9743	0,0327
0,2000	0,4770	31,3386	2,0822	496,8960	0,9793	0,0377

Observînd $(6.20)_2$, pentru $n = \infty$, împreună cu $(8.8)_{1.3}$, rezultă următoarea expresie pentru (r_a):

$$\lambda(r_a) = -\alpha_\infty(r_a) - \operatorname{arctg}(q^T r_a / v_m), \tag{9.15}$$

care, alături de (9.9), conduce la determinarea unică a funcţiei liniare $\lambda(r)$.

Calculul parametrilor aerodinamici ai paletei constă în parcurgerea următoarelor etape:

E—1) Împărţirea intervalului (r_b, r_a) într-o mulţime de M segmente disjuncte

$$\Delta r_m = r_{m-1} - r_m \ (m = 1, 2, \ldots, M), \quad \text{unde } r_0 = r_a, \ r_M = r_b, \tag{9.16}$$

calculul parcurgînd şirul indicelui m în ordine crescătoare.

E—2) Calculul funcţiei $f = f(r_m)$, corespunzătoare extremităţii senestre a intervalului Δr_m, cu ajutorul formulei de recurenţă (8.6), coefici-

enţii asociaţi iteraţiei de ordinul $n = 1$ calculîndu-se cu valoarea cunoscută $f(r_{m-1})$. Dacă $m = 1$, atunci $f(r_{m-1})$ se cunoaşte din valoarea iniţială $(8.7)_1$, dacă $m > 1$, din calculul anterior asociat segmentului Δr_{m-1}. Calculul numeric al funcţiei f, reprodus în tabelul 9.1, face apel la următoarea restricţie pentru stoparea procesului iterativ :

$$|\beta'_\infty(f_{(n)}) - \beta'_\infty(f_{(n-1)})| \leqq 10^{-4} \Rightarrow f_{(n)} = f, \tag{9.17}$$

unghiul β'_∞ definindu-se prin $(6.20)_2$ pentru $n = \infty$.

E—3) Cu ajutorul valorii funcţiei f evaluate la punctul E—2) se calculează, pe rînd : β'_1, din (8.15); α'_∞, observînd (6.32—34); β'_∞, din $(6.20)_2$, pentru $n = \infty$, observînd valoarea lui $\lambda\,(r)$; D, din (6.27) ; Γ, din $(6.39)_2$; C_A, cu ajutorul formulei

$$C_A = 4(t/l)D \cos\beta'_\infty, \tag{9.18}$$

rezultînd din (6.28), $(6.39)_2$ şi (6.5) ; P_e, observînd (7.8), unde integrala se consideră pe intervalul (r_m, r_a), pe subintervalele Δr_m integrala evaluîndu-se prin formula trapezelor, şi, în cele din urmă $\overset{0}{\Delta H}$ şi $\overset{0}{\Delta \Pi}$, diferenţele densităţii energiilor asimptotice, definite şi exprimate, conform (6.41) şi (7.13), prin

$$\overset{0}{\Delta H} = (H_1 - H_2)/(v_m^2/2) = 2D(U^T/v_m)\,(1 + f), \tag{9.19}$$

$$\overset{0}{\Delta \Pi} = (\Pi_1 - \Pi_2)/(v_m^2/2) = (1 + f)\ [f(1 + 2D^2) + 2(U^T/v_m)\,D - 1]. \tag{9.20}$$

Rezultatele numerice sînt concentrate în tabelul 9.1. Prima linie a tabelului conţine valorile iniţiale (8.7) şi (9.13), împreună cu valorile determinate de acestea prin intermediul formulelor enumerate mai sus. În ultima linie a tabelului figurează valoarea lui P_e, puterea mecanică de antrenament a rotorului, şi anume

$$P_e = 496{,}8960 \text{ kW}. \tag{9.21}$$

Acestei valori i se asociază următoarea valoare a lui P_{ee}, puterea la bornele generatorului electric,

$$P_{ee} = 0{,}72\ P_e = 357{,}7651 \text{ kW}, \tag{9.22}$$

foarte apropiată de valoarea $P_{ee} = 340$ kW care este semnalată de prospectele comerciale ale rotorului.

Primită la redacţie la 6 iunie 1984

BIBLIOGRAFIE

1. H. GLAUERT, *Grundlagen der Tragflügel - und Luftschraubentheorie*, Springer-Verlag, Berlin, 1929.

2. H. GLAUERT, *Airplane Propellers*, în *Aerodynamic Theory*, Vol. IV, ed.W. F. Durand, Springer-Verlag, Berlin, 1935.

3. L. M. MILNE-THOMSON, *Theoretical Aerodynamics*, MacMillan, London, 1958.
4. C. JACOB, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*, Editions de l'Académie Roumaine, Bucarest & Gauthier-Villars, Paris, 1959.
5. W. NOLL, *The Foundations of Mechanics and Thermodynamics. Selected Papers*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1974.
6. O. PISTOLESI, *Aerodinamica*, Unione Tipografico-Editrice Torinese, Torino, 1932.
7. O. POPA, *The Transfer of the Kinetic Energy in the Motion of Simple Fluids*, în *Proceedings of the Fifth Conference on Fluid Machinery*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 847 — 857, (1975).
8. O. POPA, *The mechanical power of transport and the generalized expressions of Euler's equation for turbomachinery*, în *Proceedings of the Sixth Conference on Fluid Machinery*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 868—878 (1979).
9. O. POPA, *Formularea problemei dimensionării rotoarelor eoliene cu ajutorul teoriei rețelelor de profile*, Referat intern, Catedra de mașini hidraulice, Institutul Politehnic „Traian Vuia", Timișoara, 1981.
10. O. POPA, *The Exact and Explicit Solution to the Problem of the Plane Potential Motion past Aerofoils of Carafoli Type*, Rev. Roum. Sci. Techn. — Mécanique appliquée **26**, 5, 645—658 (1981).
11. O. POPA, *Soluționarea problemei mișcării fluidelor elastice în prezența rotorarelor eoliene*, Referat intern, Catedra de mașini hidraulice, Institutul Politehnic „Traian Vuia", Timișoara, 1983.
12. C. TRUESDELL & R. A. TOUPIN, *The Classical Field Theories*, Encyclopedia of Physics, **III/1**. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1960.
13. C. TRUESDELL & W. NOLL, *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*, Encyclopedia of Physics, **III/3**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1965.
14. C. TRUESDELL, *A First Course in Rational Continuum Mechanics*, Academic Press, New York-San Francisco-London, 1977.
15. F. WEINIG, *Aerodynamik der Luftschraube*, Springer-Verlag, Berlin, 1940.

NOI CRITERII DE PROIECTARE ÎN DOMENIUL MARILOR BARAJE

de RADU PRIȘCU, DAN STEMATIU
Institutul de Construcții, București,

În domeniul marilor baraje, ca de altfel în întreg domeniul construcțiilor, activitatea inginerească urmărește realizarea unui echilibru rațional între siguranță și economicitate. Siguranța este exprimată uzual prin complementul ei, riscul asociat, definit de probabilitatea ca integritatea structurală sau funcționalitatea unei anumite lucrări să fie afectate în decursul existenței acesteia.
În cadrul concepției deterministe, conform căreia încărcările exterioare, datele de teren și proprietățile structurale sînt cunoscute bine și în detaliu, riscul nu se poate aprecia cantitativ. În cadrul concepției probabiliste, conformă cu realitatea fizică, se admite variabilitatea aleatoare a încărcărilor exterioare și a capacității de rezistență a ansamblului baraj-teren de fundare. Această variabilitate este determinată de variația nivelurilor de apă, de regimurile de funcționare a drenajelor, de variația proprietăților fizico-mecanice ale materialelor din care este realizat barajul, de neomogenitățile și variația caracteristicilor geotehnice ale terenului de fundare și inerent și de imperfecțiunile de execuție. Riscul este de această dată legat de suprapunerea întîmplătoare defavorabilă a unui nivel ridicat al încărcărilor cu o capacitate de rezistență zonal scăzută.
În lucrare se prezintă evaluarea cantitativă a riscului asociat cu o serie de tipuri de mari baraje și se dezvoltă criterii de proiectare care, incluzînd nivelul de risc, asigură echilibrul dorit între costul de investiție și siguranța lucrării.

1. PROBABILITATEA DE CEDARE

Probabilitatea de cedare sau de avariere reprezintă măsura cantitativă a riscului [1]. Pentru definirea acesteia se consideră o variabilă X ca parametru al unui mecanism de cedare acceptat. Variabila X poate reprezenta eforturi, atunci cînd cedarea se datorește depășirii eforturilor capabile, coeficienți de alunecare, atunci cînd cedarea se face prin alunecarea pe fundație sau prin corpul construcției, debite, atunci cînd cedarea se face prin depășirea capacității descărcătorilor etc. Această variabilă ia valoarea $X=S$ ca urmare a încărcărilor exterioare și are valoarea $X \geqslant \geqslant R$ în momentul cedării, R reprezentînd capacitatea internă a structurii. Condiția ca cedarea sau avarierea să nu se producă este exprimată sub forma $S < R$. Dacă S și R se admit cu valori bine precizate, ca în cadrul concepției deterministe, se poate defini coeficientul de siguranță $F = R/S$. În situațiile în care $F > 1$ cedarea nu se produce în nici un caz și apare ideea falsă a siguranței depline.

În realitate, S și R sînt variabile aleatoare. Variabilitatea acestora se poate exprima prin funcțiile de distribuție $F_S(X)$ $F_R(X)$, respectiv prin funcțiile de densitate de probabilitate $f_S(X)$ și $f_R(X)$. Deși pe medie $\bar{S} < \bar{R}$, există valori maxime accidentale ale lui S care depășesc valorile minime accidentale ale lui R. Valoarea numerică a probabilității de cedare rezultă din integrala de convoluție [1]:

$$P_c = P(S > R) = \int_0^\infty F_S(X) f_R(X)\, \mathrm{d}X. \tag{1}$$

Dacă distribuțiile lui S și R au variații reduse, fiind grupate în jurul valorilor medii, probabilitatea de cedare are valori reduse. Dacă însă va-

St. Cerc. Mec. Apl., Tom 43, Nr. 5–6, 1984, P. 542–551

riaţiile acestor distribuţii sînt mari, aşa cum se întîmplă adesea în cazul datelor de teren, probabilitatea de cedare este mare, iar noţiunea de coeficient de siguranţă îşi pierde semnificaţia.

2. SIGURANŢA BARAJELOR OMOGENE DE ANROCAMENTE

Se consideră drept mecanism de cedare alunecarea pe suprafeţe plane care trec prin piciorul aval al barajului (fig. 1*a*). Încărcările exterioare sînt date de presiunea apei din lac şi de greutatea proprie a umpluturii. Condiţia de stabilitate a volumului situat deasupra planului de alunecare definit de unghiul α se poate scrie sub forma :

$$S = \frac{A}{B} \leqslant \operatorname{tg}\varphi, \tag{2}$$

unde

$$A = G\sin\alpha + 0{,}5\,(h_\alpha - h)^2(\lambda_1\sin\alpha + \cos\alpha),$$

$$B = G\cos\alpha + (h_\alpha - h)^2(\lambda_1\cos\alpha - \sin\alpha).$$

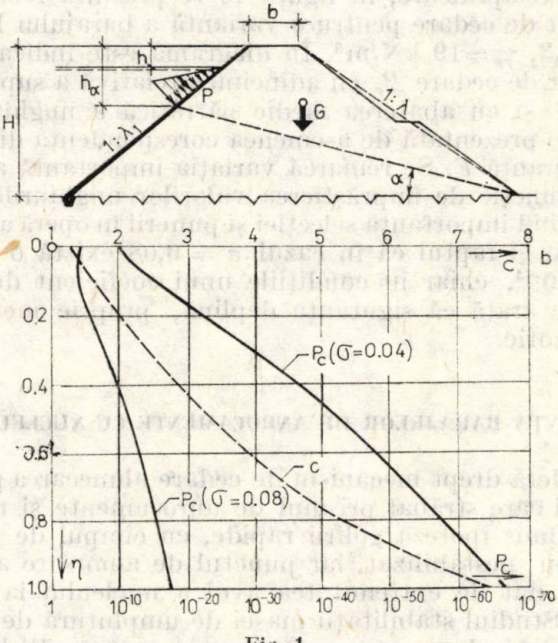


Fig. 1

Notaţiile sînt cele din figură, λ şi λ_1 sînt înclinările paramentelor, iar φ este unghiul de frecare interioară.

Analizînd variabilitatea încărcărilor şi a rezistenţelor şi definind statistic această variabilitate a rezultat [2] :

— variația nivelurilor apei din rezervor, în cazul lacurilor hidroenergetice, poate fi descrisă de o distribuție lognormală:

$$f_h(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, h\delta} \exp\left[-\frac{\ln(h/\beta)}{2\delta^2}\right], \tag{3}$$

unde $\delta=0{,}833$ și $\beta=10$. Efectul acestei variații asupra condiției de stabilitate este în general redus, fiind sub 2%;

— variația greutății proprii a umpluturii este nesemnificativă, greutatea volumetrică fiind principalul parametru controlat în timpul execuției;

— variația parametrului de rezistență $\operatorname{tg}\varphi$ este exprimabilă printr-o distribuție normală. a cărei densitate de probabilitate este dată de:

$$f_{\operatorname{tg}\varphi}(X) = f_R(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left[-\frac{(X - \operatorname{tg}\overline{\varphi})^2}{2\sigma^2}\right], \tag{4}$$

unde $\operatorname{tg}\overline{\varphi}$ este valoarea medie, σ este abaterea medie pătratică, iar X este variabila de integrare.

Înlocuind aceste distribuții în integrala de convoluție (1), în care $S = A/B$, iar $R = \operatorname{tg}\varphi$, rezultă prin integrare probabilitățile de cedare.

Pentru exemplificare, în figura 1*b* se prezintă rezultatele evaluării probabilităților de cedare pentru o variantă a barajului Leșu cu $\lambda_1 = 1{:}1{,}6$, $\lambda=1:1{,}3$, $\gamma_u=19$ kN/m³. În diagramă este indicată variabilitatea probabilităților de cedare P_c cu adîncimea relativă a suprafeței de alunecare $\eta = h_\alpha/H$ și cu abaterea medie pătratică a unghiurilor de frecare internă φ. Este prezentată de asemenea corespondența dintre P_c și coeficientul de siguranță F. Se remarcă variația importantă a probabilităților de cedare în funcție de împrăștierea valorilor unghiurilor de frecare internă, evidențiind importanța selecției și punerii în operă a anrocamentelor. Este de reținut și faptul că în cazul $\sigma = 0{,}08$ există o probabilitate de cedare $P_c = 10^{-4}$, chiar în condițiile unui coeficient de siguranță $F = 1{,}3$, ceea ce arată că siguranța deplină, proprie metodelor deterministe, este iluzorie.

3. SIGURANȚA BARAJELOR DE ANROCAMENTE CU NUCLEU DE ARGILĂ

Se consideră drept mecanism de cedare alunecarea pe suprafețe poligonale oarecari care străbat prismul de anrocamente și nucleul de argilă (fig. 2). S-a admis ipoteza golirii rapide, cu cîmpul de presiuni interstițiale din nucleu nestabilizat, iar punctul de amorsare a suprafețelor de alunecare este dat de extremitatea aval a nucleului la nivelul coronamentului [3]. Studiul stabilității masei de umplutură de deasupra suprafeței potențiale de alunecare s-a făcut prin metoda Bishop. Condiția de stabilitate se poate exprima sub forma $S < R$, uzual, $F = R/S > 1$, unde

$$S = \Sigma G_i \sin \alpha_i,$$

$$R = \Sigma[c_i L_i + (G_i \cos\alpha_i - u_i L_i)\operatorname{tg}\varphi_i], \tag{5}$$

u α_i unghiul format cu orizontala de tangenta la baza fișiei analizate, $_i$ lungimea fișiei, c_i coeziunea, u_i presiunea apei din pori și φ_i unghiul e frecare interioară.

Probabilitatea de cedare nu mai poate fi evaluată direct din intevala de convoluție, datorită caracterului implicit al relațiilor de echiliru in metoda Bishop. Formularea echivalentă, care s-a utilizat în studiu, ste dată de :

$$P_c = P(R/S < 1) = \int_0^1 f_{R/S}(X)\, \mathrm{d}X, \tag{6}$$

nde $f_{R/S}(X)$ este densitatea de probabilitate a rapoartelor R/S.

În cele ce urmează, aplicarea acestei metodologii pentru barajul îiușor a vizat exclusiv studiul influenței pe care o are neomogenitatea arierei de argilă asupra siguranței lucrării. Dintre parametrii geotehici ai argilei s-au considerat ca variabile aleatoare coeziunea și permeailitatea, deoarece din calculele primare a rezultat că variația unghiului e frecare interioară are influențe nesemnificative asupra siguranței. Dearece exprimarea analitică a distribuției $f_{R/S}$ și integrarea acesteia ste foarte dificilă, probabilitatea de cedare s-a determinat numeric, arcurgînd următoarele etape :

— discretizarea intervalului de variație al permeabilităților (10^{-2} . . . 10^{-8} m/zi) în subintervale egale $I_k (k = 1, n)$, și determinarea cîmpului e presiuni neutrale la golirea bruscă corespunzătoare valorii medii pe ubinterval (fig. 2);

— determinarea șirului de probabilități de cedare $P_c^k (k = 1, n)$ onsiderînd de fiecare dată constant cîmpul de presiuni neutrale și introucînd exclusiv variabilitatea coeziunilor;

— calculul probabilităților $p_k (k = 1, n)$ ca valorile conductivitălor hidraulice să ia valorile selectate din intervalele I_k;

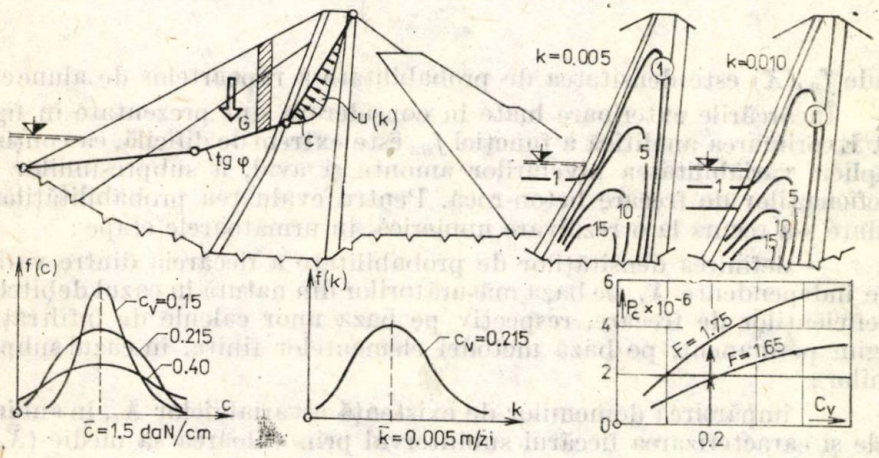


Fig. 2

— evaluarea probabilității de cedare, ținînd seama de relația pr babilității totale :

$$P_c = \sum_1^n P_c^k \cdot p_k \cdot \qquad (1$$

În cazul barajului Rîușor distribuțiile conductivității hidraulice a coeziunilor s-au asimilat ca distribuții normale, cu valorile medii și coef cienții de variație prezentați în figură [3]. Pentru coeziune, pe lîngă coef cientul de variație rezultat din datele de teren, s-au mai studiat două c zuri limită, cu $c_v = 0{,}15$ și $c_v = 0{,}4$. Tot în figura 2 este prezentată d pendența probabilităților de cedare de valoarea inițială a raportul valorilor medii $F = R_0/S_0$ și, respectiv, de coeficientul de variație coeziunilor. Se constată gruparea probabilităților de cedare în zona un valori reduse de același ordin de mărime $(1 \ldots 5) \times 10^{-6}$, cu schimbă mai importante aduse de situația echilibrului limită decît de variabil tatea coeziunilor.

4. SIGURANȚA BARAJELOR DE GREUTATE FLUVIALE

Se consideră drept mecanism de cedare alunecarea pe talpa fundație, la contactul beton-rocă (fig. 3). Variabila care măsoară în ace caz încărcarea exterioară este dată de rezultanta forțelor care acționea paralel cu planul de alunecare (ΣT), iar rezistența structurii este exprima de rezultanta forțelor de frecare mobilizate ($f\ \Sigma N$), depinzînd de coefic entul de frecare beton-rocă (f) și de rezultanta forțelor normale pe supr fața de alunecare (ΣN). De această dată evaluarea probabilității de c dare se poate face prin intermediul raportului de alunecare $RA = f\Sigma$ $/\Sigma T$ [4] :

$$P_c = P(RA < 1) = \int_0^1 f_{RA}(X)\, \mathrm{d}X, \qquad (1$$

unde $f_{RA}(X)$ este densitatea de probabilitate a rapoartelor de aluneca

Încărcările exterioare luate în considerare sînt prezentate în figu 3*a*. Exprimarea analitică a funcției f_{RA} este extrem de dificilă, ea conține implicit variabilitatea nivelurilor amonte și aval, a subpresiunilor și coeficienților de frecare beton-rocă. Pentru evaluarea probabilităților cedare s-a recurs la o rezolvare numerică, în următoarele etape :

— definirea densităților de probabilitate a fiecăreia dintre varia lele independente X_i, pe baza măsurătorilor din natură în cazul debitelo coeficienților de frecare, respectiv pe baza unor calcule de infiltrații regim permanent, pe baza metodei elementelor finite, în cazul subpre unilor ;

— împărțirea domeniilor de existență a variabilelor X_i, în subint vale și caracterizarea fiecărui subinterval prin valoarea sa medie $(\bar{X}_i)_k$ prin probabilitatea de apariție a valorii medii $p_k(X_i)$;

— evaluarea rapoartelor de alunecare $RA = f\Sigma N\ \Sigma T$ pentru toate ombinaţiile posibile ale valorilor medii pe subintervale şi obţinerea unei opulaţii de rapoarte RA_j, fiecare fiind caracterizată de o probabilitate e apariţie $P_j = \pi_j p_{kj}(\bar{X})$;

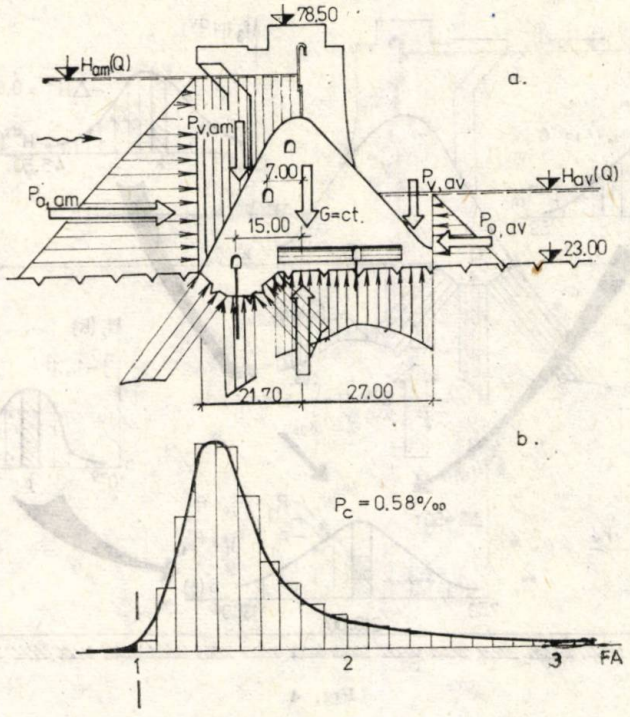


Fig. 3

— discretizarea domeniului de existenţă al rapoartelor RA în subinrvale egale $\Delta(RA)$ şi sortarea populaţiei RA_j în aceste clase;

— construirea histogramei rapoartelor RA prin asocierea fiecărui binterval $\Delta(RA)$ a unei ordonate $p(RA)$ egală cu suma probabilităţilor tale P_j a tuturor valorilor clasate în respectivul subinterval;

— definirea analitică a densităţii de probabilitate f_{RA} şi obţinerea in integrarea (8), efectuată numeric, a probabilităţii de cedare.

Procedeul expus a fost aplicat la analiza probabilităţii de cedare a rajului Porţile de Fier 1. Nivelurile amonte şi aval sînt dependente de bitul afluent prin intermediul cheilor de exploatare şi ca urmare curbele de nsitate de probabilitate ale nivelurilor s-au determinat din curba de nsitate de probabilitate a debitelor, cu o distribuţie normală caracterită de $\bar{Q} = 6500$ m³/s şi $\sigma = 0{,}04$ (fig. 3). Datorită defazajelor mari de ansmitere a variaţiei nivelurilor în zona din fundaţie, forţele de subpreme s-au determinat, prin intermediul modelului de calcul amintit, conlerînd ca variabile independente primare nivelurile amonte şi aval şi conctivităţile hidraulice. Pentru acestea din urmă s-a adoptat, pe baza elucrării măsurătorilor din teren, o distribuţie normală, caracterizată de

$\bar{k} = 8{,}56 \times 10^{-8}$m/s și $\sigma = 0{,}0613$. Pentru coeficienții de frecare beton-rocă s-a adoptat de asemenea o distribuție normală, cu valoarea medie $\bar{f} = 0{,}49$ și abaterea medie pătratică $\sigma = 0{,}051$, așa cum a rezultat din prelucrarea statistică a șirului de măsurători disponibile.

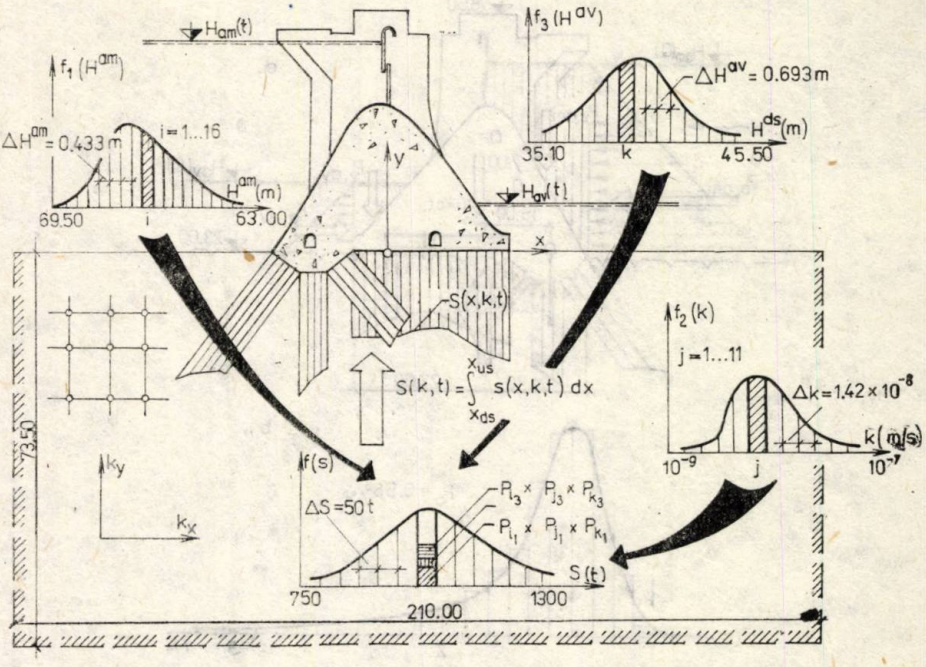


Fig. 4

Prin integrarea numerică (fig. 3*b*) probabilitatea de cedare rezultată a fost de $P_c = 5{,}8 \times 10^{-4}$, relativ ridicată comparativ cu alte tipuri de baraje, datorită neomogenității ridicate a terenului de fundare.

5. CRITERII DE PROIECTARE PE BAZE PROBABILISTE

În cazul abordărilor deterministe riscul de cedare este exclus, iar criteriul de decizie în alegerea variantelor optime este dat de costul de investiție minim ($I = \min$). În cazul abordărilor probabiliste riscul de cedare este o realitate obiectivă, iar măsura lui cantitativă este dată de probabilitatea de cedare. Ca urmare, apare necesar un nou criteriu de proiectare, care să asigure echilibrul rațional între economicitate, exprimată prin costul de investiție și siguranță, exprimată prin riscul de cedare și costul pagubelor asociate unui anumit mecanism de cedare. Acest criteriu este dat de minimizarea costului generalizat C_g:

$$C_g = I + \Sigma_i P_{c,i} C P_i = \min, \qquad (1$$

unde $P_{c,i}$ este probabilitatea de cedare în cazul mecanismului de cedare i, iar CP_i este costul pagubelor asociate, incluzînd și costul reparațiilor sau refacerii barajului.

Aplicarea acestui criteriu în cazul barajelor necesită unele adaptări, ținînd cont de faptul că valoarea pagubelor asociate este deosebit de mare comparativ cu costul de investiție [5]. Pentru o serie de variante de proiectare se determină costurile de investiție I și probabilitățile de cedare corespunzătoare P_c, obținînd o dependență indirectă $P_c = f(I)$. Costul pagubelor din aval CP se consideră a fi constante pentru toate variantele de proiectare analizate și ca urmare expresia costului generalizat devine:

$$C_g = I + CP \cdot f(I). \tag{10}$$

Prin minimizare ($\partial C_g / \partial I = 0$) se obține o dependență dintre pagube și investiție:

$$CP = -\frac{1}{f'(I)} \tag{11}$$

Dacă se acceptă că valoarea pagubelor din aval se exprimă ca un multiplu al costului de investiție ($CP = \alpha I$), atunci, pentru valorile estimate ale lui α, există o relație (11) de determinare a costului de investiție optim și deci a variantei de proiectare optime.

Acest criteriu de decizie s-a aplicat la proiectarea barajului omogen de anrocamente Oașa, de 91 m, construit pe rîul Sebeș [5]. În figura 5 este prezentată dependența dintre costul de investiție al soluțiilor cu $C_g = \min$ și raportul $\alpha = CP/I$. Linia întreruptă corespunde situației din fazele de proiectare preliminare, cînd parametrii prelucrării statistice a datelor privind cariera de anrocamente au indicat $\operatorname{tg}\bar{\varphi} = 0{,}81$ și $\sigma = 0{,}06$. Linia continuă corespunde situației finale, cînd neomogenitățile carierei au indicat o împrăștiere mai mare a valorilor unghiurilor de frecare interioară ($\operatorname{tg}\bar{\varphi} = 0{,}781$, $\sigma = 0{,}11$). Se observă că la creșterea raportului α peste 20 variantele optime nu mai diferă esențial și deci că selectarea profilului optim se poate face pentru valorile asimptotice corespunzătoare lui $\alpha \to \infty$. În cazul studiat a rezultat o înclinare a paramentului aval de 1 : 1,73 față de 1 : 1,6 inițial propusă.

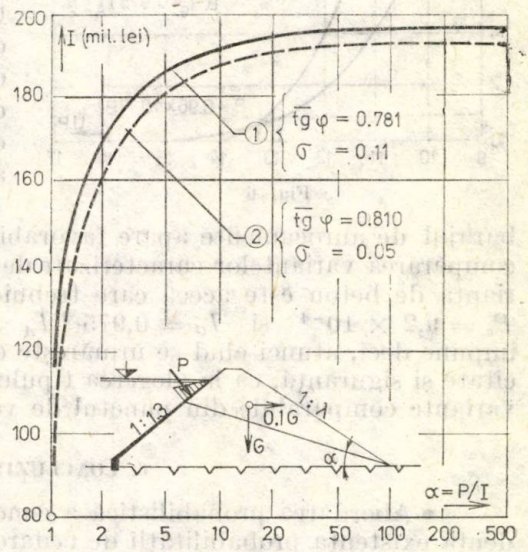


Fig. 5

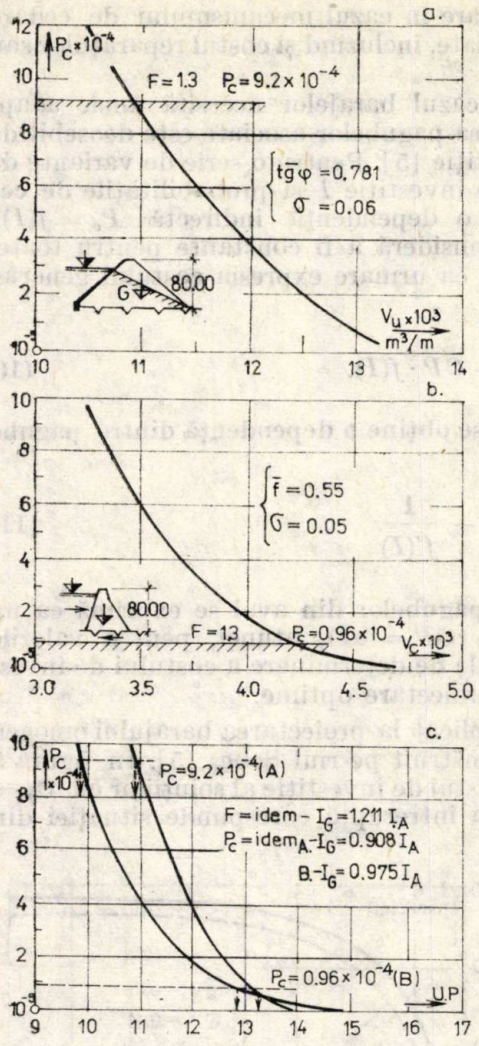


Fig. 6

Necesitatea unor noi criter de decizie asociate cu abordări probabiliste este și mai evident atunci cînd se pune problem alegerii tipului de baraj într-u amplasament în care sînt posibi mai multe soluții de barare [6]. Î cazul abordărilor deterministe proiectează fiecare tip de baraj acord cu coeficienții de siguranț specificați în norme și se aleg v riante care au costul de investiț minim. În acest mod însă, se con pară între ele variante cu prob bilități de cedare diferite, deci c nivele de siguranță diferite, den turînd chiar esența activității d proiectare.

Pentru a ilustra această i convenientă, s-a efectuat o an liză a siguranței pentru un bar omogen de anrocamente și unul d beton de greutate, selectate ca s luții posibile de barare într-un am plasament dat. Figura 6 arată d pendența dintre probabilitatea d cedare și volumul barajului pentr fiecare tip analizat. Admițînd, ip tetic, un raport egal cu 5 între co tul betonului și costul anrocame telor, în figura 6c este prezentat dependența probabilităților de c dare de costul de investiție al cel două tipuri de baraj. Se observ că dacă se face compararea var antelor caracterizate de acela coeficient de siguranță $F = 1$ barajul de anrocamente apare favorabil ($I_G = 1{,}211\ I_A$). Dacă se face îns compararea variantelor caracterizate de aceeași probabilitate de cedare, v rianta de beton este aceea care trebuie promovată ($I_G = 0{,}908\ I_A$ pentr $P_c = 9{,}2 \times 10^{-4}$ și $I_G = 0{,}975\ I_A$ pentru $P_c = 0{,}96 \times 10^{-4}$). S impune deci, atunci cînd se urmărește echilibrul rațional dintre econom citate și siguranță, ca la alegerea tipului de baraj să se compare între e variante comparabile din punctul de vedere al riscului implicat.

6. CONCLUZII

• Abordarea probabilistică a conceptului de siguranță pune în ev dență existența probabilității de cedare ca măsură cantitativă a riscul Analiza încărcărilor exterioare și a rezistențelor structurale și idealizare

or statistică permite determinarea probabilităţilor de cedare asociate cu numite tipuri de baraje în condiţiile unor mecanisme de cedare accep-ate.

• Proiectarea pe baze probabiliste a unui anumit tip de baraj im-une ca regulă de decizie la alegerea variantei optime minimizarea costu-ui generalizat. Se introduce astfel în mod explicit atît costul de investiţie it şi gradul de siguranţă şi costul pagubelor în caz de avarie. Algoritmul ropus permite aplicarea acestui criteriu şi în cazul marilor baraje, la are costul pagubelor din aval depăşeşte cu mult costurile de investiţie.

• Alegerea tipului de baraj în amplasamentele în care sînt posi-ile mai multe soluţii de barare este necesar să se facă prin compararea ostului de investiţie al variantelor cu acelaşi nivel de risc, pentru a asi-ura un echilibru raţional între siguranţă şi economicitate.

Primită la redacţie la 25 iunie 1984

BIBLIOGRAFIE

F. BORGES, N. CASTANHETA, *Structural Safety*, Lisabon, 1971.

S. IONESCU, *Contribuţii la analiza barajelor de anrocamente etanşate cu materiale nepămîntoase*, Teză de doctorat, ICB, 1976.

R. PRIŞCU, D. STEMATIU, C. STERE, *Asupra siguranţei barajului Rîuşor*, St. cerc. mec. apl., *2*, 41 (1982).

R. PRIŞCU, D. STEMATIU, C. STERE, I. BICHEA, *Siguranţa la alunecare a barajelor de greutate fluviale*. Hidrotehnica, *1*, 1983.

R. PRIŞCU, S. IONESCU, D. STEMATIU, *Safety and Risk Analysis for two Large Rockfill Dams in Romania*, ICOLD Congres, Q 52, R 17, Rio de Janeiro, 1982.

R. PRIŞCU, D. STEMATIU, *Some Design Criteria for Large Dams on the Basis of Probabilistic Concept of Safety*, Proc. of Int. Conf. on Safety of Dams (L. Serafim ed.), Coimbra, 1984.

CERCETĂRI EXPERIMENTALE ASUPRA CURGERII FLUIDELOR BIFAZICE ÎN CONDUCTE VERTICALE CU APLICARE LA INSTALAȚII DE GAZ LIFT

de JULIETA FLOREA, GHEORGHE BĂRAN
Institutul Politehnic, București

Se studiază experimental curgerea într-o conductă verticală a unui amestec de aer-apă, curgere datorată injecției de aer. Se determină curbele debit de lichid antrenat-debit de gaz în funcție de sistemul de injecție și cota de imersie a conductei. Rezultatele experimentale arată existența unui prag de amorsare și saturație a curgerii.

1. INTRODUCERE

Extinderea domeniului de aplicare a dinamicii fluidelor polifazat în noile tehnologii de conversie a energiei, în poluare, transport hidrauli și pneumatic etc. formulează noi probleme științifice și tehnice a căro rezolvare necesită atît cercetări teoretice, cît și experimentale. De exemplu studiul curgerii amestecurilor lichid-gaz în conducte verticale este finali zat în calculul diferenței de presiune necesară transportului [8], rezul tat util în cazul conductelor lungi. Aplicațiile acestui tip de curgere î industrie sînt numeroase și diverse [4], [5], [7] și dimensionarea insta lațiilor respective se efectuează pe baza unor formule empirice.

Bazele studiului teoretic al curgerii menționate sînt formulate ș în teza de doctorat a acad. D. Dumitrescu, [1], ale cărei rezultate princi pale sînt prezentate în detaliu în [2], [3].

Ulterior, sub conducerea sa, se dezvoltă în cadrul Catedrei de Hidra ulică și Mașini hidraulice din I. P. B. cercetări cu caracter aplicativ pri vind transportul hidraulic sub presiune al materialelor solide (minereur nisip cuarțos), procesele de aerare etc. Recent, teze de doctorat elabo rate sub conducerea sa [6], [9], completează cercetările din domeniil menționate cu cercetări aplicative în noile tehnologii de conversie a energie

În condițiile specifice țării noastre, proiectarea și funcționarea ins talațiilor de gaz-lift necesare în tehnologiile de epurare și de conversie energiei au necesitat rezolvarea unor probleme tehnico-științifice, a căro soluționare nu era posibilă pe baza datelor publicate [4], [5], [7], [8 deoarece calculul și dimensionarea lor se bazează pe relații semiempirice care exprimă dependența între debitul de gaz, debitul de lichid și gabaritel pe verticală ale instalației.

Cercetările de laborator efectuate asupra curgerii bifazice în con ducte verticale cu aplicare la funcționarea unui gaz-lift, au urmărit veri ficarea relațiilor de calcul publicate, analiza diverselor sisteme de injecți a eficienței acestora și influența diametrului conductei de refulare asupr debitului de lichid.

2. INSTALAȚIA EXPERIMENTALĂ

Schița instalației experimentale este prezentată în figura 1. Pen tru injecția aerului s-au utilizat următoarele sisteme (fig. 2):

— ștuțuri cu diametru interior de 4 și 6 mm,

— serpentină cu 8 găuri echidistante Ø 2 mm,
— con cu admisia descendentă a aerului.

Pentru studiul influenței diametrului conductei de refulare s-au efectuat măsurători pentru două diametre și anume, Ø 57 mm și Ø 100 mm. Ansamblul instalației experimentale este prezentat în figura 3.

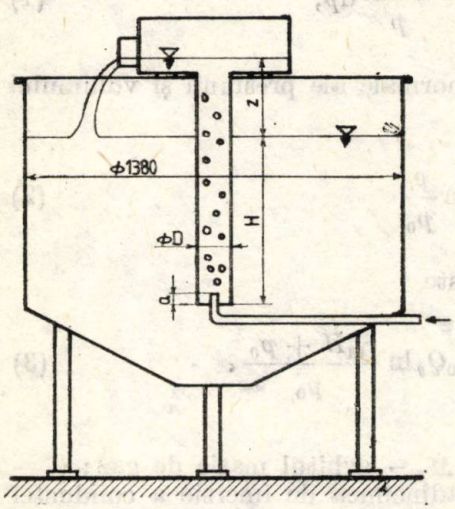


Fig. 1. — Schița instalației experimentale.

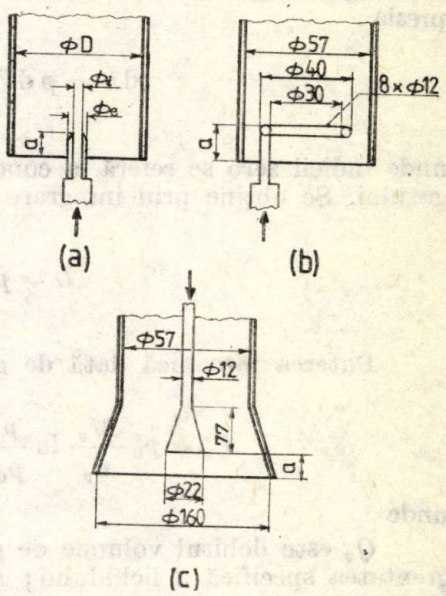


Fig. 2. — Sisteme de injecție a aerului; *a*) ștuț; *b*) serpentină; *c*) con.

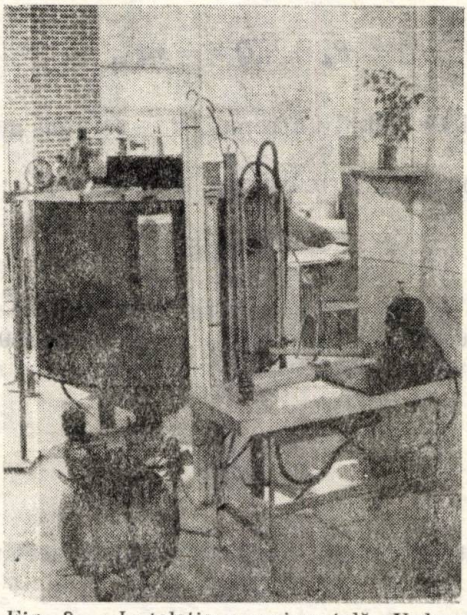


Fig. 3. — Instalația experimentală. Vedere generală.

3. BAZELE TEORETICE DE CALCUL ALE INSTALAȚIILOR DE GAZ-LIFT

Se adoptă ipoteza că energia necesară funcționării este furnizată de lucrul mecanic produs prin destinderea gazului în conducta gaz-liftului. Considerînd destinderea izotermă, lucrul mecanic elementar are expresia :

$$\mathrm{d}L = p\,\mathrm{d}V = -\frac{p_0 V_0}{p}\,\mathrm{d}p, \tag{1}$$

unde indicii zero se referă la condiții normale ale presiunii și volumului gazului. Se obține prin integrare :

$$L = p_0 V_0 \ln \frac{p}{p_0}. \tag{2}$$

Puterea mecanică dată de gaz este

$$P_g = p_0 \frac{\dot{M}_g}{\varphi_g} \ln \frac{p}{p_0} = p_0 Q_g \ln \frac{\gamma_1 H + p_0}{p_0}, \tag{3}$$

unde

Q_g este debitul volumic de gaz ; $\dot{M}_g$ — debitul masic de gaz ; γ_1 — greutatea specifică a lichidului ; H — adîncimea de imersie a conductei (fig. 1).

Puterea hidraulică primită de lichid va fi :

$$P_h = \gamma_1 Q_1 z = \eta P_g, \tag{4}$$

unde

Q_1 este debitul de lichid antrenat ; z — sarcina gaz-liftului (fig. 1) ; η — randamentul.

Pentru η se propune următoarea structură [7] :

$$\eta = \eta_h \eta_s. \tag{5}$$

În relația (5), η_h este randamentul hidraulic, determinat de pierderile de presiune și estimat la valoarea $\eta_h = 0{,}95 \div 0{,}98$; η_s este randamentul de antrenare a lichidului de către gaz, definit de Pickert [7] prin relația

$$\eta_s = \frac{c_1}{c_g}, \tag{6}$$

unde c_1 și c_g sînt vitezele medii ale lichidului, respectiv ale gazului.

Pentru

$$\varepsilon = H/z = 1 \div 3 ; \qquad \eta_s = 0{,}41 \div 0{,}45, \tag{7}$$

Presupunînd cunoscută valoarea randamentului, din relaţia (4), în ipoteza densităţii constante a gazului se obţine :

$$Q_g = \frac{\gamma_1}{\eta p_0} \frac{z}{\ln\left(1 + \frac{\gamma_1}{p_0} H\right)} Q_1. \tag{7}$$

Se constată că raportul Q_g/Q_1 depinde de soluţia constructivă de injecţie a gazului şi de diametrul conductei prin η_s; dependenţa $\eta_s = \eta_s(d, D, \ldots,)$ nu este publicată [5], [7].

3. DIMENSIONAREA INSTALAŢIILOR DE GAZ-LIFT

Relaţiile de calcul publicate [4], [5] sînt bazate pe ipoteza prezentată în paragraful 2 şi au forme similare relaţiei (7). Astfel, pentru înălţimi de pompare a apei de 6 ÷ 30 m, în [5] se recomandă valorile $H/(H + z) = 0{,}65 \div 0{,}7$; pentru conducte cu diametrul Ø 100 mm şi $L = H + z = 42$ m, în [7] se propune $H/z = 1 \div 3$. Pentru gaz-lifturi utilizate în hidromecanizare (extragerea nisipurilor sau pietrişului de la adîncimi mari), $H/(H + z) = 0{,}66 \div 0{,}33$ şi $z = 15 \div 150$ m, [4].

Volumul de aer necesar ridicării a 1 m³ de apă (la presiune atmosferică), se calculează cu relaţia [4] :

$$V = \frac{z}{23\xi \lg \frac{(z(K-1)+10)}{10}}, \tag{8}$$

coeficienţii ξ $K = (H + z)/z$ sînt stabiliţi experimental; în practică se recomandă $K = 2 \div 3$. Debitul de aer necesar antrenării debitului de apă va fi :

$$Q_g = \frac{z}{23\,\xi \lg \frac{H+10}{10}} Q_1. \tag{9}$$

Pentru gaz-lifturi utilizate în industria chimică [5], se utilizează relaţia :

$$V = \frac{1{,}75z}{c \lg \frac{H+10}{10}}, \tag{8'}$$

unde coeficientul c se determină experimental.

Dependenţa între debitul de gaz şi cel de lichid are forma (pentru $\rho_g = \text{const.}$) :

$$Q_g = \frac{1{,}75z}{c \lg \frac{H+10}{10}} Q_1. \tag{10}$$

Notînd cu Q'_g și Q''_g debitele de gaz calculate cu relațiile (9) și (10), rezultă :

$$Q''_g/Q'_g = 40{,}25\frac{\xi}{c}$$

cu notația $\varepsilon = H/z$ se obține : $K = 1 + \varepsilon$ și $\alpha = H/(H + z) = \varepsilon/(1 + \varepsilon)$. Dacă $\varepsilon = 1$, atunci $K = 2$, $\alpha = 0{,}5$, $c = 11{,}5$, [5], $\xi = 0{,}5$ [4] și $Q''_g/Q'_g = 1{,}75$; pentru $\varepsilon = 2$, $Q''_g/Q'_g = 1{,}75$.

Deci debitul de gaz calculat cu relația (10) este de circa două ori mai mare decît debitul calculat cu relația (9).

Considerînd în (7) $P_0/\gamma_1 \cong 10$ m, se obține :

$$Q_g = \frac{1}{10\eta}\,\frac{z}{\ln\dfrac{H+10}{10}}\,Q_1 \cong \frac{1}{23\eta}\,\frac{z}{\lg(H+10)/10}\,Q_1,$$

adică relația (9), unde $\xi = \eta$. S-a justificat astfel deducerea formulelor empirice (9) și (10) prezentate în [4] și [5].

Pentru dimensionarea instalațiilor se recomandă :

— viteze medii ale lichidului $c_1 = 2$ m/s [7] ;
— viteze medii în camera de amestec gaz-lichid 2,7 m/s [5] ;
— viteza gazului la admisia în conductă 7 m/s [5] ;
— viteza medie a gazului în conducta de refulare, $c_g = c_1/\eta_s$ [7] ;
— aplicarea ecuației de continuitate pentru determinarea diametrului conductei de refulare :

$$\frac{\pi D^2}{4} = \frac{\dot{M}_1}{c_1\rho_1} + \frac{\dot{M}_g}{c_g\rho_g}, \tag{11}$$

unde $\dot{M}$ reprezintă debitele masice ; $c_1 \approx 2$ m/s și $c_g = c_1/\eta_s$.

Pentru anumite domenii de utilizare, gaz-lifturile sînt standardizate ca de exemplu aer-lifturile din hidromecanizare [4].

Pentru acestea, la D/d practic constant ($D/d \approx 2$), $Q_g/Q_1 = 4$ pentru $H/z = 1$ și $Q_g/Q_1 = 3$ pentru $H/z = 2$.

Principalele soluții constructive ale instalațiilor de gaz-lift și ale sistemului de injecție publicate sînt informative, iar detalii privind admisia gazului nu sînt prezentate [4], [5], [7].

5. DIMENSIONAREA INSTALAȚIEI EXPERIMENTALE

Dimensionarea instalației experimentale s-a efectuat ținînd seama de echipamentele și aparatura disponibilă. Datele de bază sînt următoarele :

— debitul de aer disponibil 3,6 m³/h,
— rotametrul de măsură al debitului de aer 0 ÷ 2,5 m³/h,
— rezervorul de alimentare al gaz-liftului de formă cilindrică cu Ø 1380 mm și con la partea inferioară ; înălțimea părții cilindrice este de 865 mm.

Pentru calculul conductei de gaz-lift se utilizează ecuația de continuitate (11); cu aproximația $\rho_g = \text{const}$ și $c_1 = \eta_s c_g$ se obține :

$$\frac{\pi D^2}{4} = \frac{Q_g}{c_1}\left(\frac{Q_1}{Q_g} + \eta_s\right).$$

Considerînd $c_1 \approx 2\text{m/s}$, $\eta_s \approx 0{,}5$, $q = Q_1/Q_g \simeq 2$ și $Q_g \leqslant 2\ m^3/h$, rezultă :

$$D = \sqrt{\frac{6}{\pi} Q_g} = 32{,}5\ \text{mm}.$$

Pentru sistemul de injecție cu con, diametrul țevii de alimentare este $\varnothing = 18$ mm; la aceeași rază hidraulică corespunde un diamaetru al conductei $D = 50{,}5$ mm; s-a ales $D = 57$ mm.

Cota $H + z$ maximă este limitată la valoarea $H + z = 1\,200$ mm.

Pentru o viteză de injecție a aerului de 7 m/s, la un debit de 2 m³/h, se obține diametrul duzei $d = 10$ mm. Se alege $d = 6$ mm pentru asigurarea vitezei respective și la debite mai mici.

6. REZULTATE EXPERIMENTALE

Cercetările experimentale efectuate în laborator au urmărit verificarea relațiilor de calcul a debitelor de gaz (9) și (10), studiul comparativ al eficienței diverselor sisteme de injecție a aerului, precum și influența diametrului conductei asupra eficienței.

6.1. INFLUENȚA SARCINII z ASUPRA DEBITULUI DE LICHID

Măsurătorile s-au efectuat pentru un aer-lift cu diametrul conductei $D = 57$ mm, aerul fiind injectat printr-un știuț cu diametrul interior $\varnothing = 6$ mm, diametrul exterior $\varnothing = 11$ mm, montat la cota $a = 0$ (fig. 2). Rezultatele măsurătorilor sînt prezentate în figura 4. Se constată existența a două valori limită ale debitului de aer, notate Q_g^0 și Q_g^m cu următoarea semnificație fizică : pentru $Q_g \leqslant Q_g^0$ gaz-liftul nu funcționează; pentru $Q_g \geqslant Q_g^m$ debitul de apă vehiculat practic nu mai crește (curbele $Q_1 = f(Q_g)$ au un prag de saturație).

Valorile calculate cu relațiile (9) și (10) sînt diferite de cele măsurate, diferența fiind mai mare la debite de aer mai mari.

6.2. STUDIUL COMPARATIV AL SISTEMELOR DE INJECȚIE

S-au încercat trei sisteme de injecție : știuț, serpentină și con (fig. 2); rezultatele măsurătorilor sînt prezentate în figura 5. Avantajul net al injecției prin con se explică astfel :

— dispersie uniformă a aerului pe întreaga secțiune ;

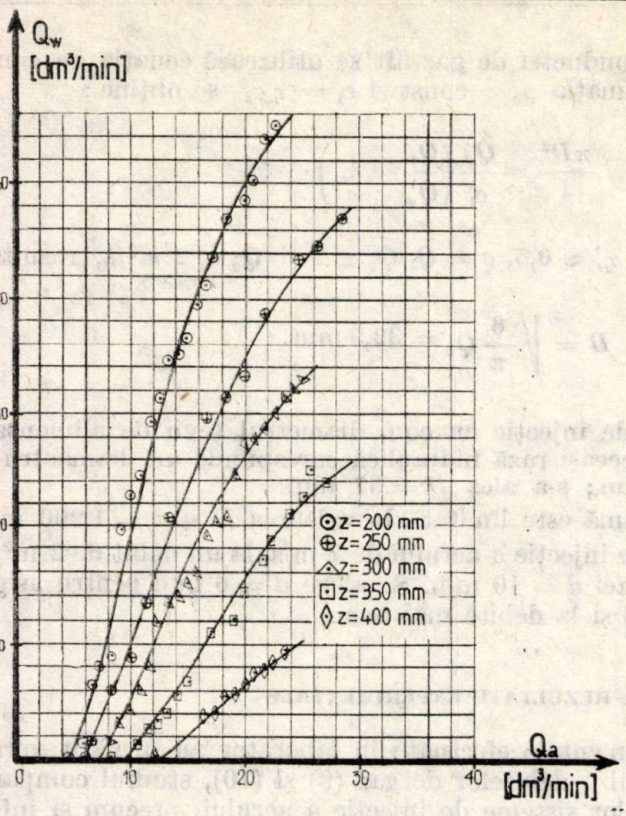


Fig. 4. — Influența sarcinii z asupra debitului de apă.

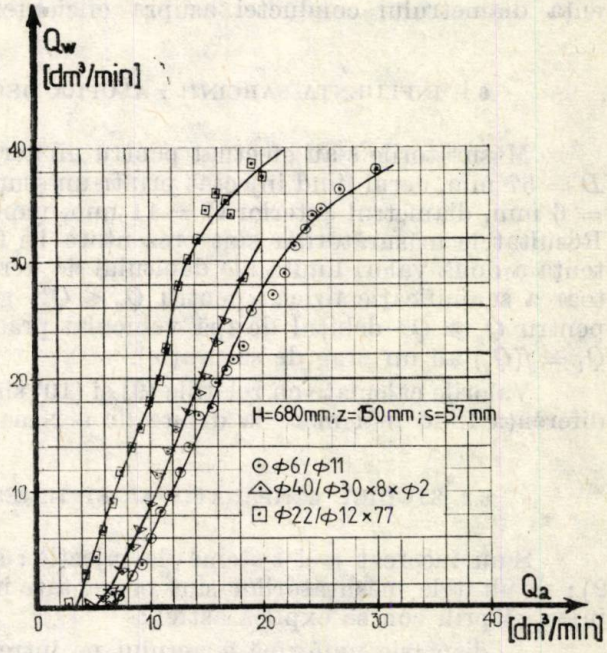


Fig. 5. — Influența sistemului de injecție asupra debitului de apă: ⊙ ștuț Ø6/Ø 11 mm; ▽ serpentină Ø40/Ø 30 cu 8 găuri de Ø 2 mm; ⊡ con: Ø22/Ø 12×77 mm.

— micşorarea secţiunii de curgere a amestecului bifazic, datorită prezenţei tubului de alimentare cu aer.

(Cu privire la influenţa secţiunii de curgere asupra debitului de lichid se revine în § 6.4).

6.3. INFLUENŢA DIAMETRULUI ŞTUŢULUI DE INJECŢIE ŞI AL COTEI DE MONTAJ

S-a determinat influenţa diametrului ştuţului de injecţie utilizînd două variante : Ø 4/Ø 10 mm şi Ø 6/Ø 11 mm montate la cota $a=0$. Micşorarea diametrului de injecţie a aerului de la 6 la 4 mm conduce la creşterea cu circa $1 \div 5\%$ a debitului de apă ; valorile mai mari corespund la debite de injecţie mai mari (fig. 6).

Pentru a evalua ponderea cotei de montaj, s-au studiat două variante de montaj a ştuţului Ø 6/Ø 11 mm şi anume $a = 0$ şi $a = 24$. Curbele $Q_{apă} = f(Q_{aer})$ la $H + z = \text{const}$ indică un debit mai mare de apă la acelaşi debit de aer în cazul montajului la $a = 0$. Rezultatul se explică prin efectul de antrenare al lichidului de către jetul de aer, efect distinct de principiul de funcţionare al gaz-liftului.

6.4. INFLUENŢA DIAMETRULUI CONDUCTEI DE REFULARE

Datele publicate privind aer-lifturile utilizate în hidromecanizare [4] indică raportul $D/d \approx 2$. Din ecuaţia de continuitate, considerînd $\rho_g = \text{const}$ s-a obţinut $D = 50$ mm. Mărind diametrul la $D = 100$ mm, dependenţa $Q_{apă} = f(Q_{aer})$ la $z = \text{const}$ este obţinută pentru $z = \text{const}$ (fig. 7). Reducerea debitului de apă antrenat se justifică în acest caz prin micşorarea celor două forţe care determină funcţionarea gaz-liftului :

— forţa de presiune, rezultată din diferenţa de greutate specifică între amestec şi lichid ; această diferenţă se poate exprima într-o primă aproximaţie prin relaţia

$$\gamma_{am} - \gamma_1 \sim g \frac{\rho_1 - \rho_g}{1 + c_1/c_g} \simeq \frac{C_1}{1 + C_2 D^2},$$

unde C_1 şi C_2 sînt constante pentru un debit de gaz fixat, γ_{am} — greutatea specifică a amestecului ;

— forţa de antrenare a bulelor estimată prin randamentul de antrenare η_s ; acesta are valori mai mari dacă diferenţa $c_g - c_1$ scade ; la acelaşi debit de gaz, viteza lichidului este mai mică în conducte cu diametru mai mare.

6.5. CONDIŢII OPTIME DE FUNCŢIONARE

Evaluînd eficienţa instalaţiei prin raportul $q = Q_{apă}/Q_{aer}$ în practică prezintă interes valorile maxime ale eficienţei. Influenţa sistemului de injecţie şi a cotei de montaj asupra acestui raport în funcţie de $(H + z)/z$

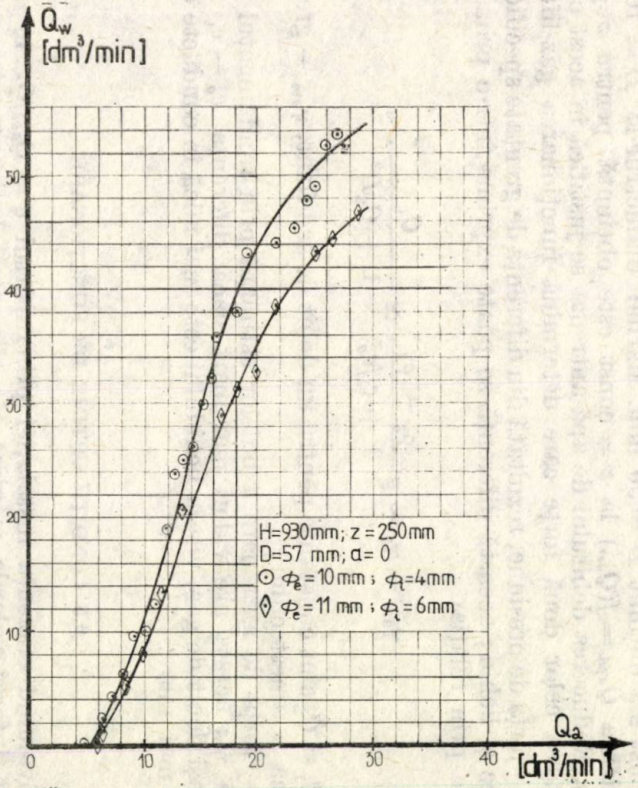


Fig. 6. — Influența diametrului ștuțului de injecție asupra debitului de apă: ⊙ Ø 4/Ø 10 mm; ◈ Ø 6/Ø 11 mm.

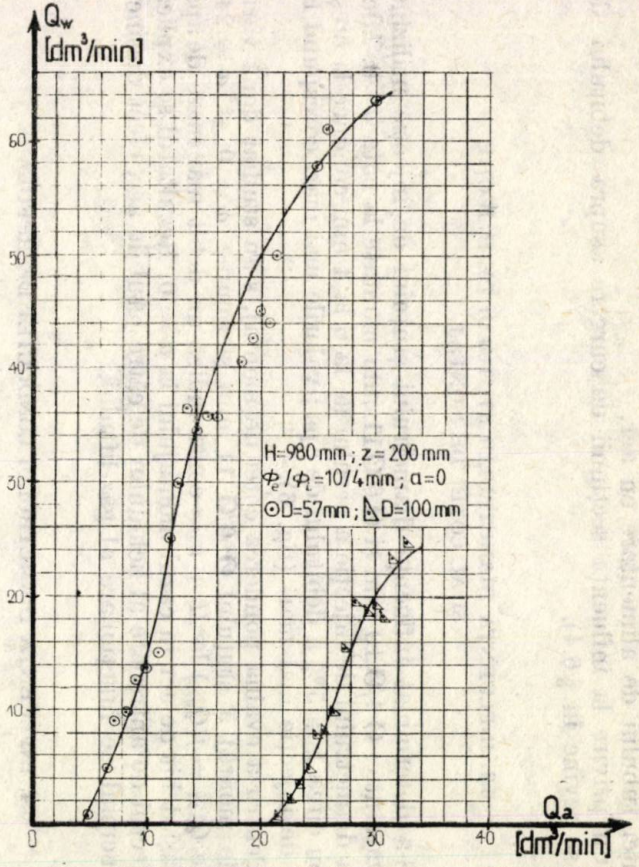
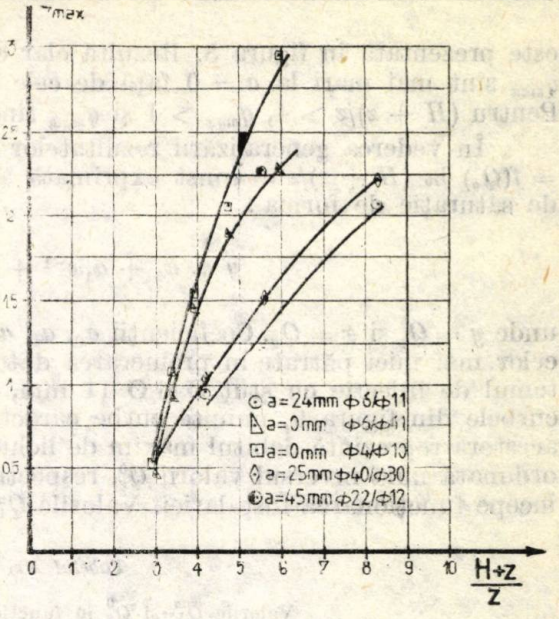


Fig. 7. — Influența diametrului conductei *D* asupra debitului de apă.

Fig. 8. — Dependența între $q_{max} = Q_t/Q_g$ și $(H + z)/z$.



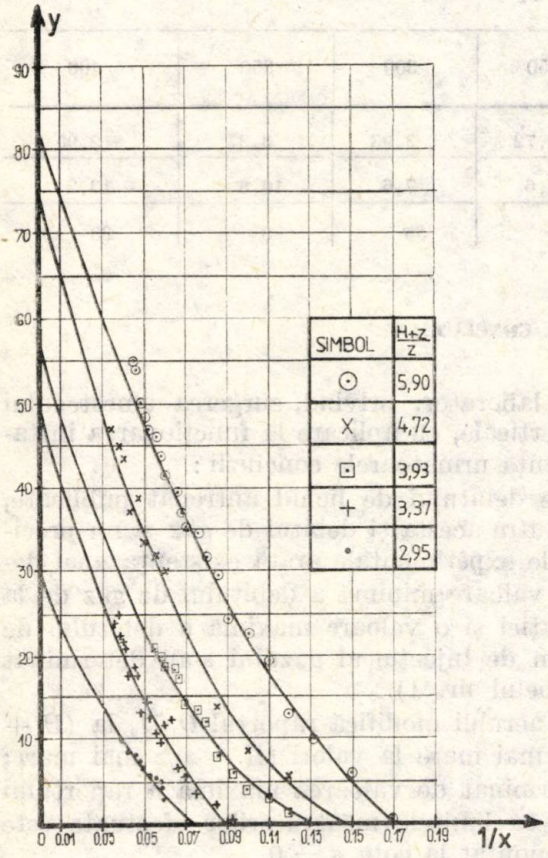


Fig. 9. — Curbe caracteristice ale instalației.

este prezentată în figura 8. Rezultă clar că la injecția prin știuț valorile q_{max} sînt mai mari la $a = 0$ față de cele corespunzătoare cotei $a = 24$. Pentru $(H + z)/z > 4$, $q_{max} > 1$ și q_{max} tinde la o valoare de saturație.

În vederea generalizării rezultatelor se consideră dependența $Q_l = f(Q_g)$ la $(H + z)/z = \text{const}$ exprimată analitic printr-o curbă cu prag de saturație de forma:

$$y = a_0 + a_1 x^{-1} + a_2 x^{-2}, \tag{12}$$

unde $y = Q_l$ și $x = Q_g$. Coeficienții a_0, a_1, a_2 se estimează aplicînd metoda celor mai mici pătrate în prelucrarea datelor experimentale. Pentru sistemul de injecție cu știuț Ø 6/Ø 11 mm, montat la $a = 0$ s-au obținut curbele din figura 9, numite curbe caracteristice; ordonata la origine a acestora reprezintă debitul maxim de lichid antrenant Q_l^m, iar punctele de ordonată nulă inversul valorii Q_g^0, respectiv a debitului de aer de la care începe funcționarea instalației. Valorile Q_l^m și Q_g^0 sînt date în tabelul 1.

Tabelul Nr. 1

Valorile Q_l^m și Q_g^0 în funcție de cota z

z (mm)	200	250	300	350	400
$(H + z)/z$	5,90	4,72	3,93	3,37	2,95
Q_g^0 (dm³/min)	5,8	6,6	7,6	10,6	13,2
Q_l^m (dm³/min)	82	75	56	50	30

7. CONCLUZII

Studiul experimental, în laborator, privind curgerea amestecului apă-aer în conducte circulare verticale, cu aplicare la funcționarea instalațiilor de gaz-lift pune în evidență următoarele concluzii:

— formulele de calcul ale debitului de lichid antrenat publicate, presupun o dependență liniară între acesta și debitul de gaz și nu precizează limitele de aplicare. Datele experimentale arată existența unei dependențe caracterizate printr-o valoare minimă a debitului de gaz de la care începe funcționarea instalației și o valoare maximă a debitului de apă antrenat; pentru un sistem de injecție al gazului s-au determinat aceste valori caracteristice (tabelul nr. 1).

— sistemul de injecție al aerului modifică raportul Q_l/Q_g la $(H + z)/z = \text{const}$, ponderea fiind mai mare la valori $(H + z)/z$ mai mari; sistemul optim de injecție determinat de valoarea maximă a raportului $q = Q_l/Q_g$ la $(H + z)/z = \text{const}$ în limitele măsurătorilor efectuate este sistemul cu știuț Ø 4/Ø 10 mm montat la cota $a = 0$.

— diametrul conductei de refulare calculat din ecuaţia de continuitate cu valorile vitezei medii $c_1 \approx 2$ m/s şi ale randamentului de antrenare $\eta_s \approx 0{,}4 \div 0{,}5$ asigură funcţionarea corespunzătoare a instalaţiei; la diametre mai mari parametrul q are valori inacceptabile tehnic şi economic.

Primită la redacţie la 30 iunie 1984

BIBLIOGRAFIE

1. D. DUMITRESCU, ZAMM, **23** (1943).
2. JULIETA FLOREA, V. PANAITESCU, GH. BĂRAN. *Mecanica fluidelor*, Edit. IPB, Bucureşti, 1984.
3. D. GHERMANI, *Hidraulica teoretică şi aplicată*, V. II, PI, Bucureşti, 1945.
4. P. GHINESCU, M. SOLOMON. *Hidromecanizarea în construcţii*. Edit. tehnică, Bucureşti, 1969.
5. A. G. KASATKIN, *Osnovie profest i aparati himiceskoi tehnologhii*, Goshimizdat, Moskva, 1960.
6. E. POPESCU, *Contribuţii la studiul teoretic şi experimental al mişcării cu simetrie axială a fluidelor polifazate* Teză, de doctorat. I.P.B., 1984.
7. H. SCHULTZ, *Die Pumpen*, Springer Verlag, Berlin, 1977.
8. L. V. STREET ER, *Handbook of fluid dynamics*, McGraw Hill, New York, 1961.
9. A. ZAHARIA, *Contribuţii la teoria curgerii fluidelor bifazice la numere Reynolds mici cu aplicaţii la staţii de epurare*, Teză de doctorat, I.P.B., 1984.

CONSIDERAȚII ASUPRA CALCULULUI HIDRAULIC AL CONDUCTELOR CU DEBIT VARIABIL PE PARCURS

de IOAN DAVID

Institutul Politehnic „Traian Vuia", Timișoara

În lucrare se prezintă un model de calcul perfecționat pentru evaluarea diferențelor energetice și piezometrice la conductele cu debit variabil, prin introducerea efectelor hidrodinamice secundare de ramificație în dreptul prizelor. Aplicațiile considerate, inclusiv pentru o aripă de ploaie, au pus în evidență diferențe semnificative dintre formulele actuale și cele propuse.

1. CONSIDERAȚII GENERALE

Deși, aparent, evaluarea distribuției energiei mecanice, a liniei piezometrice, respectiv a diferențelor de energie între secțiunile de flux de la extremitățile unei conducte cu debit variabil, pare a fi o problemă hidraulică simplă, ea nu și-a găsit încă o soluție pe deplin corectă, bazată pe aplicarea riguroasă a ecuațiilor generale de transfer a energiei și impulsului. În literatura de specialitate hidraulică curentă [1], [2], [3], [4], problema hidraulicii conductelor cu debit variabil este abordată pe baza unor modele de calcul simplificate. Acestea se bazează fie pe scrierea pierderilor de sarcină liniare în ipoteza idealizată a unui debit de consum continuu și uniform distribuit în lungul conductei și integrarea acestor pierderi, pe toată lungimea conductei, fie considerîndu-se un consum discret prin intermediul a n prize și însumarea pierderilor de sarcină pe tronsoanele situate între aceste prize.

Modele de calcul mai perfecționate [5], [6], [7], [8] iau în considerare efectul hidrodinamic complet, în ipoteza unui debit de consum uniform și continuu distribuit. În [9] se ține seama de variația debitului la prize în lungul aripei de ploaie, neluîndu-se însă în considerare efectele hidrodinamice de ramificație.

În cadrul lucrării de față se propune un model de calcul mai complet, considerîndu-se distribuția reală, discretă a debitului de consum și luîndu-se în considerare pe lîngă pierderile de sarcină pe tronsoanele dintre prize, și efectele hidrodinamice suplimentare de ramificație care apar în zonele celor n prize laterale.

În condițiile simplificate ale unor prize egal distanțate, cu același debit de consum și coeficient de rezistență constant în lungul conductei, se obține o formulă de calcul perfecționată față de cele existente din literatură. Pentru $n \to \infty$ se obțin formulele corespunzătoare ipotezei unei distribuții uniforme și continue din [6], [7] și [8].

2. STABILIREA EXPRESIEI GENERALE A DIFERENȚEI ENERGETICE ȘI PIEZOMETRICE

Se consideră un tronson de conductă de lungime l și diametru D pe care sînt amplasate un număr de n prize situate la distanțele a_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ (în particular $a_i = a = l/(n-1)$), avînd debitul de consum la priză de Q_{*i}, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ (fig. 1 *a*).

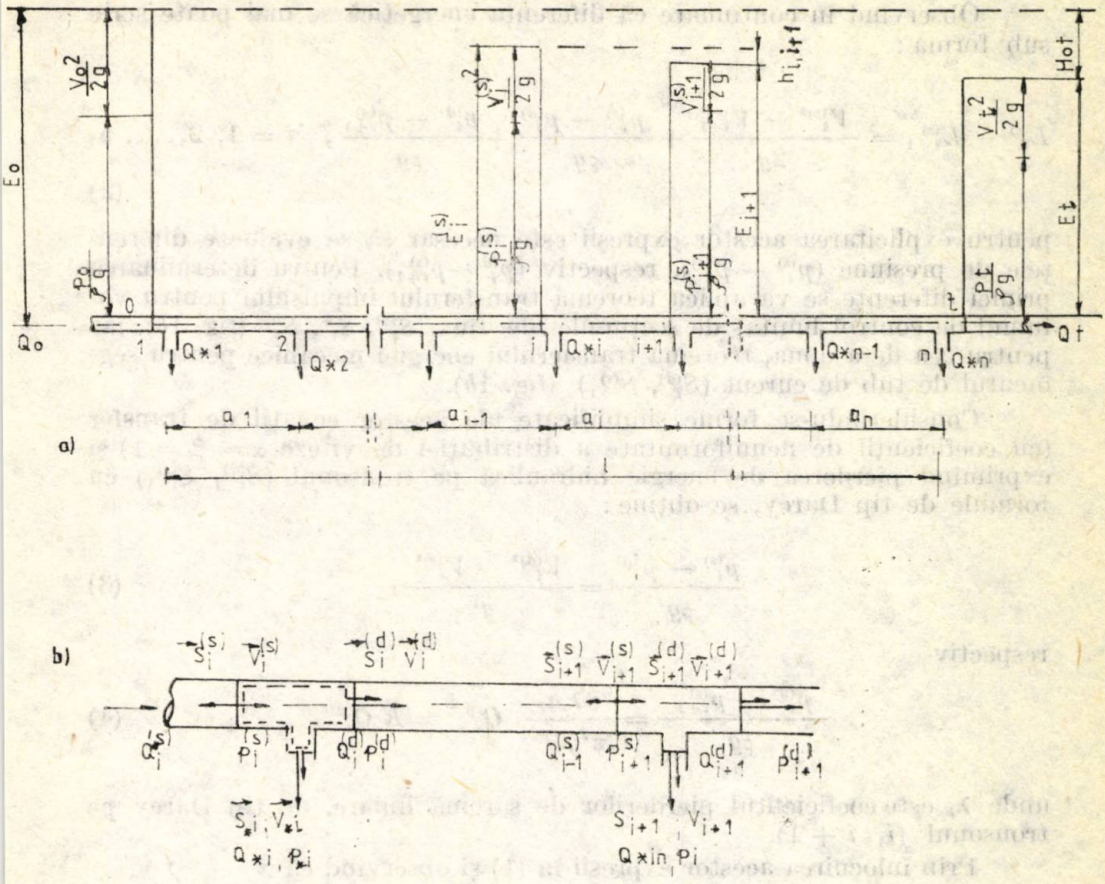


Fig. 1. — Schemă de calcul a conductei cu debit variabil: *a*) — schema generală; *b*) — detaliu cu elementele caracteristice volumului de control.

Pentru evaluarea diferenței energiilor specifice între secțiunile de flux de intrare (S_0) și de ieșire (S_t), se vor însuma diferențele de energie (specifice) pe tronsoanele ($S_i^{(s)}$, $S_{i+1}^{(s)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$(fig. 1*b*):

$$H_{0t} = E_0 - E_t = \sum_{i=1}^{n} (E_i^{(s)} - E_{i+1}^{(s)}) = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{v_i^{(s)2}}{2g} + \frac{p_i^{(s)}}{\rho g} \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{v_{i+1}^{(s)2}}{2g} + \frac{p_{i+1}^{(s)}}{\rho g} \right) \right], \qquad (1)$$

cu convenția că

$$E_1^{(s)} = E_0; \quad E_{n+1}^{(s)} = E_t, \quad V_{n+1}^{(s)} = V_n^{(d)}, \quad p_{n+1}^{(s)} = p_n^{(d)} = p_t.$$

Observînd în continuare că diferența energetică se mai poate scrie sub forma :

$$E_i^{(s)} - E_{i+1}^{(s)} = \frac{V_i^{(s)2} - V_{i+1}^{(s)2}}{2g} + \frac{p_i^{(s)} - p_i^{(d)}}{\rho g} + \frac{p_i^{(d)} - p_{i+1}^{(s)}}{\rho g}; \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

pentru explicitarea acestor expresii este necesar să se evalueze diferențele de presiune $(p_i^{(s)} - p_i^{(d)})$, respectiv $(p_i^{(d)} - p_{i+1}^{(s)})$. Pentru determinarea primei diferențe se va aplica teorema transferului impulsului pentru volumul de control limitat de secțiunile de flux $S_i^{(s)}$, S_i^*, $S_i^{(d)}$ (fig. 1*b*), iar pentru cea de a doua, teorema transferului energiei mecanice pentru segmentul de tub de curent $(S_i^{(d)}, S_{i+1}^{(s)})$ (fig. 1*b*).

Considerîndu-se forme simplificate ale acestor ecuații de transfer (cu coeficienții de neuniformitate a distribuției de viteze $\alpha = \beta = 1$) și exprimînd pierderea de energie hidraulică pe tronsonul $(S_i^{(d)}, S_{i+1}^{(s)})$ cu formule de tip Darcy, se obține :

$$\frac{p_i^{(s)} - p_i^{(d)}}{\rho g} = \frac{V_i^{(d)2} - V_i^{(s)2}}{g}, \tag{3}$$

respectiv

$$\frac{p_i^{(d)} - p_{i+1}^{(s)}}{\rho g} = \frac{8\lambda_i a_i}{\pi^2 g D^5} Q_i^{(d)2} = K_i Q_i^{(d)2}, \tag{4}$$

unde λ_i este coeficientul pierderilor de sarcină liniare, de tip Darcy pe tronsonul $(i, i+1)$.

Prin înlocuirea acestor expresii în (1) și observînd că

$$V_i^{(d)} = V_{i+1}^{(s)}, \; V_1^{(s)} = V_0, \; V_n^{(d)} = V_t,$$

rezultă

$$H_{0t} = \frac{V_t^2 - V_0^2}{2g} + \sum_{i=1}^{n-1} K_i Q_i^{(d)2}. \tag{5}$$

Observînd în continuare că

$$V_t = \frac{Q_0 - \sum_{i=1}^{n} Q_{*i}}{\pi D^2/4}; \quad V_0^2 = \frac{Q_0^2}{\pi D^2/4}, \tag{6}$$

(5) devine :

$$H_{0t} = \sum_{i=1}^{n-1} K_i Q_i^{(d)} + \frac{8}{\pi^2 g D^4}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} Q_{*i}\right)^2 - 2Q_0 \sum_{i=1}^{n} Q_{*i}\right]. \tag{7}$$

Relația obținută reprezintă o generalizare a expresiilor cunoscute pentru evaluarea diferenței energetice între secțiunile de flux de intrare și ieșire ale unei conducte cu debit de consum distribuit la n prize, care ține seama și de efectele hidrodinamice de ramificație în dreptul prizelor.

Cosiderînd în continuare tronsoane de aceeași lungime $\left(a_i = a = \frac{l}{n-1}\right)$ și presupunînd că pierderile de sarcină longitudinale sînt aproximativ aceleași pentru fiecare tronson $\left(K_i = K = \frac{8\lambda a}{\pi^2 g D^5}\right)$, (7) devine:

$$H_{0t} = K \sum_{i=1}^{n-1} (Q_i^{(d)})^2 + \frac{8}{\pi^2 g D^4} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} Q_{*i} \right)^2 - 2Q_0 \sum_{i=1}^{n} Q_{*i} \right]. \tag{8}$$

Primul termen reprezintă energia disipată (pierderea de sarcină) pe tronsonul de conductă l, iar ultimul termen corespunde influenței hidrodinamice suplimentare de ramificație datorită prezenței celor n prize.

Diferența piezometrică $h_0 - h_t = h_{0t}$ rezultă sub o formă similară:

$$h_{0t} = H_{0t} - \frac{V_0^2 - V_t^2}{2g} = K \sum_{i=1}^{n-1} (Q_i^{(d)})^2 + 2 \frac{8}{\pi^2 g D^4} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} Q_{*i} \right)^2 - 2Q_0 \sum_{i=1}^{n} Q_{*i} \right]. \tag{8'}$$

În baza acestui rezultat general se rezolvă în continuare cîteva cazuri particulare reprezentative în aplicațiile practice.

3. CAZUL PRIZELOR CU ACELAȘI DEBIT

În acest caz,

$$Q_{*i} = q = \frac{Q_c}{n},$$

$$Q_i^{(d)} = Q_0 - iq = Q_0 - \frac{i}{n} Q_c, \tag{9}$$

care, înlocuite în (8), permit efectuarea sumărilor obținîndu-se în final:

$$H_{0t} = \frac{8Q_c^2}{\pi^2 g D^4} \left\{ \lambda \frac{l}{D} \left[\left(\frac{Q_0}{Q_c} \right)^2 - \frac{Q_0}{Q_c} + \frac{2n-1}{6n} \right] - \left(2 \frac{Q_0}{Q_c} - 1 \right) \right\}, \tag{10}$$

respectiv

$$h_{0t} = \frac{8Q_c^2}{\pi^2 g D^4}\left\{\lambda\frac{l}{D}\left[\left(\frac{Q_0}{Q_c}\right)^2 - \frac{Q_0}{Q_c} + \frac{2n-1}{6n}\right] - 2\left(2\frac{Q_0}{Q_c} - 1\right)\right\}. \quad (10')$$

Pentru $n \to \infty$ se obține expresia diferenței energetice corespunzătoare modelului de calcul cu debit de consum continuu și uniform distribuit în varianta perfecționată [5], [8]:

$$H_{0t} = \frac{8Q_c^2}{\pi^2 g D^4}\left\{\lambda\frac{l}{D}\left[\left(\frac{Q_0}{Q_c}\right)^2 - \frac{Q_0}{Q_c} + \frac{1}{3}\right] - 2\left(\frac{Q_0}{Q_c} - 1\right)\right\}. \quad (11)$$

Dacă în (11) se neglijează ultimul termen, reprezentînd efectul hidrodinamic suplimentar, se obține formula simplificată prezentată în literatura de specialitate hidraulică curentă [1], [2], [3], [4].

În raport cu formula generală cea mai completă (8), considerată drept variantă de referință V_0, se pot pune în evidență următoarele variante simplificate:

V_1 — prize cu debite egale, neglijîndu-se efectele hidrodinamice suplimentare de ramificație:

$$H_{0t} = \frac{8Q_c^2}{\pi^2 g D^4}\frac{\lambda l}{D}\left[\left(\frac{Q_0}{Q_c}\right)^2 - \frac{Q_0}{Q_c} + \frac{2n-1}{6n}\right]; \quad (12)$$

V_2 — consum continuu uniform distribuit ($n - \infty$):

$$H_{0t} = \frac{8Q_c^2}{\pi^2 g D^4}\left\{\lambda\frac{l}{D}\left[\left(\frac{Q_0}{Q_c}\right)^2 - \frac{Q_0}{Q_c} + \frac{1}{3}\right] - \left(2\frac{Q_0}{Q_c} - 1\right)\right\}; \quad (13)$$

V_3 — consum uniform distribuit, neglijîndu-se efectele hidrodinamice suplimentare:

$$H_{0t} = \frac{8Q_c^2}{\pi^2 g D^4}\frac{\lambda l}{D}\left[\left(\frac{Q_0}{Q_c}\right)^2 - \frac{Q_0}{Q_c} + \frac{1}{3}\right]. \quad (14)$$

În cazul particular, cînd debitul tranzit este nul ($Q_0 = Q_c$), se obține:

$$V_0^* : H_{0t} = \frac{8Q_c^2}{\pi^2 g D^4}\left[\frac{\lambda l}{D}\frac{2n-1}{6n} - 1\right], \quad (10')$$

$$V_1^* : H_{0t} = \frac{8Q_c^2}{\pi^2 g D^4}\frac{\lambda l}{D}\frac{2n-1}{6n}, \quad (12')$$

$$V_2^* : H_{0t} = \frac{8Q_c^2}{\pi^2 g D^4}\left(\frac{\lambda l}{3D} - 1\right), \quad (13')$$

$$V_3^* : H_{0t} = \frac{8Q_c^2}{\pi^2 g D^4}\frac{\lambda l}{3D}. \quad (14')$$

Pentru diferența piezometrică h_0 se pot obține particularizări similare.

Pentru a avea o imagine asupra abaterilor ce pot apare în cazul aplicării formulelor simplificate obținute în diferite ipoteze, în tabelul 1 se prezintă rezultatele a două exemple de calcul comparative.

Tabelul 1

Variante de formule		V_0^*	V_1^*	V_2^*	V_3^*
Ex. 1 $\lambda = 0{,}02$ $l = 100$ m $n = 10$ $D = 100$ mm	$H_{0t} \Big/ \frac{8Q_c^2}{\pi^2 g D^4}$	5,33	6,33	5,67	6,67
	Abaterea față de v_0 în %	0	18,7	6,4	25,1
Ex. 2 $\lambda = 0{,}02$ $l = 300$ m $n = 15$ $D = 150$ mm	$H_{0t} \Big/ \frac{8Q_c^2}{\pi^2 g D^4}$	11,89	12,89	12,33	13,33
	Abaterea față de v_0 în %	0	8,4	3,7	12,1

Din analiza acestor rezultate rezultă că aplicarea formulelor simplificate față de varianta de referință V_0, apar diferențe semnificative, care în cazul exemplelor considerate variază între 3,7—25,1%.

4. CAZUL ARIPILOR DE ASPERSIUNE CU DEBIT VARIABIL

Problema aripii de aspresiune este analizată în [9], unde se ia în considerare și variația debitului de la un aspersor la altul; o creștere a debitului, pornind de la ultimul aspersor (de ordinul n fig. 1 *a*) având debitul minim q, cu cîte o cantitate ΔQ_j pe fiecare tronson j, $j+1$. În lucrarea citată nu se ține însă seama de efectele hidraulice suplimentare (de ramificație) a prizelor. Prin urmare, pornind de la relațiile generale (8), (8'), se va obține un model de calcul mai perfecționat.

Având în vedere că pentru aripa de aspersiune prezintă interes deosebit cunoașterea diferențelor piezometrice, se consideră ca bază de plecare expresia generală (8') în care debitul la intrare este egal cu suma debitelor prizelor

$$h_{0t} = K \sum_{i=1}^{n-1} (Q_i^{(d)})^2 - \frac{16}{\pi^2 g D^4} \left(\sum_{i=1}^{n} Q_{*i} \right)^2 . \tag{15}$$

Observînd că variația debitului de la priza $i+1$ la priza i se poate considera pentru aspersoare proporțională cu pierderea de sarcină pe tronsonul respectiv [9 p. 214]:

$$\Delta Q_{*i} = \alpha K Q_i^{(d)^2}, \tag{16}$$

unde α este un coeficient de proporționalitate, care, pentru presiunile curente de 25—45 mcH_2O și aspersoare cu diametrul duzei de 5—7 mm, se poate lua după [9, p. 216] din tabelul 2.

Tabelul 2

Diametrul duzei (mm)	α m^2/s	Presiunea (mcH_2O)			
		25—30	30—35	35—40	40—45
5	α	$7,8\times10^{-6}$	$7,2\times10^{-6}$	$6,7\times10^{-6}$	$6,1\times10^{-6}$
6	α	$7,8\times10^{-6}$	$7,2\times10^{-6}$	$9,4\times10^{-6}$	$8,3\times10^{-6}$
7	α	$13,3\times10^{-6}$	$12,8\times10^{-6}$	$11,8\times10^{-6}$	$11,1\times10^{-6}$

Ținînd seama de aproximarea (16) a variației de debit și notînd cu q debitul ultimului aspersor (de ordinul n), debitul din dreapta prizei de ordinul i, adică $Q_i^{(d)}$ se poate exprima sub forma:

$$Q_i^{(d)} = (n - i)\, q + \alpha K \sum_{j=n-1}^{i+1} (Q_j^{(d)})^2, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{17}$$

De asemenea, debitul total al sistemului se exprimă sub forma:

$$\sum_{i=1}^{n} Q_{*i} = Q_0 = nq + \alpha K \sum_{i=1}^{n-1} (Q_i^{(d)})^2. \tag{18}$$

Înlocuind în membrul drept al expresiilor (17) și (18) pe $Q_i^{(d)}$ și neglijînd termenii multiplicați cu α^2 se obține:

$$Q_i^{(d)} = (n - i)\, q + \alpha K q^2 \sum_{j=1}^{n-i-1} j^2, \tag{19}$$

respectiv

$$Q_0 = nq + \alpha K q \sum_{j=1}^{n-1} j^2. \tag{20}$$

Prin ridicare la pătrat și ținînd seama de aceleași aproximări ca și mai sus, și efectuîndu-se sumările, se obțin expresiile:

$$\sum_{i=1}^{n-1} (Q_i^{(d)})^2 = q^2 [N_1 + \alpha K q N_2] \tag{21}$$

și

$$\left(\sum_{i=1}^{n} Q_{*i} \right)^2 = Q_0^2 = n^2 q^2 \left[1 + 2\alpha K q \frac{N_1}{n} \right], \tag{22}$$

unde s-au utilizat notaţiile :

$$N_1 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6},$$

$$N_2 = \frac{n(n-1)(n-2)(8n^2-11n+1)}{60}. \tag{23}$$

Înlocuind (21) şi (22) se obţine expresia diferenţei de presiune între secţiunile de flux de intrare (S_0) şi de capăt (S_t) ale unei aripi de ploaie prevăzută cu n aspersoare egal distanţate :

$$h_{0t} = Kq^2[N_1 + \alpha KqN_2] - \frac{16n^2q^2}{\pi^2gD^4}\left[1 + 2\alpha Kq\frac{N_1}{n}\right]. \tag{24}$$

Această expresie generalizează relaţia cea mai completă a aripii de ploaie cunoscută din literatura de specialitate [9] prin prezenţa unui termen adiţional :

$$T_A = \frac{16n^2q^2}{\pi^2gD^4}\left[1 + 2\alpha Kq\frac{N_1}{n}\right], \tag{25}$$

care reprezintă influenţa efectelor hidrodinamice secundare de ramificaţie din dreptul prizelor, în condiţiile cînd se ţine seama şi de variaţia debitului de la un aspersor la altul.

Pentru a ilustra influenţa acestor efecte se prezintă un exemplu de calcul : o aripă de ploaie avînd diametrul $D = 100$ mm, prvăzută cu $n = 16$ aspersoare ASJ-1 M cu duză de 6 mm la presiunea de 2,5 at., cu debitul de $q = 0{,}403 \times 10^{-3}$ m^3/s, egal distanţate la $a = 18$ m. Coeficientul λ se apreciază la valoarea $\lambda = 0{,}036$, iar din tabelul nr. 2 se ia $\alpha = 7{,}8 \times 10^{-6}$. Efectuînd calculele se obţine $h_{0t} = 1{,}148$ m fără termenu adiţional, respectiv $h_{0t} = 1{,}063$ m cu acest termen, rezultînd o diferenţă de 8%. Prin urmare, prin utilizarea formulelor simplificate se obţin diferenţe de presiuni mai mari decît cele reale.

Se menţionează că în expresia generală (24) a diferenţei de presiune, termenul $\alpha KqN_2 \ll N_1$, astfel încît se poate utiliza în aplicaţii forma simplificată :

$$h_{0t} = Kq^2N_1 - \frac{16n^2q^2}{\pi^2gD^4}\left(1 + 2\alpha Kq\frac{N_1}{n}\right). \tag{24'}$$

Dacă se neglijează variaţia debitului de la priză la alta, datorită diferenţelor de presiune din pierderea de sarcină, deci se ia $\alpha = 0$, şi se înlocuieşte $nq = Q_0 = Q_c$, din (24) se obţine relaţia (10') pentru $Q_0 = Q_c$.

5. CONCLUZII

Modelul de calcul prezentat, bazat pe o schemă mai apropiată de condițiile de funcționare reale a condutelor cu debit de consum pe parcurs, a condus la obținerea unor formule de calcul îmbunătățite pentru aceste tipuri de conducte.

Exemplele de calcul au pus în evidență erori semnificative ale formulelor de calcul existente, abaterile cele mai mari înregistrîndu-se pentru formula de calcul cel mai des utilizat în practică (V_3 — tabelul 1).

De asemenea, în cazul aripilor de ploaie s-a evidențiat necesitatea utilizării formulei de calcul complete propusă în lucrare.

Primită la redacție la 7 iunie 1984

BIBLIOGRAFIE

1. R. R. CIUGAEV, *Ghidravlika*, Energia, Leningrad, 1970.
2. D. CIOC, *Hidraulica*, Edit. did. și ped., București, 1975.
3. I. FLOREA, V. PANAITESCU, *Mecanica fluidelor*, Edit. did. și ped., București, 1979,
4. D. IONESCU, *Introducere în hidraulică*. Edit. tehnică, 1977.
5. H. PRESS, R. SCHRÖDER, *Hydromechanik im Wasserbau*, Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin—München, 1966.
6. V. BLIDARU, *Irigații și drenaje* Edit. did. și ped., București, 1965.
7. V. BLIARU, *Sisteme de irigații și drenaje*, Edit. did. și ped., București, 1976 (p. 320—321).
8. D. ARSENIE, M. ARSENIE, *Considerații privind calculul hidraulic al conductelor cu debit uniform distribuit*, Simpozion Gospodărirea apelor, vol. 1, Timișoara, 1982.
9. V. BLIDARU, GH. PRICOP, A. WEHRY, *Irigații și drenaje*. Edit. did. ped., București, 1981.

CERCETĂRI DE LABORATOR ASUPRA ENERGIEI VALURILOR*)

de MIRCEA CAZACU, MONICA POPOVICI

Institutul Politehnic, București

Se descrie instalația, generatorul mecanic de valuri monocromatice, metodele (în mare parte originale) și aparatele de măsură a parametrilor geometrici, cinematici și energetici ai valurilor.

Totodată se prezintă rezultatele obținute pentru o varietate mare de valuri caracterizate geometric prin numerele lui Strouhal $Sh^{-1} = cT/h = \lambda/h = 6-95$, comparîndu-se valorile experimentale cu cele teoretice.

Sub imboldul cercetărilor desfășurate de Institutul de Meteorologie și Hidrologie din București referitoare la agitația Mării Negre în zona litoralului românesc [1] [2] în scopul evaluării potențialului energetic al valurilor [3] [4], am început încă din anul 1974 în cadrul Academiei R.S.România [5] și al Catedrei de Hidraulică și Mașini hidraulice de la facultatea de Energetică a Institutului Politehnic din București [6], cercetări sistematice asupra energiei valurilor și a captării ei.

Ca urmare a acestor cercetări și cu ocazia studierii și proiectării generatorului pneumatic de valuri GV7 pentru canalul hidrostatic de $7 \times 4 \times 65$ m de la Institutul de Cercetări Hidrotehnice din București [7][8], am ajuns la concluzia că s-ar putea cunoaște puterea și deci energia reală a valurilor prin măsurarea puterii consumate în instalația utilizată pentru generarea lor. Această idee a fost materializată prin cercetările efectuate în anul 1981 [9], cînd am măsurat puterea netă consumată de un generator electro-mecanic cu clapetă, de construcție relativ simplă, dar care producea valuri monocromatice de parametri geometrici și cinematici foarte variați, acoperind o gamă mai mult decît necesară de numere Strouhal $Sh = \dfrac{h}{\lambda} = h/cT = 1/6 - 1/95$, puterea lor fiind însă limitată la cîțiva wați.

I. INSTALAȚIA EXPERIMENTALĂ

1. *Canalul de valuri.* Instalația propriu-zisă constă dintr-un canal hidrostatic (fig. 1 și 2), avînd următoarele dimensiuni: lungime 4 m, lățime $B = 200$ mm și înălțime 400 mm.

El reprezintă o construcție metalică din table, corniere și oțel lat, asamblate prin nituri și etanșate prin lipituri și garnituri de cauciuc, avînd fundul la cota 0,85 m deasupra pardoselii. Acesta poate fi așezat orizontal cu ajutorul unei nivele și datorită celor două reazeme: unul basculant și celălalt reglabil pe înălțime cu ajutorul unui șurub de forță.

În partea centrală este prevăzut cu cîte o zonă vitrată de 575×265 mm pe ambii pereți laterali pentru vizualizarea și filmarea valurilor printr-o ramă cu un caroiaj de fire negre de 1×1 cm (mai groase din 5 în 5 cm) (fig. 3).

*) Lucrare prezentată la secția a VII-a „Energii regenerabile" a Sez. de comunicări științifice „Independența energetică a României" București, 3–4 decembrie 1982 MEI-IPB.

St. cerc. Mec. Apl., Tom 43, Nr. 5–6, 1984, P. 573–586

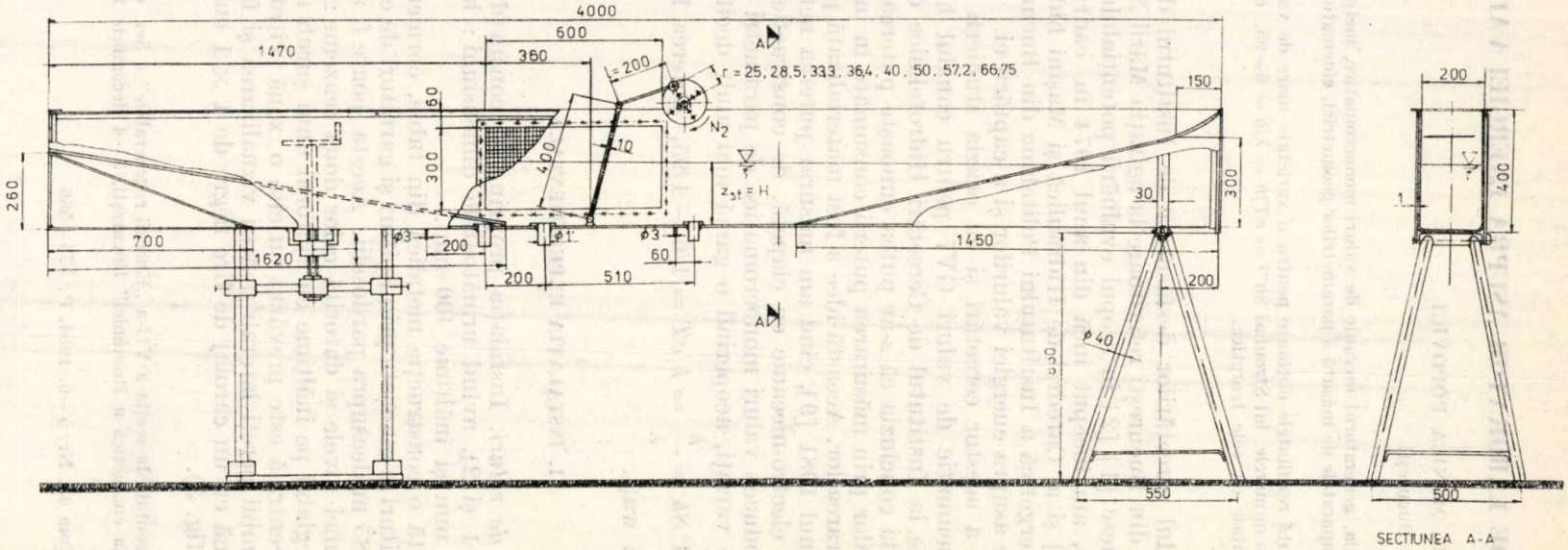


Fig. 1. — Canalul cu generatorul mecanic de valuri.

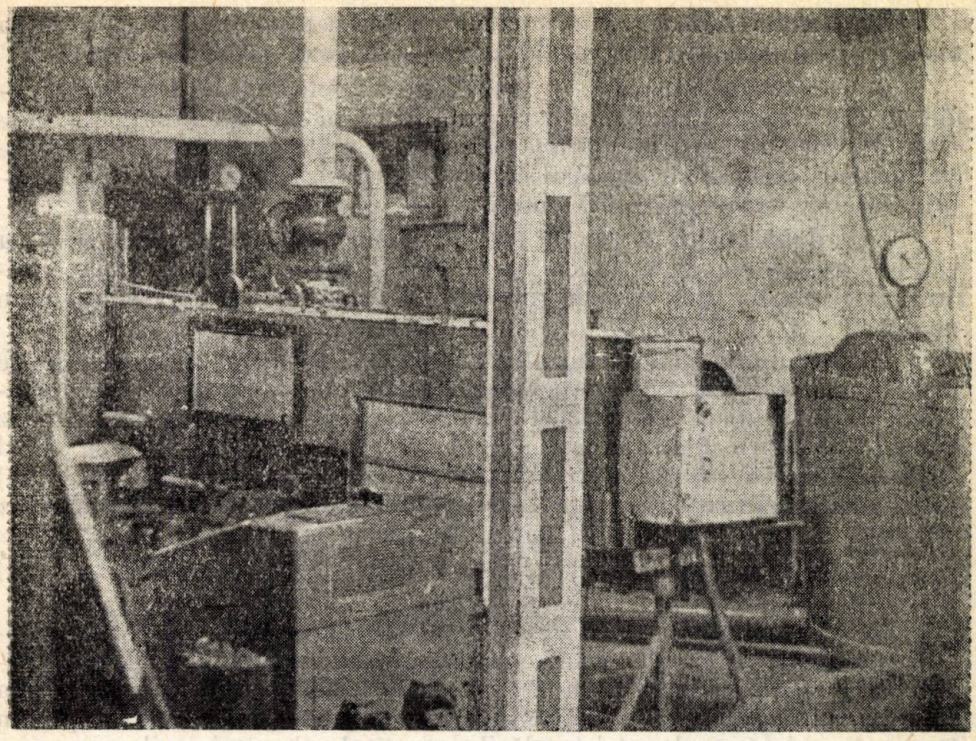


Fig. 2. — Vederea generală a instalației.

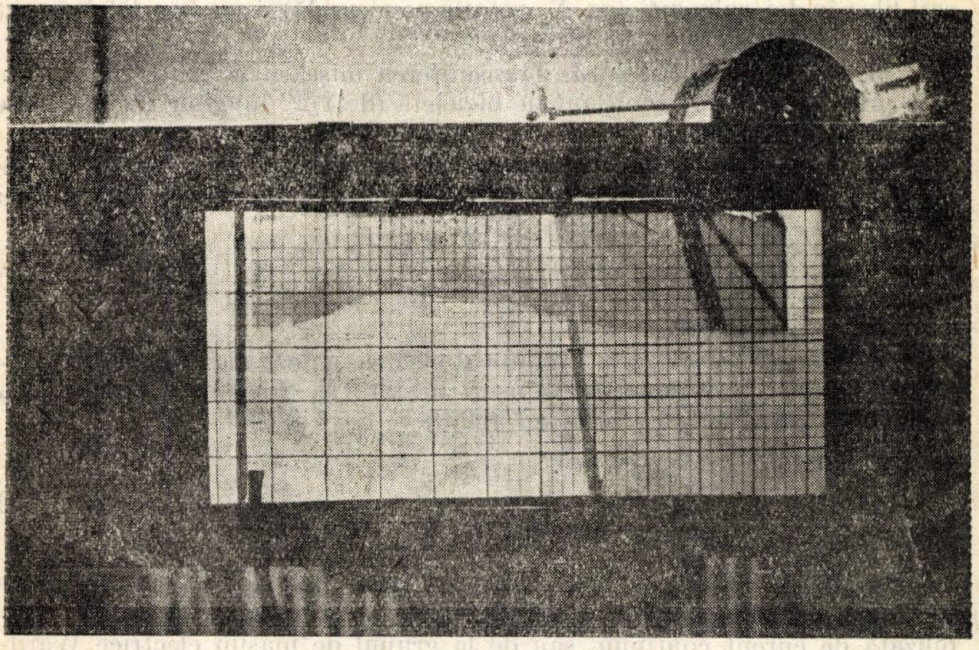


Fig. 3. — Zona vitrată cu clapeta și mecanismul de acționare.

În partea inferioară are o serie de ştuţuri pentru umplere şi egalarea unor posibile denivelări ale lichidului de cele două părţi ale clapetei.

2. *Generatorul de valuri.* În acest scop s-a folosit un generator mecanic de tip clapetă batantă, uşoară, articulată pe fundul canalului, unde este etanşată cu două membrane de cauciuc şi avînd două lamele prinse cu şuruburi zincate cu ajutorul cărora se reglează la minimum interstiţiile laterale (circa 0,3—0,5 mm).

Cele două lagăre conice de jos (din bronz pe plexiglas) sînt unse cu vaselină rezistentă la acţiunea apei, jocul clapetei reglîndu-se la minimum într-una din părţi cu ajutorul unui şurub cu vîrf conic, asigurat cu o piuliţă.

Acţionarea clapetei se face în partea de sus printr-un mecanism de bielă-manivelă, biela avînd lungimea $l = 200$ mm şi fiind fixată la jumătatea muchiei superioare a clapetei printr-un lagăr de alunecare din bronz uns cu ulei şi printr-un rulment mic la celălalt capăt, unde un disc avînd 8 găuri la diverse raze ($r = 25$; 28,6 ; 33,3 ; 40 ; 44,4 ; 50 ; 57,2 şi 66,6 mm) joacă rolul unei manivele echilibrate, de lungime reglabilă în rapoartele :

$$r/l = 1/8\,;\ 1/7\,;\ 1/6\,;\ 1/5\,;\ 1/4{,}5\,;\ 1/4\,;\ 1/3{,}5 \text{ şi } 1/3 \qquad (1)$$

Adoptarea mai multor lungimi de manivelă s-a considerat a fi necesară pentru realizarea de valuri cu înălţimi h diferite pentru aceeaşi perioadă $T = 1/N_2$, iar rapoartele (1) sînt acelea pentru care avem came la traductorul capacitiv de unghi de manivelă, cu ajutorul căruia putem transpune mişcarea clapetei la plăcile orizontale ale unui osciloscop.

Discul manivelelor este fixat la capătul unui arbore, care se poate roti liber în doi rulmenţi (cu N_2 rotaţii pe secundă) şi are la celălalt capăt o roată de lanţ cu $z_2 = 46$ dinţi.

3. *Transmisia mecanică.* Transmiterea mişcării la roata de lanţ se face prin intermediul unui lanţ de bicicletă (de 1/2″ lungime de ecliză) de la un motor electric de curent continuu de 24 V.

Pe capătul de arbore al motorului electric este fixat un pinion de lanţ cu $z_1 = 20$ dinţi, raportul de transmisie al reductorului cu lanţ fiind :

$$i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{46}{20} = 2{,}3 \qquad (2)$$

4. *Motorul de antrenare.* Motorul electric a fost ales de curent continuu, pentru a i se putea regla uşor turaţia (N_1 rot/s) şi deci perioada valului T, între acestea existînd relaţia :

$$T(s) = \frac{1}{N_2(\text{rot/s})} = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{1}{N_1} = \frac{i}{N_1}. \qquad (3)$$

Excitaţia motorului este realizată prin magneţi permanenţi, iar tensiunea de alimentare de maximum 24 V este luată de la o sursă stabilizată de curent continuu, sau de la grupul de maşini electrice Ward-

Leonard existent în laborator. Reglarea la valoarea dorită a tensiunii U şi a curentului I de alimentare a indusului se face cu ajutorul unui reostat.

Motorul electric este fixat pe un suport reglabil cu cremalieră, ce permite întinderea corespunzătoare a lanţului.

5. *Disipatorii de energie.* Pentru a nu se obţine în canal unde staţionare prin suprapunerea valului călător direct cu cel reflectat la capăt (val indirect), ceea ce ar compromite total scopul măsurătorilor, am montat la ambele extremităţi ale canalului cîte un distrugător de energie.

Aceştia constau dintr-un perete înclinat cu un unghi mic faţă de orizontală, avînd o anumită permeabilitate, prin care atît valurile mici, cît şi cele mari să se strecoare cu o dificultate convenabilă, care să anihileze total unda ce ar vrea să se reflecte şi să o diminueze foarte mult pe cea refractată.

Ei au fost confecţionaţi din nişte table perforate, peste care s-a aşezat un strat de pietriş de circa 1 cm grosime, sortat în prealabil cu ajutorul a două ciururi cu site, avînd mărimea ochiurilor de 3 şi respectiv 10 mm.

Pentru ca în procesul disipării valurilor mai mari să nu se producă o antrenare a materialului amortizant, unghiul favorabil de înclinare al peretelui permeabil faţă de orizontală s-a dovedit a fi mai mic de 15°.

II. METODELE ŞI APARATURA DE MĂSURĂ

Caracterul complicat al experienţelor privitoare la mişcarea nepermanentă a valurilor a făcut necesară atît folosirea mai multor feluri de aparate de măsură, cît şi utilizarea citirilor dinamice şi a metodelor cinematografice.

1. *Măsurarea nivelelor statice.* Măsurarea nivelului static z_{st} al apei în cele două părţi ale canalului separate de clapeta generatoare de valuri s-a făcut cu două tuburi de sticlă fixate lîngă scala gradată din zona vitrată a canalului şi legate cu tuburi warnish de 3 mm diametru) în scopul amortizării pulsaţiilor de presiune) la două prize statice amplasate pe fundul canalului.

Această măsurătoare a fost necesară atît pentru controlul unei eventuale denivelări a apei în cele două zone ale canalului de valuri, cît şi pentru controlul citirilor dinamice ale cotelor z_{max} (corespunzătoare crestei valului) şi z_{min} (corespunzătoare tălpii valului), fiind presupusă relaţia aproximativă,

$$\frac{z_{max} + z_{min}}{2} = z_{st} = H. \tag{4}$$

Vom observa cu această ocazie că nivelul static reprezintă tocma adîncimea apei în canal, originea scalei gradate pe direcţia axei OZ fiind plasată pe fundul canalului.

2. *Măsurarea nivelelor variabile în timp.* a. Măsurarea cotelor crestei valului z_{max}, respectiv a tălpii valului z_{min}, s-a făcut în general prin citire

dinamică observînd trecerea valului pe scala gradată sau pe caroiajul de linii negre, aplicat peste geamul zonei vitrate.

b. O altă metodă utilizată pentru înregistrarea în timp a cotelor extreme ale valului, din care se poate calcula înălțimea lui

$$h = z_{max} - z_{min}, \tag{5}$$

viteza de propagare a undei, precum și perioada sau frecvența valurilor, a fost filmarea cu un număr de 50 sau 100 de imagini pe secundă a trecerii valului prin dreptul zonei vitrate prevăzută cu caroiajul de linii negre de 1×1 cm.

$$c = \frac{\lambda}{T} = \lambda N_2 \cdot \tag{6}$$

În acest scop s-a așezat în cadrul imaginii și un cronometru de tip Jaquet, care își oprește limba indicatoare la fiecare sutime de secundă, astfel încît poziția acului indicator între două imagini succesive diferă cu 0,02 respectiv 0,01 secunde.

c. În alte ocazii, pentru înregistrarea pe ecranul osciloscopului a variației cu unghiul manivelei (vezi I.2) sau în timp a nivelului suprafeței libere la trecerea valurilor printr-o secțiune dată, s-au folosit traductoare capacitive formate dintr-un fir izolat, plasat în mijlocul canalului și o punte de măsură RLC.

3. *Măsurarea perioadei valului.* a. Fiind vorba de valuri monocromatice, am determinat perioada lor după formula (3), măsurînd cu un cronometru intervalul de timp în care discul manivelelor efectuează un anumit număr de rotații.

b. O altă metodă mai precisă, ce elimină subiectivismul experimentatorului și poate fi aplicată și în cazul generării valurilor aleatoare, constă în montarea unei tije cu un vîrf izolat electric de canal ce poate fi culisată pe verticală pînă atinge creasta valului. Contactele electrice făcute de două creste succesive de val ne dau direct la cronometrul Jaquet cu pornire și oprire electrică, tocmai perioada valului.

4. *Măsurarea lungimii de undă.* Un alt parametru important pentru aprecierea geometriei valului este lungimea lui de undă, pentru măsurarea căreia am folosit mai multe procedee.

a. Prima metodă constă în observarea pozițiilor a două creste consecutive de val (sau eventual a unei creste și a unei tălpi pentru valurile prea lungi), în anumite momente de timp diferind cu un număr întreg de perioade. Aceste momente pot fi marcate de un zgomot periodic generat de mecanismul de producere al valurilor sau de impactul crestei valului asupra disipatorului.

Materializarea celor două poziții s-a făcut cu ajutorul a două repere de sîrmă care pot culisa pe cornierul de la muchia superioară a canalului, distanța dintre ele măsurîndu-se cu ajutorul unei rulete metalice sau a unui metru de tîmplărie.

b. Pentru mărirea preciziei acestei metode am confecționat două contacte electrice din sîrmă de cupru izolată cu plastic și ascuțită la un capăt, care pot culisa pe muchia canalului și care sînt aplecate spre mijlocul canalului pînă realizează un contact de cît mai scurtă durată cu crestele valurilor.

Închiderea circuitului electric al fiecărui contact face să se aprindă cîte un beculeț cu neon, alimentarea făcîndu-se de la o sursă reglabilă de curent continuu.

Măsurarea distanței dintre cele două vîrfuri ale contactelor s-a făcut ca mai sus, iar pentru sporirea acuității vizuale în observarea sincronismului aprinderii celor două beculețe, acestea au fost amplasate la întuneric (în umbră) și cît mai aproape unul de altul.

c. A treia metodă utilizată constă în montarea în canal a doi traductori capacitivi de nivel, conținînd cîte un conductor izolat susținut în centrul canalului de o ramă glisantă. Aceștia sînt legați la cîte un canal al unei punți de măsură RLC, ale cărei ieșiri merg la un osciloscop cu două spoturi.

Pulsația în fază a celor două spoturi electronice atestă faptul că distanța dintre cei doi traductori capacitivi este egală cu lungimea de undă a valului.

5. *Măsurarea vitezei de propagare.* Deși viteza de propagare a valurilor monocromatice generate în instalație rezultă din măsurarea lungimii de undă și a frecvenței sau perioadei lor conform formulei (6), am încercat totuși și determinarea ei directă în canal prin cronometrarea timpului în care creasta unui val parcurge o anumită distanță (procedeul 3 b).

Rezultatele experimentale privitoare la viteza de propagare a valului în canal sînt comparate cu valorile teoretice [10] ale acestei viteze în figura 4., unde au fost trasate și cîteva linii de frecvență constantă a valurilor.

Vom observa cu această ocazie, că valorile în general mai reduse ale vitezelor reale ar putea fi explicate de lățimea relativ îngustă a canalului și influența frecărilor valului pe pereții laterali, raza hidraulică avînd valoarea :

$$R_h = \frac{BH}{2H + B} = \frac{0{,}2 \times 0{,}25}{2 \times 0{,}25 + 0{,}2} = 0{,}071 \text{ m.} \qquad (7)$$

Pentru mărirea preciziei măsurătorilor, pornirea și oprirea cronometrului electric era realizată de contactul făcut de creasta unui val cu două vîrfuri plasate la o anumită distanță pe lungimea canalului.

6. *Măsurarea puterii electrice.* Pentru a putea realiza valuri de diferite perioade, am ales pentru antrenarea generatorului mecanic de valuri un motor electric de curent continuu alimentat de la o sursă stabilizată.

Excitația motorului fiind cu magneți permanenți, puterea electrică consumată de motor la indus va fi :

$$P_e(w) = U(V) \cdot I(A), \qquad (8)$$

măsurarea ei făcîndu-se cu aparate electrice montate corespunzător.

Deşi clapeta lucrează echilibrat, generînd valuri în ambele părţi ale canalului, am dorit să ne convingem dacă generarea unei mişcări periodice ca cea a valurilor nu introduce pulsaţii de putere, respectiv de tensiune şi curent prin variaţia periodică a turaţiei datorită încărcărilor pulsatorii.

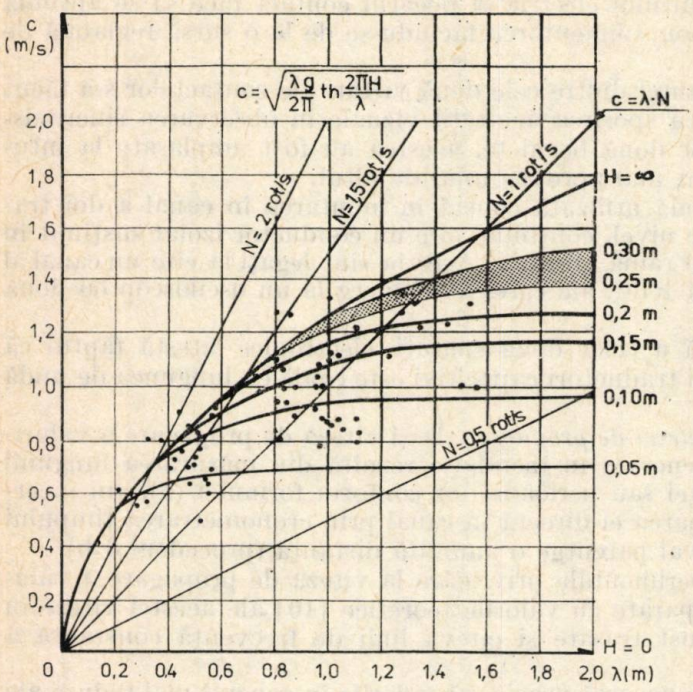


Fig. 4. — Valorile experimentale şi teoretice ale vitezei de propagare a valurilor în canal în funcţie de lungimea de undă şi adîncimea apei H.

În acest sens am folosit un oscilograf cu o buclă wattmetrică pentru înregistrarea pulsaţiilor de putere şi o buclă simplă legată la traductorul de unghi. Am constatat că încărcarea echilibrată a mecanismului de generare a valurilor şi inerţia pieselor în mişcare ale transmisiei şi a rotorului motorului electric sînt suficient de importante ca pulsaţiile mişcării să fie atît de reduse, încît oscilaţiile de putere să fie aproape imperceptibile.

7. *Tararea motorului electric.* Pentru a cunoaşte puterea mecanică utilă la arborele motorului electric am construit o frînă mecanică de mărime corespunzătoare, echilibrată static şi avînd braţul de lungime $l = 19{,}65$ cm rezemat pe o balanţă automată cu diviziunea de 1 gf. În acest fel s-a putut măsura momentul $M = F \cdot l$ (gf. cm) iar turaţia motorului electric N_1(rot/s) s-a măsurat vizual sau acustic folosind un cronometru.

În acest caz expresia puterii utile la arborele motorului electric este:

$$P_M(W) = \frac{F(\text{kgf}) \cdot l(\text{m}) \cdot 2 \cdot N_1(\text{rot/s})}{0{,}102} = 0{,}0121\, F(\text{gf})\, N(\text{rot/s}) \qquad (9)$$

Pentru etalonarea motorului electric am efectuat experienţa la 5 tensiuni constante $U = 1\ ;2\ ;\ \ldots 5$V, măsurînd curentul $I(A)$ absor-

bit de motor, momentul de frînare $M = F \cdot l$ (gf cm) și turația de funcționare N_1(rot/s).

Punctele măsurătorilor au fost puse în diagramă, iar prelucrarea datelor experimentale s-a făcut prin interpolare dublu parabolică condiționînd ca suma pătratelor abaterilor să fie minimă. Formula obținută în final este :

$$P_M(U,\ I) = a(U) + b(U) \cdot I + c(U) \cdot I^2, \qquad (10)$$

unde

$$a(U) = 0{,}70075 - 0{,}9593U + 0{,}09515U^2,$$

$$b(U) = -1{,}8582 + 2{,}5422U - 0{,}2648U^2,$$

$$c(U) = 0{,}4689 - 0{,}9493U + 0{,}1426U^2.$$

Curbele arată buna aproximare obținută prin cei nouă coeficienți. Pe ramurile din partea dreaptă a curbelor de etalonare s-au obținut mai tîrziu puncte de funcționare stabilă cu ajutorul unei mulinete.

8. *Determinarea puterii consumate de mecanismul de acționare.* Cunoașterea puterii consumate de mecanismul de generare a valurilor este necesară pentru a ști puterea netă consumată la formarea valurilor.

În acest sens am măsurat puterea electrică consumată de motor la mersul în gol al mecanismului (canalul fără apă) pentru turațiile uzuale și am calculat cu formulele (10) și (11) puterea mecanică la arborele motorului electric, care este consumată de mecanism $P_m(N_2)$.

În figura 5 am trasat prin metoda celor mai mici pătrate curba continuă pentru pierderile mecanice în mecanismul de generare a valurilor și curba întreruptă pentru același mecanism avînd clapeta batantă decuplată.

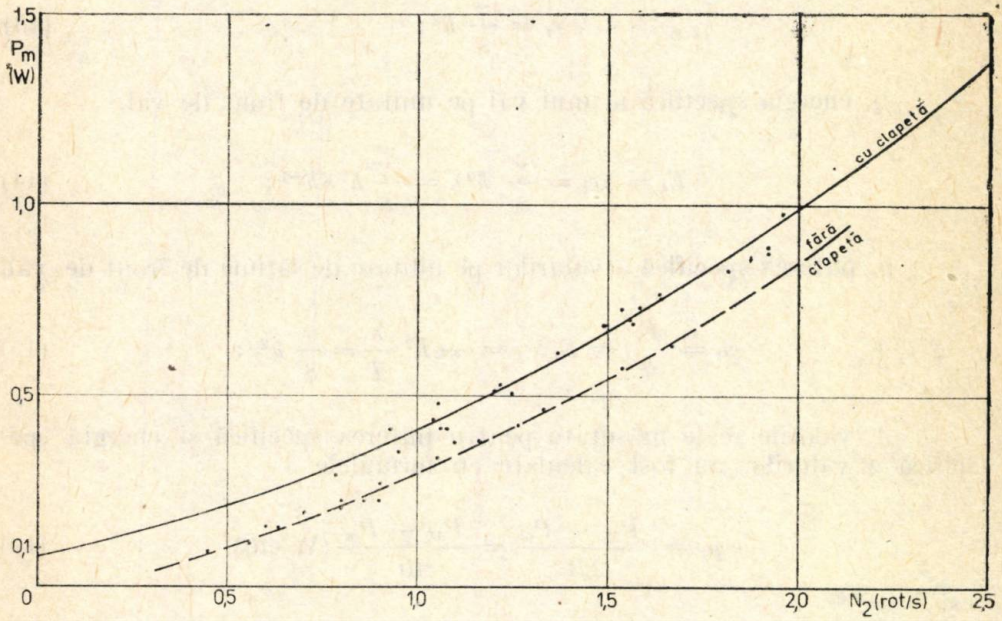


Fig. 5. — Puterea pierdută în mecanismul de acționare cu sau fără clapetă la diverse turații.

III. REZULTATE OBȚINUTE

1. *Modul de lucru.* Experimentările propriu-zise pentru determinarea energiei și puterii reale a valurilor monocromatice au decurs în felul următor:

S-a umplut canalul cu apă pînă la o anumită cotă $z_{st} = H$ și s-au efectuat trei șiruri de experiențe pentru valori ale razelor manivelei egale cu $r = 28{,}6$; 40 și 50 mm, pornind de la turațiile cele mai mici posibile (corespunzătoare valurilor în amortizare, caracterizate prin numere Strouhal mici) pînă la turații mai ridicate (corespunzătoare valurilor de vînt, în dezvoltare, caracterizate prin numere Strouhal mari).

În fiecare experiență s-au măsurat nivelele z_{st}; z_{max} și z_{min}, turația N_2, lungimea de undă, tensiunea U și curentul I absorbit de motorul electric.

Cu această ocazie vom observa că cea mai bună apreciere a geometriei unui val este dată de numărul lui Strouhal

$$Sh = \frac{h}{cT} = \frac{h}{\lambda} = 1/Sh^{-1}, \tag{12}$$

pe care l-am adoptat drept criteriu de asemănare.

2. *Formule de calcul.* În afara formulelor simple de pînă acum s-au mai calculat următoarele mărimi teoretice:

a. energia dublu specifică pe unitate de lățime de front de val și lungime de undă (energie superficială),

$$e_t = \frac{\gamma}{8} h^2; \tag{13}$$

b. energia specifică a unui val pe unitate de front de val,

$$E_t = \lambda e_t = \frac{\gamma}{8} h^2 \lambda = \frac{\gamma}{8} h^3 Sh^{-1}; \tag{14}$$

c. puterea specifică a valurilor pe unitate de lățime de front de val,

$$p_t = \frac{E_t}{T} = E_t N_2 = \frac{\gamma}{8} h^2 \frac{\lambda}{T} = \frac{\gamma}{8} h^2 c; \tag{15}$$

d. valorile reale măsurate pentru puterea specifică și energia specifică a valurilor au fost calculate cu formulele

$$p_r = \frac{P_M - P_m}{2B} = \frac{P_M - P_m}{40} \text{ (W/cm)} \tag{16}$$

și

$$E_r = p_r T. \tag{17}$$

De asemenea, ne-a interesat în mod deosebit raportul dintre puterile și energiile reale ale valurilor și valorile lor teoretice

$$\pi = \frac{p_r}{p_t} = \frac{E_r}{E_t} \tag{18}$$

3. *Prelucrarea datelor experimentale.* Fiind vorba de un fenomen ondulatoriu, în afara rezultatului final de comparare a energiilor și puterilor reale și teoretice, am mai plasat valorile experimentale în alte cîteva diagrame pentru o mai bună intuire a fenomenului.

În figura 6 s-au comparat valorile experimentale cu variația teoretică a lungimii de undă în funcție de înălțimea valului, pentru diferite geometrii ale acestuia, apreciate prin numărul lui Strouhal.

În figura 7 s-a reprezentat dependența cu inversul numărului lui Strouhal a raportului dintre energia specifică măsurată și cea teoretică.

În figura 8 s-au reprezentat rapoartele dintre puterile specifice măsurate și cele teoretice în funcție de înălțimile valurilor, arătîndu-se totodată frecvența lor și valoarea medie ponderată.

4. *Concluziile* cercetărilor întreprinse privitor la măsurarea energiei valurilor sînt următoarele:

a. Instalația experimentală împreună cu metodele de măsură și aparatele utilizate sînt adecvate scopului, permițînd obținerea de valori experimentale apropiate de cele teoretice corespunzătoare valului călător în apă de adîncime finită [10] [11] [12].

b. Dispersia punctelor experimentale în grafice se datorează următoarelor cauze:

— complexitatea fenomenului ondulatoriu de generare mecanică a valurilor prin mecanismul cu clapetă și lipsa unei soluții teoretice sau numerice de comparație,

— incertitudinea asupra eficienței disipatorilor de energie a valurilor în condițiile gamei foarte largi de numere Strouhal obținute în instalație ($Sh^{-1} = 6-95$), față de cele interesante practic ($Sh^{-1} = 7-15$) [4].

— gradului de turbulență al mișcării și de intrare în rezonanță în unele situații de lucru.

c. Cercetările de pînă acum au pus în evidență valori reale medii mai reduse față de cele teoretice; atît în ce privește viteza de propagare a trenului de valuri monocromatice (fig. 4), cît și în privința energiei și a puterii specifice (fig. 7 și 8). Astfel, valoarea medie a coeficientului puterii sau energiei reale este $\pi_m = 0{,}8$, considerînd numărul total al experiențelor efectuate și scade la valoarea de $\pi'_m = 0{,}68$, dacă vom selecționa numai experiențele corespunzătoare geometriei valurilor interesante din punct de vedere practic [4].

Așadar, prin raportare la valul teoretic, s-ar putea trage concluzia că valurile reale, ce au necesitat mai puțină energie pentru a fi generate în laborator, posedă energie mai puțină decît cea teoretică, lucru normal dacă avem în vedere și viteza lor mai mică de propagare.

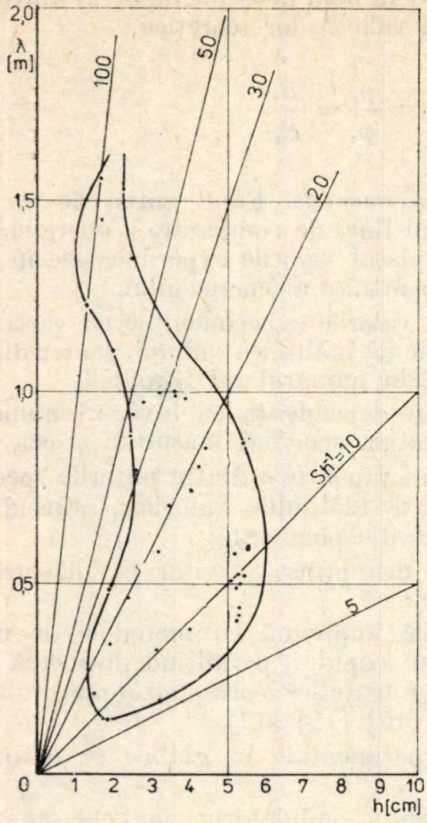


Fig. 6. — Valorile experimentale şi teoretice ale lungimii de undă în funcţie de înălţimile valurilor.

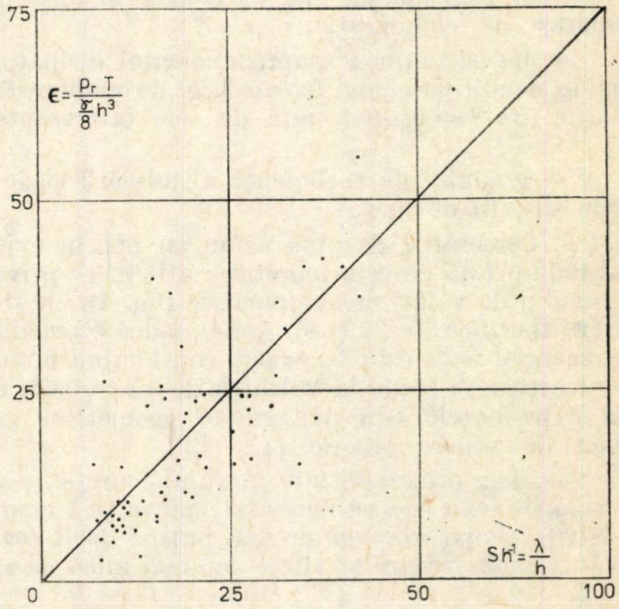


Fig. 7. — Raportul dintre energia specifică măsurată şi cea teoretică în funcţie de inversul numărului lui Strouhal.

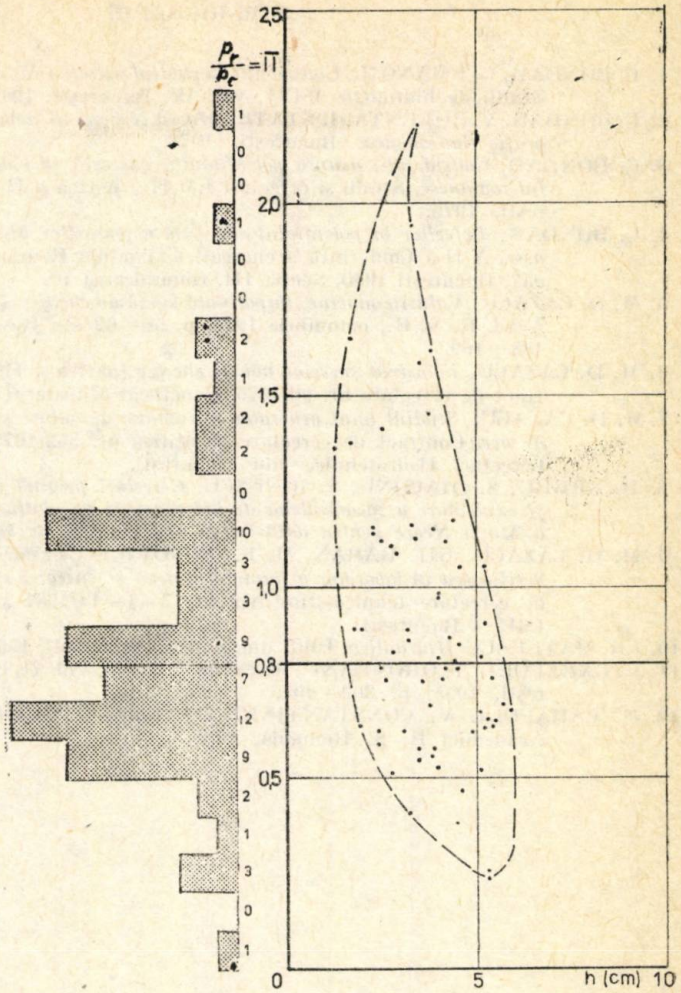


Fig. 8. — Raportul dintre puterea specifică măsurată și cea teoretică în funcție de înălțimea valurilor.

d. Măsurarea energiei sau a puterii reale a valurilor monocromatice constituie o problemă complexă și dificilă, datorită fenomenului nepermanent al mișcării cu suprafață liberă. Abordată pentru prima dată începînd cu anii 1981—1982, din inițiativa Institutului de Meteorologie și Hidrologie din București cu sprijinul material al Consiliului Național al Apelor, ea constituie problema de bază în aprecierea potențialului energetic brut oferit de valurile mărilor și oceanelor și totodată punctul de plecare pentru calculul randamentului dispozitivelor de captare ale acestei interesante energii [5] [6].

Primită la redacție la 30 iunie 1984

BIBLIOGRAFIE

1. C. BONDAR, G. EMANOIL, *Contribuție la studiul agitației Mării Negre pe litoralul R. P. R.*, Studii de hidrologie ISCH, vol. IV, București, 1963.
2. C. BONDAR, V. ROVENȚA, I. STATE, *Marea Neagră în zona litoralului românesc. Monografie hidrologică*. București, 1973.
3. C. BONDAR, *Considerații asupra potențialului energetic al valurior Mării Negre pe litoralul românesc*, Studii și cercetări I.M.H., partea a II-a, Hidrologie, **XLIV**, București, 1975.
4. C. BONDAR, *Referitor la potențialul energetic al valurilor Mării Negre pe litoralul românesc*. A II-a Conferință a energeticienilor din România „Independența energetică", București 1980, Secția III, comunicarea 10.
5. M. D. CAZACU, *Valurile marine, importantă sursă de energie*. Caiete de studii și dezbateri. Acad. R. S. R., octombrie 1974, p. 56—62 sau Rev. Viitorul social **1**, 1975, p. 168—169.
6. M. D. CAZACU, *Folosirea surselor noi de energie* (partea a III-a Energia valurilor), Contract de cercetare nr. 90/1975, Beneficiar Ministerul Energiei Electrice.
7. M. D. CAZACU, *Studiul unui generator pneumatic de valuri și proiectarea distribuitorului de aer*, Contract de cercetare științifică nr. 352/1977, încheiat cu Institutul de Cercetări Hidrotehnice din București.
8. R. NEGRU, S. DIACONU, S. IONESCU, *Cercetări privind realizarea unităților de foraj și exploatare a zăcămintelor de hidrocarburi pe platforma continentală românească a Mării Negre pentru adîncimi de apă maximă de 90m*, I.C.H., București 1976.
9. M. D. CAZACU, GH. BĂRAN, M. F. POPOVICI, *Cercetări pe model hidraulic pentru verificarea în laborator a formulei puterii și energiei specifice a valurilor*, Contract de cercetare tehnico-științifică nr. 7—1—14/1981 și 7—2—10/1982, Beneficiar IMH — București.
10. CR. MATEESCU *Hidraulica*, Edit. did. și ped., București, 1963, p. 656—668.
11. E. CARAFOLI, T. OROVEANU, *Mecanica fluidelor*, Vol. II, Edit. Acad. R. P. R., București, 1955, p. 362—401.
12. E. CARAFOLI, V. CONSTANTINESCU, *Dinamica fluidelor incompresibile*, Editura Academiei R. S. România, 1981.

STUDIUL PROPRIETĂȚILOR AERODINAMICE ALE UNOR PROFILE FLEXIBILE

V. N. CONSTANTINESCU, S. GĂLEȚUȘE și P. MARINESCU
Institutul Politehnic, București

În cele ce urmează ne propunem să examinăm calitativ proprietățile aerodinamice ale unei aripi cu profile flexibile, soluție propusă de pionerul aviației românești, Aurel Vlaicu.

După cum este cunoscut [1], prototipul avionului Vlaicu I propunea pentru aripă o soluție foarte simplă și originală, prezentată schematic în figura 1. Astfel, aripa era de o formă dreptunghiulară de alungire $\lambda \cong 4$, prevăzută cu un mic diedru. Din punct de vedere constructiv era formată dintr-o simplă ramă de lemn, fără nervuri, peste care se întindea pînza; în plus, cele două laturi ale ramei, materializînd extradosul și intradosul, erau menținute și rigidizate printr-un număr de fire.

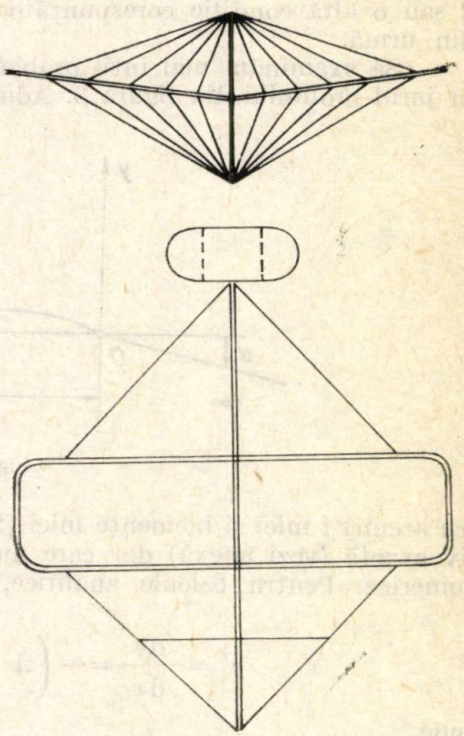


Fig. 1

Funcționarea aripii de mai sus poate fi imaginată aproximativ în modul următor. Mai întîi, datorită întinderii firelor, putem considera că pînza este inițial perfect întinsă, avînd o lungime (coardă) l. În momentul în care aripa este plasată într-un curent de viteză V_∞ sub incidență α, funcționarea rezultă din schițele prezentate în figura 2 și figura 3. Astfel, datorită distribuției de presiuni pe aripă, aceasta se va deforma obținîndu-se în diferite secțiuni profile cu săgeți f. Deformațiile care se produc ar putea fi datorite unei întinderi imperfecte a pînzei, astfel încît lungimea acesteia în sensul corzii să fie inițial mai mare decît

St. Cerc. Mec. Apl., Tom 43, Nr. 5–6, 1984, P. 587–599

c; efectul dominant pare însă a fi încovoierea laturilor ramei care mărginește aripa, sub acțiunea presiunilor pe profil. Ca rezultat se vor obține, în diferite secțiuni, corzi $c \leqslant l$. Un ultim efect ar putea fi constituit de întinderea (deformarea) pînzei propriu-zise.

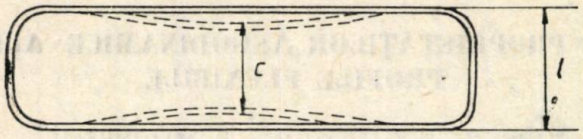


Fig. 1

Apare deci că în funcționare avem de-a face cu o aripă de anvergură finită de coardă variabilă, profilul în fiecare secțiune fiind inițial necunoscut și cu o săgeată variabilă.

Fenomenul poate fi calitativ pus în evidență prin considerarea unei probleme bidimensionale și anume (fig. 3) mișcarea în jurul unui profil subțire, avînd ecuația scheletului inițial necunoscută. Forma $y(x)$ a scheletului va fi apoi determinată dintr-o condiție de echilibru a pînzei, considerată ca fiind perfect flexibilă. În sfîrșit, raportul l/c, respectiv valoarea corzii c, se va putea determina considerînd echilibrul ramei din figura 2 sau o altă condiție corespunzătoare, care să o înlocuiască pe aceasta din urmă.

Să examinăm mai întîi problema aerodinamică, respectiv mișcarea în jurul profilului din figura 3. Admițînd teoria liniarizată valabilă pen-

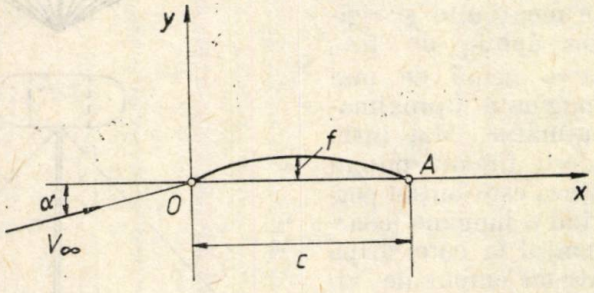


Fig. 3

tru arcuiri f mici și incidențe mici [2], [3], putem aborda o tratare relativ exactă (vezi anexa) dar care nu este accesibilă decît unor metode numerice. Pentru calcule analitice, să considerăm

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\left(A + \sum_{1}^{n} A_n \cos n\theta\right), \tag{1}$$

unde

$$x = \frac{c}{2}(1 + \cos\theta) \tag{2}$$

În aceste condiții ecuația scheletului se va deduce prin integrarea relației (1)

$$y = C_0' + \int \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = C_0' + \int y' \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\,\mathrm{d}\theta =$$

$$= C_0' + \frac{c}{2}\int (A + \sum_1^n A_n \cos n\theta) \sin\theta\,\mathrm{d}\theta, \tag{3}$$

unde C_0' este o constantă de integrare. Notînd $C_0 = 2C_0'/c$, rezultă

$$\frac{2y}{c} = C_0 - A\cos\theta - \frac{A_1}{4}\cos 2\theta + \frac{1}{2}\sum_2^n A_n\left[\frac{\cos(n-1)\theta}{n-1} - \frac{\cos(n+1)\theta}{n+1}\right]. \tag{4}$$

Soluția (4) trebuie să îndeplinească condițiile

$$y = 0 \text{ pentru } x = 0 \quad (\theta = \pi) \text{ și } x = c \quad (\theta = 0). \tag{5}$$

Din aceste două condiții putem exprima de exemplu primii doi coeficienți C_0 și A_1 în funcție de coeficienții A_n.

Să admitem, pentru a fixa ideile, $n = 3$; relația (4) va avea atunci forma

$$\frac{2y}{c} = C_0 + \left(\frac{1}{2}A_2 - A\right)\cos\theta + \frac{1}{4}(A_3 - A_1)\cos 2\theta -$$

$$- \frac{1}{6}A_2\cos 3\theta - \frac{1}{8}A_3\cos 4\theta, \tag{6}$$

iar din condițiile (5) rezultă

$$C_0 = \frac{1}{4}A_1 - \frac{1}{8}A_3, \qquad A = \frac{1}{3}A_2, \tag{7}$$

rămînînd drept necunoscute A_1, A_2, A_3.

Este de asemenea cunoscut faptul că, în condițiile existenței relației (1), distribuția γ de vîrtejuri este dată de relația

$$\gamma = 2V_\infty\left(A_0 \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + \sum_1^n A_n \sin n\theta\right), \tag{8}$$

unde

$$A_0 = \alpha + A = \alpha + \frac{1}{3}A_2. \tag{9}$$

De asemenea diferența de presiuni Δ_p între intrados și extrados va fi

$$\Delta p = -\rho V_\infty \gamma. \tag{10}$$

Să impunem, local, condiția de echilibru a pînzei. Astfel, mai întîi, dacă pînza este perfect flexibilă, tensiunea de întindere T într-o secțiune oarecare va fi constantă. Atunci, echilibrul unui element (fig. 4) conduce la relația

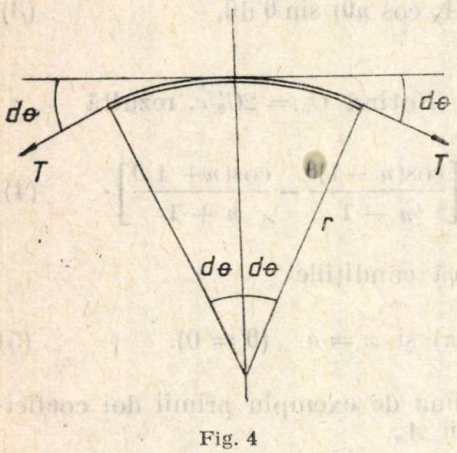


Fig. 4

$$\Delta p = \frac{T}{r} = T\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}, \tag{11}$$

unde r este raza locală de curbură a scheletului.

Avînd în vedere că y' este mic față de unitate în condițiile aproximative menționate, vom înlocui (11) cu

$$\Delta p \cong Ty'', \tag{12}$$

unde T este o constantă, încă nedeterminată.

Ținînd seama de relația (1), vom deduce

$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{d\theta}(y')\frac{d\theta}{dx} = -\frac{2}{c}\frac{1}{\sin\theta}\sum_1^n A_n \sin n\theta. \tag{13}$$

În sfîrșit, observînd că Δp este dat de relația (10), iar γ de relația (8), obținem

$$\beta\left[A_0(1-\cos\theta)+\frac{1}{2}\sum_1^n A_n(\cos(n-1)\theta-\cos(n+1)\theta)\right]= \\ =\sum_1^n nA_n \sin n\theta, \tag{14}$$

unde am notat cu β parametrul adimensional

$$\beta = \frac{\rho V_\infty^2 c}{T}, \tag{15}$$

iar A_0 depinde de α și A_2 (9).

Relația (14) este condiția care permite determinarea coeficienților A_n. Este de observat că relația (14) este automat satisfăcută în bordul de fugă ($\theta = 0$); în schimb ea nu poate fi satisfăcută în bordul de atac decît dacă $A_0 = 0$. Această anomalie este explicabilă deoarece dacă $A_0 \neq 0$, atît γ, cît și Δp devin infinite în bordul de atac, ceea ce contrazice de alt-

fel ipoteza micilor perturbații admisă inițial. Ținînd seama de considerațiile curente făcute în teoria profilelor subțiri, vom putea accepta relația (14), cu excepția cel mult a vecinătății bordului de atac. Mai mult, putem accepta valorile membrului secund (12) ca aproximînd distribuția reală de presiuni, cu valori finite la bordul de atac (ținînd cont de desprinderea locală a curentului, cît și de faptul că profilul nu este în realitate ascuțit la bordul de atac reprezentat de rama aripiii din figura 1).

Relația (14) nu permite deducerea directă, prin identificare a coeficienților A_n. Într-adevăr, pentru aceasta ar mai fi necesar să dezvoltăm fie membrul secund în serii trigonometrice în cosinusuri, fie membrul stîng în sinusuri. Vom fi conduși atunci la ecuații cu diferențe pentru coeficienții A_n, care pot fi rezolvate urmînd procedeele dezvoltate în alte cazuri [2], [3].

O altă cale de determinare a coeficienților A_n este colocația. De exemplu, dacă admitem $n = 3$ (6), (7), am putea impune relația (14) în trei puncte, fie $\theta_1 = \pi/4$, $\theta_2 = \pi/2$, $\theta_3 = 3\pi/4$.
Rezultă sistemul

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\beta}{2}\right)A_1' + \left[2 - \frac{1}{3}(1+\sqrt{2})\beta\right]A_2' + \left(\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{\beta}{2}\right)A_3' = \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\beta,$$

$$(1-\beta)A_1' - \frac{1}{3}\beta A_2' - (3-\beta)A_3' = \beta, \tag{16}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\beta}{2}\right)A_1' - \left[2 - \frac{1}{3}(\sqrt{2}-1)\beta\right]A_2' + \left(\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{\beta}{2}\right)A_3' = \left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\beta,$$

unde am notat

$$A_1' = \frac{A_1}{\alpha}, \quad A_2' = \frac{A_2}{\alpha}, \quad A_3' = \frac{A_3}{\alpha}. \tag{17}$$

Sistemul (16) poate fi rezolvat fără dificultăți, deoarece scăzînd cea de-a treia ecuație din prima, rezultă direct A'_2

$$A_2' = -\frac{\sqrt{2}\beta}{4 - \frac{2\sqrt{2}}{3}\beta}. \tag{18}$$

În acest mod, a doua ecuație (16) împreună cu prima sau cu a treia permit calculul celorlalți doi coeficienți. Astfel,

$$A_1' = \frac{\beta(3-\beta)\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(4-\frac{2\sqrt{2}}{3}\beta\right)+2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{3}(1+\sqrt{2})\beta\right]+\beta(4-\sqrt{2}\beta)\left(\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{\beta}{2}\right)}{\left(4-\frac{2\sqrt{2}}{3}\beta\right)\left[(1-\beta)\left(\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{\beta}{2}\right)+(3-\beta)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\beta}{2}\right)\right]}, \tag{19}$$

și

$$A_3' = \frac{\beta(1-\beta)\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(4-\frac{2\sqrt{2}}{3}\beta\right)+2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{3}(1+\sqrt{2})\beta\right]-\beta(4-\sqrt{2}\beta)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\beta}{2}\right)}{\left(4-\frac{2\sqrt{2}}{3}\beta\right)\left[(1-\beta)\left(\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{\beta}{2}\right)+(3-\beta)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\beta}{2}\right)\right]} \tag{20}$$

Prin definiție, parametrul β este pozitiv. În plus, dacă T este de ordinul $10-10^2$ daN/m; $V \sim 20-40$ m/s, iar $c \sim 1$ m, rezultă $\beta \sim 1$. Coeficienții A_n' pentru diferite valori β sînt prezentați în figura 5.

S-a arătat mai înainte că relația (14) nu este satisfăcută în vecinătatea bordului de atac, decît dacă $A_0=0$. Se poate arăta acum care este diferența între cei doi termeni ai relației (14) pe toată lungimea corzii. Dacă se utilizează relația (9) pentru A_0 și se împarte relația (14) cu α se obține,

$$\beta\left[\left(1+\frac{A_2'}{3}\right)(1-\cos\theta)+\frac{1}{2}\sum_1^n A_n'(\cos(n-1)\theta-\cos(n+1)\theta)\right]=$$

$$=\sum_1^n nA_n'\sin n\theta \tag{21}$$

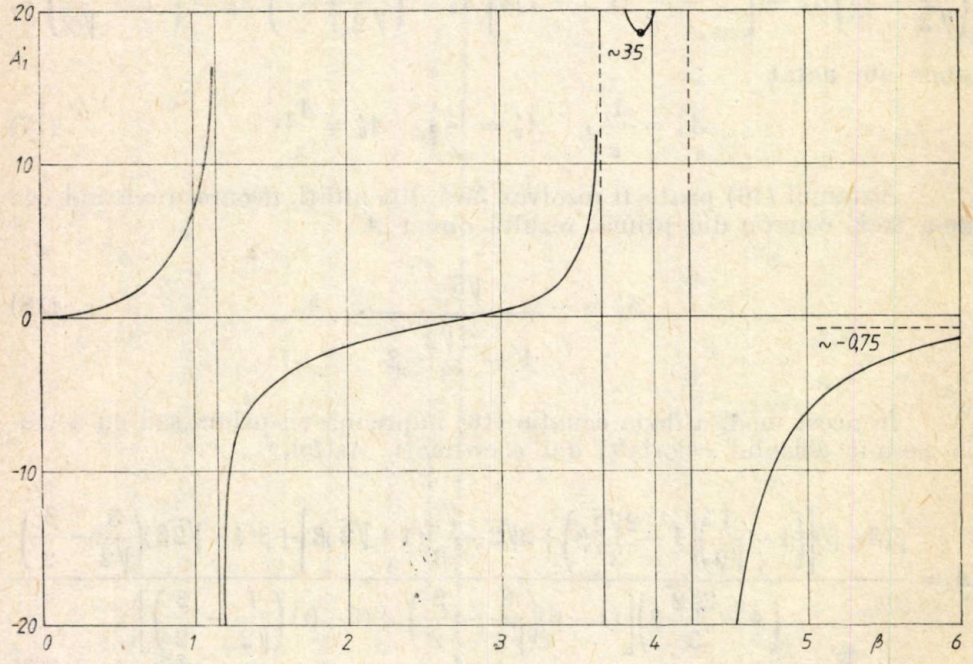


Fig. 5a

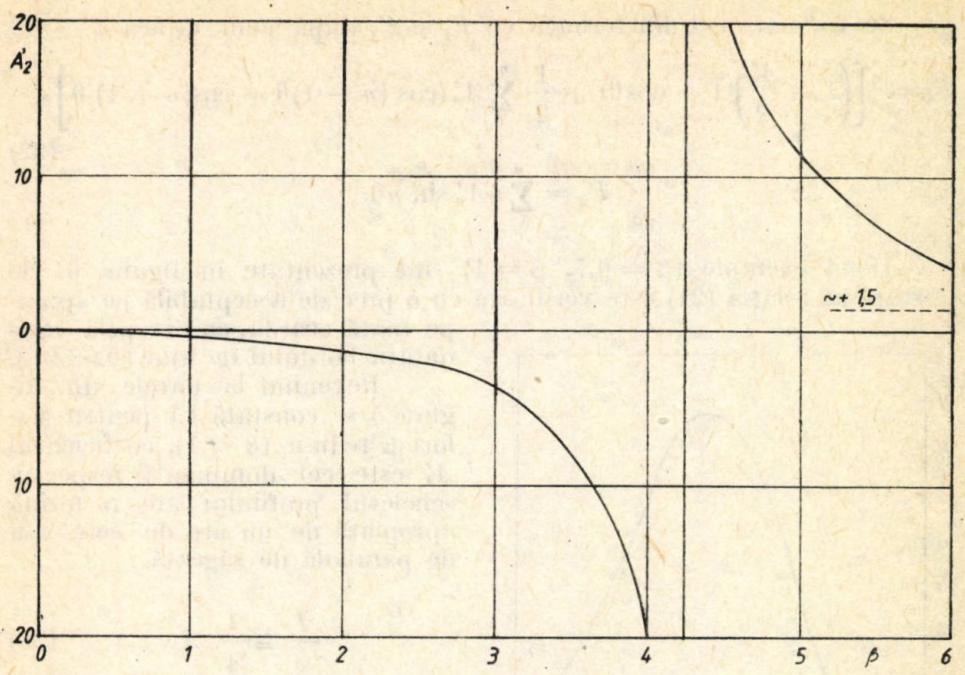


Fig. 5b

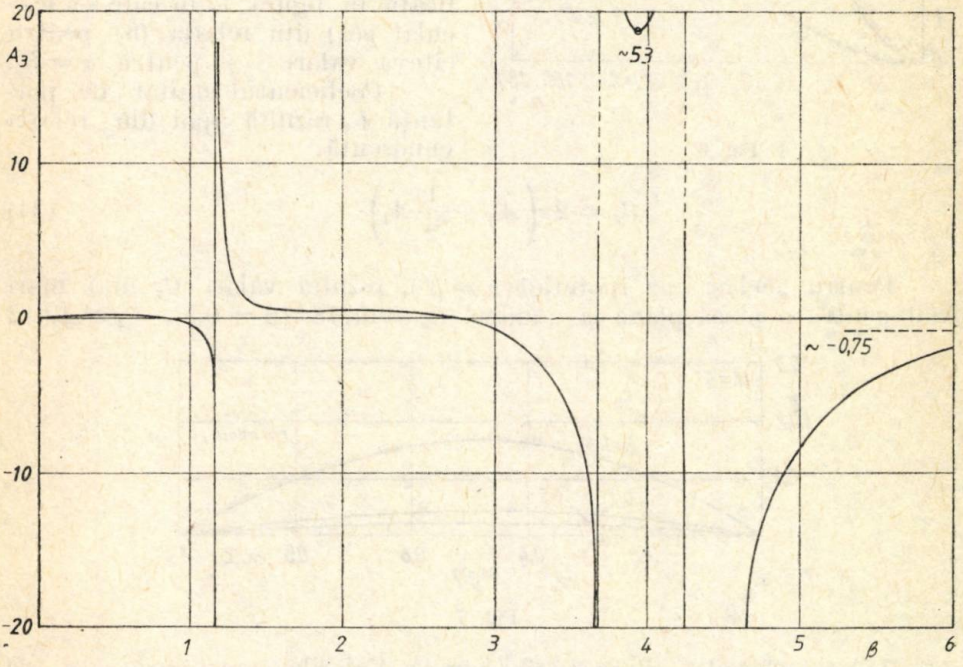


Fig. 5

Se vor nota cei doi termeni cu F_1 și F_2 după cum urmează

$$F_1 = \beta\left[\left(1 + \frac{A_2'}{2}\right)(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2}\sum_1^n A_n'(\cos(n-1)\theta - \cos(n+1)\theta\right], \tag{22}$$

$$F_2 = \sum_1^n n A_n' \sin n\theta.$$

Două exemple ($\beta = 0{,}7$, $\beta = 1$) sînt prezentate în figura 6. Se constată că relația (21) este verificată cu o precizie acceptabilă pe aproape toată coarda, cu excepția vecinătății bordului de atac ($\theta > 140°$).

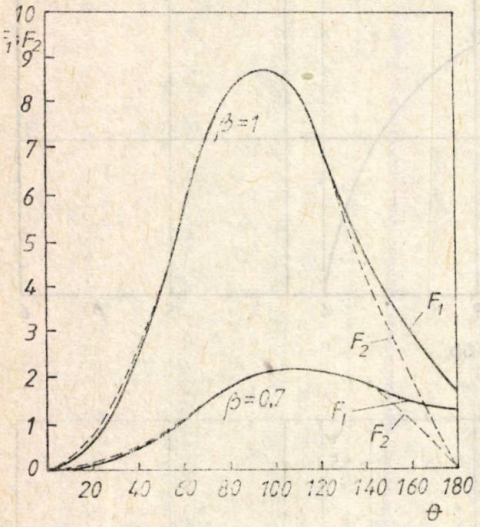


Fig. 6

Revenind la datele din figura 5 se constată că pentru valori β reduse ($\beta < 1$), coeficientul A_1' este cel dominant, respectiv scheletul profilului are o formă apropiată de un arc de cerc sau de parabolă de săgeată

$$\frac{f}{c} \cong \frac{1}{4} A_1. \tag{23}$$

Această concluzie este verificată în figura 7, în care s-a calculat $y(x)$ din relația (6) pentru cîteva valori β și pentru $\alpha = 5°$.

Coeficientul unitar de portanță C_z rezultă apoi din relația cunoscută

$$C_z = 2\pi\left(A_0 + \frac{1}{2}A_1\right). \tag{24}$$

Pentru același caz ipotetic ($\alpha = 5°$), rezultă valori C_z mai mari decît pentru o placă plană și anume $C_z = 0{,}778$ ($\beta = 0{,}5$), $C_z = 1{,}012$

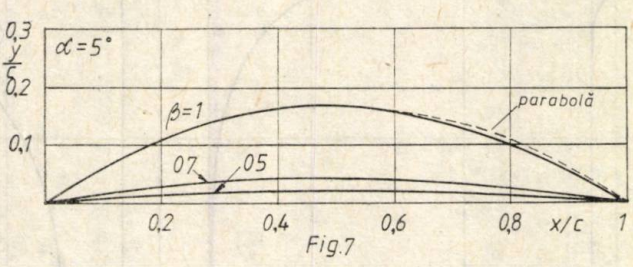


Fig. 7

($\beta = 0{,}7$) și, respectiv, $C_z = 2{,}483$ ($\beta = 1$). Valorile corespunzătoare ale săgeții profilului sînt $f/c = 2{,}13\%$, $4{,}13\%$ și 16%.

În sfîrșit, lungimea arcului profilului se poate calcula din relația

$$1 = \int_0^c \sqrt{1 + y'^2}\, dy. \tag{25}$$

Ținînd seama de relația (2) și dezvoltînd radicalul, se poate calcula aproximativ lungimea l sub forma

$$l \cong -\int_\pi^0 \left(1 + \frac{y'^2}{2}\right)\frac{c}{2} \sin\theta\, d\theta, \tag{26}$$

obținîndu-se

$$\frac{l}{c} = 1 + \frac{1}{6} A_1^2 + \frac{8}{45} A_2^2 + \frac{17}{70} A_3^2 - \frac{A_1 A_3}{5}. \tag{27}$$

Luînd în considerare cazul cînd β are valori relativ reduse (de exemplu $\beta < 1$), lungimea l poate fi evaluată aproximativ și mai simplu, asimilînd scheletul cu un arc de cerc, avînd săgeată dată de relația (23).

Rezultă atunci din considerații geometrice elementare

$$\frac{l}{c} \cong \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{4} A_1\right) \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\frac{1}{A_1} - \frac{1}{4} A_1}, \tag{28}$$

care este o funcție neliniară de A_1, respectiv de β și α.

Pentru același caz numeric ($\alpha = 5°$) rezultă $l/c = 1{,}0012$ la $\beta = 0{,}5$; $l/c = 1{,}0045$ la $\beta = 0{,}7$ și, respectiv, $l/c = 1{,}068$ la $\beta = 1$. Se constată că o mică deformație poate conduce la săgeți importante.

Pentru rezvolvarea completă a problemei mai trebuie să scriem o relație care să determine l/c din considerații de deformație a structurii aripii din figura 1. Astfel, dacă mecanismul de deformație este cel presupus în figra 2, atunci va trebui să impunem că deformația este proporțională cu încărcarea, respectiv cu tensiunea T

$$l - c = KT, \tag{29}$$

unde K va fi un coeficient avînd dimensiunea (presiunea)$^{-1}$. Considerînd fiecare ramă (bord de atac, de fugă), drept grinzi încastrate sau semiîncastrate supuse unor sarcini distribuite, rezultă K proporțional cu anvergura aripii (la puterea a patra) și, invers, proprțional cu momentul de inerție al grinzilor și cu modulul de elasticitate al acestora (care este controlat și de firele reprezentate în figura 1). Rezultă deci K drept cunoscut sau ca un parametru care poate fi impus la proiectare.

Înlocuind T cu β (15), putem scrie condiția (29) sub forma

$$\frac{l}{c} - 1 = \frac{\varepsilon}{\beta}, \tag{30}$$

unde am notat cu ε parametrul adimensional

$$\varepsilon = \rho V_\infty^2 K. \tag{31}$$

Calculele pot fi acum duse pînă la capăt fără dificultăți. Astfel, datele problemei sînt, de exemplu, ρ, V_∞, K, l, α. Atunci sistemul format din relațiile (28) și (31) permite determinarea necunoscutelor β și l/c. Continuarea calculelor la alte incidențe se poate face modificînd de exemplu β; deducem atunci l/c din (30) și A_1' din (19). Relația (28) va permite determinarea coeficientului A_1, iar din (17) se deduce α.

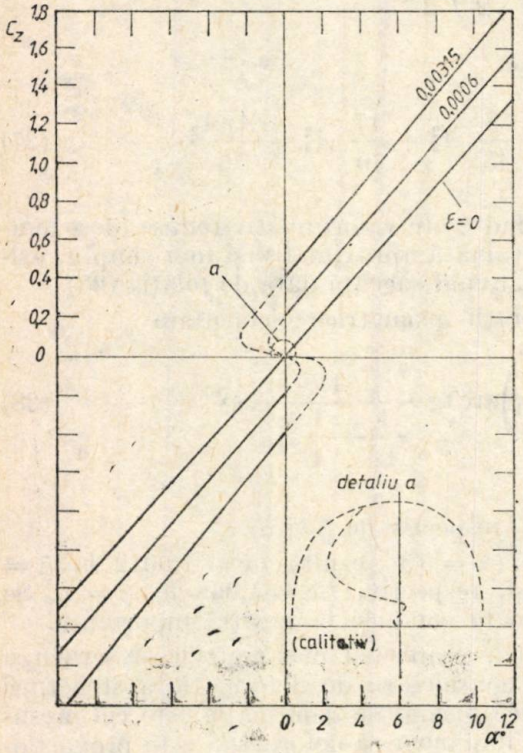


Fig. 8

În figura 8 s-au trasat curbele $C_z(\alpha)$ pentru domeniul de valori β considerat mai înainte și pentru cîteva valori ε, cazul $\varepsilon = 0$ reprezentînd evident o placă plană.

Se constată că aceste curbe sînt foarte apropiate de linii drepte de pante $dC_z/d\alpha > 2\pi$ (pentru domeniul de incidențe și vaori β considerat), diferențele față de placa plană fiind de aproximativ 10 %. Comparînd cu valoarea pantei $dC_z/d\alpha$ pentru un profil gros [2], [3], rezultă că profilul subțire flexibil se comportă ca un profil gros, avînd o grosime de circa 12%.

O altă posibilitate de calcul, care poate fi utilă în unele aplicații, ar fi să impunem l și c; de exemplu o ramă relativ rigidă, iar pînza să nu fie perfect întinsă. Atunci din (30) rezultă β, iar din (28) se deduce A_1, respectiv α.

Ar apărea deci că ideea propusă de Aurel Vlaicu reprezintă o soluție interesantă de aripă cu profil subțire cu săgeată a scheletului variabilă, cu posibilități de reglare a rigidității și implicit a portanței, conducînd la forțe de sutentație relativ mari pentru incidențe relativ mici.

O analiză mai atentă a acestei configurații relevă, chiar în ipotezele simplificate de mai sus, un fenomen interesant, dar care poate avea con-

secințe defavorabile grave. Astfel, soluția de mai sus reprezintă soluția probabilă, care apare la incidențe pozitive. În realitate mai există cel puțin încă o soluție, pentru care însă portanța are semnul schimbat.

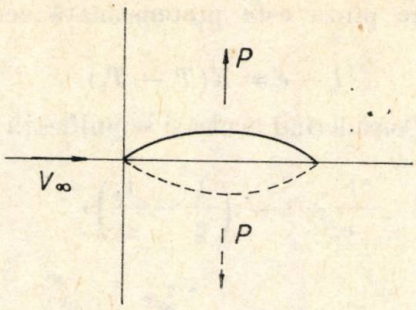


Fig. 9

Existența mai multor soluții $y(x)$ pentru schelet poate fi pusă în evidență analitic cu ajutorul relațiilor precedente, dar și fizic, prin argumente directe. Astfel, să considerăm cazul $\alpha = 0$; am văzut că în aceste condiții scheletul profilului rezultă apropiat de un arc de cerc, ca în figura 3 sau în figura 9. De exemplu, examinînd curbele din figura 8 rezultă că în aceste condiții ($\alpha = 0$), $C_z = 0{,}4$ pentru $\varepsilon = 0{,}00315$ sau $C_z = 0{,}2$ pentru $\varepsilon = 0{,}0006$. Dar nimic nu ne împiedică să considerăm scheletul profilului ca fiind simetric (linia punctată din figura 9) față de cel precedent, cu aceeași săgeată, dar negativă. În acest caz portanța și coeficientul C_z au exact valorile precedente, dar negative.

Este de așteptat ca acest fenomen (cel puțin două soluții pentru ε dat, una cu portanță pozitivă, una cu portanță negativă) să existe și la alte incidențe mici în afara cazului particular $\alpha = 0$. De altfel concluzia de mai sus este verificată fără dificultăți, de exemplu din examinarea soluțiilor (18) — (20).

Astfel, mai întîi se constată că, dacă de exemplu incidența α este pozitivă, va rezulta un set de valori A_1, A_2, A_3 dar atunci există și soluția $-A_1$, $-A_2$, $-A_3$ pentru incidența $-\alpha$, deoarece acestea corespund la aceleași valori A_1', A_2', A_3'. Mai mult, este ușor de văzut că deoarece A_1 este diferit de zero și mărginit (C_z mărginit) pentru $\alpha = 0$, rezultă că în mod necesar $A_1' \to \infty$ cînd $\alpha \to 0$ (de exemplu prima rădăcină a numitorului expresiei (19), respectiv $\beta = 1{,}15$). La valori β mai mari, va rezulta A_1' negativ, respectiv α negativ pentru A_1 pozitiv (curba cu linie întreruptă din figura 8, care prelungește în mod natural curba $C_z(\alpha)$). Scheletul profilului rezultă acum cu dublă curbură.

Discuția se poate face în continuare, pentru valori β mai mari. De exemplu, valoarea β pozitivă corespunzînd primei rădăcini a numărătorului expresiei (19) ar conduce la valori nemărginite pentru incidență. Valoarea β corespunzătoare este $\beta = 2{,}85$. Mai departe, faptul că numitorul relației (19) mai are încă două zerouri ($\beta = 3{,}65$ și $\beta = 4{,}24$), arată că mai sînt posibile încă două situații, respectiv două soluții $y(x)$ care dau $\alpha = 0$ (a se vedea detaliul a din figura 8).

Pentru o altă valoare a lui n se vor găsi atîtea valori β care anulează numitorul relației (19) cît este n.

Efectele menționate au loc la valori β mari, respectiv (15) în cazul cînd tensiunea T din pînză rezultă mică. Asemenea situații pot fi evitate, în cazul aripii Vlaicu, prin tensionarea corespunzătoare a ramei aripii, cu ajutorul firelor din figura 1.

În cazul în care pînza este pretensionată ecuația de echilibru se scrie

$$l - c = K(T - T_0) \tag{32}$$

în locul relației (29). Considerînd aceleași semnificații pentru ε și β, relația (32) devine

$$\frac{l}{c} - 1 = \varepsilon\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta_0}\right), \tag{33}$$

unde s-a notat

$$\beta_0 = \rho \frac{V_\infty^2 c}{T_0}. \tag{34}$$

Folosind expresia (27) pentru l/c putem scrie relația (33) sub forma

$$\varepsilon = \alpha^2 \frac{f(\beta) \cdot \beta}{1 - \dfrac{\beta}{\beta_0}}, \tag{35}$$

unde s-a notat

$$f(\beta) = \frac{1}{6} A_1'^2 + \frac{8}{45} A_2'^2 + \frac{17}{70} A_3'^2 - \frac{1}{5} A_1' A_3'. \tag{36}$$

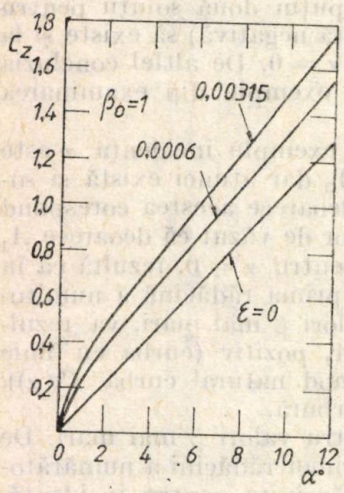


Fig. 10

Relația (35) este suficientă pentru rezolvarea probelmei pentru β_0 și ε cunoscute.

Ca un exemplu, coeficientul de portanță în funcție de α are acum variația arătată în figura 10 pentru un coeficient de pretensionare $\beta_0 = 1$ și pentru diferite valori ε. Se constată că fenomenele precedente (fig. 8) nu mai apar.

În concluzie problema mișcării în jurul unor profile și aripi flexibile conduce la evaluarea unor particularități interesante și care ar putea avea consecințe practice deosebite pentru anumite aplicații. Astfel, în afara aripii lui Vlaicu, mai există și alte numeroase soluții (utilizate în special în perioada de început a aviației), de aripi cu profile flexibile, care pot fi studiate, pe căi similare cu cea descrisă mai sus. În sfîrșit, anumite soluții recente se încadrează în aceeași categorie, de exemplu delta-planul. Este de reținut că la incidențe mici și la tensiuni relativ reduse ale pînzei, soluția devine multiformă.

Primită la redacție la 2 februarie 1984

ANEXĂ

Pentru calculele mai exacte, se poate renunța la aproximațiile suplimentare introduse, plecîd de la soluția cunoscută a distribuției de vîrtejuri γ în funcție de o pantă $y'(x)$ oarecare a scheletului

$$\gamma(x)=2V_\infty\sqrt{\frac{c-x}{x}}\left(\alpha+\frac{1}{\pi}\int_0^c y'(x')\sqrt{\frac{x'}{c-x'}}\frac{\mathrm{d}x'}{x-x'}\right), \tag{A1}$$

în care caz condiția (11), respectiv

$$-2\rho V_\infty^2\sqrt{\frac{c-x}{x}}\left(\alpha+\frac{1}{\pi}\int_0^c y'(x')\sqrt{\frac{x'}{c-x'}}\frac{\mathrm{d}x'}{x-x'}\right)=$$

$$=T\frac{y''(x)}{[1+y'^2(x)]^{3/2}}, \tag{A$_2$}$$

reprezintă o ecuație integro-diferențială în $y(x)$, care poate fi eventual rezolvată numeric. În acest caz și relația (23), care leagă coarda c de lungimea l a arcului profilului, va trebui rezolvată de asemenea numeric.

BIBLIOGRAFIE

1. — *Aurel Vlaicu (1882—1913)*, Editura Academiei, București, 1955.
2. E. CARAFOLI, *Aerodinamica*, Editura tehnică, București, 1951.
3. E. CARAFOLI, V. N. CONSTANTINESCU, *Dinamica fluidelor incompresibile*, Editura Academiei, București, 1981.

O MIȘCARE LENTĂ CREATĂ DE DIPOLUL PLAN

de DAN GH. IONESCU

Institutul Politehnic, București

Se dă soluția corespunzătoare mișcării plane, lente și permanente a unui fluid vîscos incompresibil care ocupă interiorul unei lemniscate a lui Booth, cînd în centrul acestei curbe se află un dipol.

Un rezultat clasic al academicianului Dumitru Dumitrescu îl constituie expresiile funcției de curent și potențialului vitezelor, în cazul mișcării axial-simetrice creată de un dipol spațial situat pe axa unui cilindru circular în interiorul căruia se află un fluid ideal incompresibil [1]. Dificultatea problemei este datorată prezenței peretelului solid reprezentat de cilindrul circular. În nota de față considerăm o problemă formal analogă cu cea studiată de academicianul Dumitru Dumitrescu, dar din hidrodinamica fluidelor vîscoase : mișcarea plană, lentă și permanentă creată de un dipol plan situat în centrul unei lemniscate a lui Booth. Și în acest caz, dificultatea problemei este datorată prezenței peretelui solid reprezentat de lemniscată și pe care de astă dată viteza trebuie să se anuleze. Soluția este obținută utilizîndu-se un procedeu ce generalizează metoda funcțiilor analitice [2] — la mișcările plane, lente, permanente și cu singularități date, ale fluidelor vîscoase incompresibile. Fără a expune acest procedeu, care urmează a fi prezentat într-o lucrare ulterioară, dăm numai soluția problemei menționate.

Fluidul vîscos ocupă domeniul D limitat de o lemniscată a lui Booth, situată în planul $z = x + iy$. Cercul unitar $\Delta : |\zeta| < 1$ din planul $\zeta = \xi + i\eta$ este reprezentat conform pe domeniul D prin funcția

$$z = m(\zeta) = \frac{i\lambda\zeta}{\zeta^2 + a^2}, \tag{1}$$

unde a și λ sînt numere reale astfel încît $a \geqslant 1$ și $\lambda > 0$. Fie în punctul $z = 0$ un dipol de intensitate c și a cărui axă coincide cu axa Ox. Componentele u, v ale vitezei și funcția de curent ψ pot fi exprimate în general prin formulele

$$u + iv = \Phi_1(\zeta) - \frac{m(\zeta)}{m'(\zeta)}\,\overline{\Phi_1'(\zeta)} - \overline{\Phi_2(\zeta)}, \tag{2}$$

$$\psi = -\operatorname{Im}\{\overline{m(\zeta)}\Phi_1(\zeta) + X(\zeta)\}, \tag{3}$$

unde

$$X(\zeta) = \int_{\zeta_0}^{\zeta} \Phi_2(\zeta) m'(\zeta)\,d\zeta. \tag{4}$$

St. Cerc. Mec. Apl., Tom 43, Nr. 5–6 1984, P. 600–601

În cazul problemei studiate,

$$\Phi_1(\zeta) = -\frac{c}{\lambda_2}\left[a^4\,\zeta^2 + 2(a^2+1)^2 + 2a^2 - \frac{2a^2(a^2+1)^2}{\zeta^2+a^2}\right], \tag{5}$$

$$\Phi_2(\zeta) = \frac{c}{\lambda_2}\left\{\frac{1}{\zeta^2-a^2}[(2a^2+1)\zeta^4 + (4a^4 - a^2 - 2)\zeta^2 + 2a^2(a^2+1)^2] - \right.$$
$$\left. - \frac{(\zeta^2+a^2)^2}{\zeta^2}\right\}, \tag{6}$$

$$X(\zeta) = -\frac{ic}{\lambda}\left[2a^2\zeta - \frac{a^2}{\zeta} + \frac{(3a^2+2)\zeta}{\zeta^2+a^2}\right], \tag{7}$$

deci

$$\psi = \frac{c}{\lambda}\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\overline{\zeta}}{\overline{\zeta}^2+a^2}\left[\frac{2a^2(a^2+1)^2}{\zeta^2+a^2} - a^4\,\zeta^2 - 2(a^2+1)^2 - 2a^2\right] + \right.$$
$$\left. + 2a^2\zeta - \frac{a^2}{\zeta} + \frac{(3a^2+2)\zeta}{\zeta^2+a^2}\right\}. \tag{8}$$

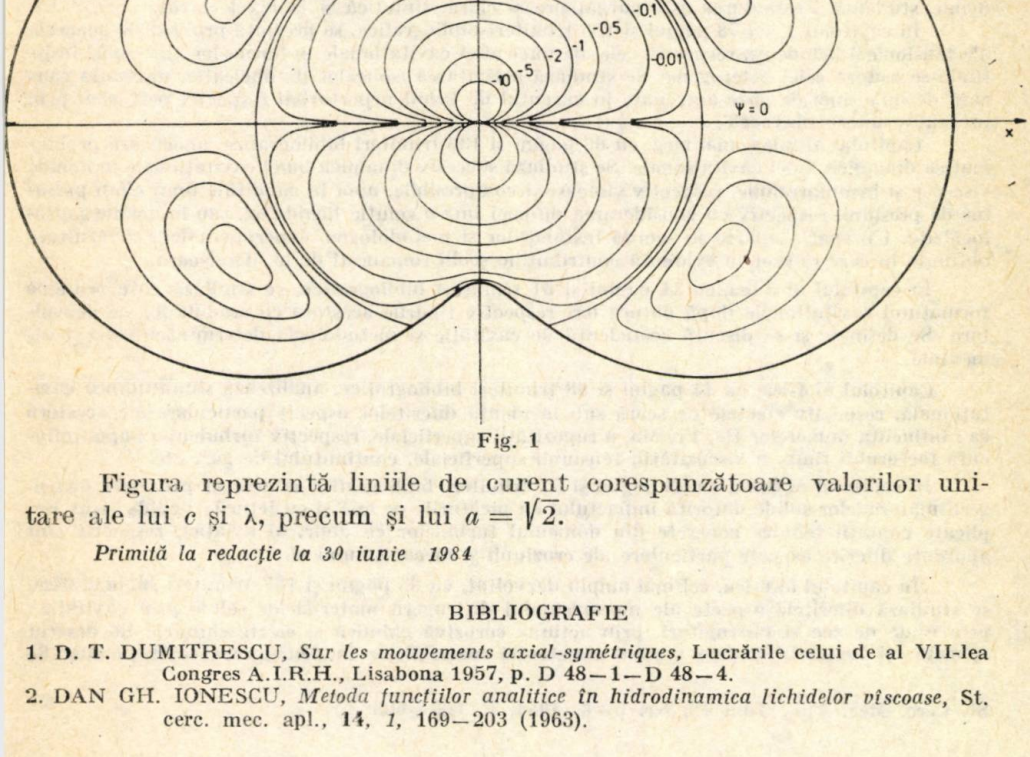


Fig. 1

Figura reprezintă liniile de curent corespunzătoare valorilor unitare ale lui c și λ, precum și lui $a = \sqrt{2}$.

Primită la redacție la 30 iunie 1984

BIBLIOGRAFIE

1. D. T. DUMITRESCU, *Sur les mouvements axial-symétriques*, Lucrările celui de al VII-lea Congres A.I.R.H., Lisabona 1957, p. D 48—1—D 48—4.
2. DAN GH. IONESCU, *Metoda funcțiilor analitice în hidrodinamica lichidelor vîscoase*, St. cerc. mec. apl., **14**, *1*, 169—203 (1963).

IOAN ANTON, *Cavitația*, Vol. I, București, Editura Academiei R.S. România, 1984, 338 p.

A apărut recent în Editura Academiei Republicii Socialiste România volumul I al tratatului CAVITAȚIA avînd ca autor pe acad. Ioan Anton, profesor la Institutul Politehnic din Timișoara.

Autorul este un prestigios cunoscător al domeniului, un cercetător de vază al acestuia, cunoscut în țară și peste hotare pentru aportul său fundamental. Conducător al școlii românești de cavitație înființată la Timișoara, el însuși autor al unor lucrări valoroase în domeniul cavitației cu implicații importante în activitatea de concepție a echipamentelor hidroenergetice, și-a luat sarcina dificilă de a redacta, la o amploare cerută de necesitate, primul tratat românesc de cavitație.

Volumul I al tratatului Cavitația are o extensiune de 338 pagini și este alcătuit pe șase capitole cu un total de 684 trimiteri bibliografice, organizate în același mod. Amploarea în sine a acestor trimiteri demonstrează, pe de o parte, frontul larg al investigării, iar, pe de altă parte, pătrunderea în profunzime a acesteia datorită apelației la esența informațiilor provenite îndeobște de la autori cunoscuți și consacrați ai domeniului. Se relevă cercetările proprii și cele ale școlii timișorene de cavitație.

Volumul I cu cele șase capitole abordează evantaiul concepțiilor cu caracter fundamental asupra fenomenului cavitațional privitor la incipiența și dezvoltarea sa, în interesul conexiunii sale cu cele mai variate domenii ale științei și tehnicii : fizica nucleației, implicațiile fenomenului în concepția și exploatarea echipamentelor și instalațiilor hidro sau termomecanice în ramurile energetice, chimice, petroliere ș. a. Cu toate acestea tratatul se prezintă într-o concepție unitară, sistematică, superioară sub acest raport unor lucrări similare pe plan mondial. El este unul dintre puținele de acest gen în lume și prima apărută în țara noastră, umplînd în mod firesc un gol prin informația largă, avizată, adresată unui număr mare de cititori interesați de cele mai variate categorii : oameni de știință, specialiști din diferite domenii, studenți. Prezentarea este curgătoare și clară, sintetică și la nivel elevat.

În capitolul 1, cu 78 pagini și 155 trimiteri bibliografice, se prezintă problemele generale ale tensionării lichidelor, respectiv cele ale nucleației cavitaționale în forma lor omogenă, insistîndu-se asupra celei heterogene. Se studiază activitatea centrelor de nucleație, nucleația cauzată de bule mici de gaze antrenate în curentul de lichid neperturbat respectiv perturbat prin prezența unor obstacole.

Capitolul al 2-lea, mai larg, cu 66 pagini și 136 trimiteri bibliografice, abordează problematica dinamicii bulei cavitaționale. Se studiază succesiv dinamica bulei cavitaționale în lichide viscoase și incompresibile, respectiv viscoase și compresibile, apoi în condițiile unui cîmp pulsator de presiuni, respectiv cu considerarea difuziei într-o soluție lichid-gaz, sau în lichide supraîncălzite. Un spațiu aparte se acordă instalațiilor și metodologiei experimentale cu rezultate obținute în care se scot în evidență contribuțiile școlii românești de la Timișoara.

În capitolul al 3-lea, cu 34 pagini și 61 trimiteri bibliografice, se studiază categoriile de formațiuni cavitaționale după natura lor, respectiv tipurile acestora cu stadiile lor de dezvoltare. Se definesc și se discută coeficienții de cavitație și metodologia determinării lor experimentale.

Capitolul al 4-lea, cu 44 pagini și 88 trimiteri bibliografice, analizează similitudinea cavitațională, respectiv efectele de scară sub incidența diferitelor aspecte particulare ale acestora ca : influența numerelor Re, Fr, Ma, a rugozității superficiale, respectiv turbulenței : apoi influența factorului timp, a viscozității, tensiunii superficiale, conținutului de gaz, etc.

În capitolul al 5-lea, cu 23 pagini și 57 trimiteri bibliografice se descriu procesele distrugerii materialelor solide datorită impactului cu picăturile de apă și cu jeturile lichide ; sînt implicate condiții tehnice concrete din domeniul turbinelor cu abur, al aviației, respectiv sînt abordate diferite aspecte particulare ale eroziunii și mecanismului ei.

În capitolul al 6-lea, cel mai amplu dezvoltat, cu 83 pagini și 187 trimiteri bibliografice, se studiază diferitele aspecte ale mecanismului distrugerii materialelor solide prin cavitație : prin unde de șoc și microjeturi, prin acțiune corozivă chimică și electrochimică. Se descriu aparate și instalații pentru studiul rezistenței materialelor la distrugerea cavitațională. Se

analizează diferite rezultate privind comportarea materialelor sub acțiunea distructivă a cavitației, respectiv se analizează corelarea caracteristicilor de distrugere cavitațională cu proprietățile mecanice ale materialelor, la care sînt implicate și unele modele matematice ale distrugerii.

Cititorul va găsi în tratatul Cavitația a acad. Ioan Anton toate informațiile aduse în actualitate ale domeniului; el devine astfel un prețios colaborator pentru studii și aplicații tehnice. Prin modul sistematic ordonat al prezentării, claritatea argumentării, a demonstrațiilor și analizei competente a unei varietăți foarte largi de rezultate, tratatul devine, mai ales pentru cercetătorii tineri, un exemplu de aprofundare științifică cu sprijinul unei vaste incursiuni bibliografice, un exemplu de ținută în activitatea de cercetare de care țara noastră are atîta nevoie.

IOSIF PREDA

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 43 1984

INDEX ALFABETIC

	Nr.	Pag.
ANGHEL, AL. v. POSEA, N.	3	223
ANTON, I., D. IONESCU, G. CĂLIN, Calculul pierderilor hidraulice într-o rețea plană de profile	5—6	439
ANTON, I., L. VÉKÁS, I. POTENCZ, D. BICA, Fluide magnetice: structura și unele aplicații	5—6	451
BĂGNARU, DAN v. BUCULEI, MIHAI	1	39
BĂRAN, GH. v. FLOREA, JULIETA	5—6	552
BICA, D. v. ANTON, I.	5—6	451
BLUMENFELD, M., E. MIHĂILESCU, N. CONSTANTIN, D.—M. ȘTEFĂNESCU, M. SOBEC, M. GĂVAN, Studiul distribuției tensiunilor în cilindrul unui compresor de înaltă presiune	4	367
BOLOG, CIPRIAN, v. CONSTANTINESCU, I. N.	4	326
BUCULEI, MIHAI, DAN BĂGNARU, Vibrații aleatoare la mecanisme R(RRT)	1	39
CARAFOLI, E., ȘT. STAICU, Aripa dreptunghiulară cu discuri laterale delta în regim supersonic	2	106
CARAFOLI, E. In memoriam	2	103
CAZACU, M., MONICA POPOVICI, Cercetări de laborator asupra energiei valurilor	5—6	573
CĂLIN G. v. ANTON, I.	5—6	439
CÂRDU, MIRCEA, Cu privire la influența absorbției prin perete asupra stratului limită la curgerea turbulentă cu cvasidesprindere	2	129
CIORNEI, I. M., E. N. DIACONESCU, Unele aspecte ale mișcării relative dintre elementele active ale variatoarelor elastohidrodinamice de turație	3	267
CONSTANTIN, N. v. BLUMENFELD, M.	4	367
CONSTANTINESCU, DORIN, TUDOR-VASILE HUNCKER, ION MOHORA, MARINEL PETRE, Metodă de calcul a îmbinărilor filetate cu umăr. I	4	392
CONSTANTINESCU, I. N., CIPRIAN BOLOG, Influența variațiilor de temperatură asupra frecvențelor proprii ale vibrațiilor unor plăci plane	4	326
CONSTANTINESCU, I. N. v. MUNTEANU, M. GH.	4	331
CONSTANTINESCU, N. V. v. GĂLEȚUȘE, S.	4	311
CONSTANTINESCU, V. N., S. DĂNĂILĂ, S. SÂRBU, Simularea aproximativă a mișcării supersonice în jurul unui avion	2	117
CREȚU, I., AL. D. STAN, Sondă parțial penetrantă a unui strat productiv	1	12
DAVID, I., Considerații asupra calculului hidraulic al conductelor cu debit variabil pe parcurs	5—6	564

DĂNĂILĂ, S. v. CONSTANTINESCU, V. N. 2 117
DĂRVĂREANU, ŞT. v. POSEA, N. 3 223
DIACONESCU, E. N. v. CIORNEI, I. 3 267
DUMITRESCU, D., V. IONESCU, Preocupări şi rezultate în problema mişcării fluidelor grele cu suprafaţă liberă . . . . . 5—6 430
ERHAN, A. v. SETEANU, I 3 238
ERHAN, M. v. SETEANU, I. 3 238
ERHAN, M. v. SETEANU, I. 4 317
FETECĂU, C., Mişcări torsionale staţionare ale fluidelor simple liniare . . . 3 207
FLOREA JULIETA, GH. BĂRAN, Cercetări experimentale asupra curgerii fluidelor bifazice în conducte verticale cu aplicare la instalaţiile de gaz lift . . . . . 5—6 552
GĂLETUŞE, S., A. SÂRBU, N. V. CONSTANTINESCU, Asupra stabilirii geometriei elicilor eoliene de mare putere 4 311
GĂVAN, M. v. BLUMENFELD, M. 4 367
GHERGU, MARIN v. POPA, LUCIA 1 30
GLADCOV, PETRE, Determinarea comparativă a capacităţii de aşchiere a sculelor, prin calcul numeric 2 189
GYÉRESI, ŞTEFAN, Cilindrul elastic în cîmp gravitaţional. I. Formularea problemei la limită 2 141
GYÉRESI, ŞTEFAN, Cilindrul elastic în cîmp gravitaţional. II. Rezolvarea numerică a problemei la limită 3 214
HUNCKER, TUDOR-VASILE v. CONSTANTINESCU, DORIN 4 392
IACOB, CAIUS, Asupra generalizării teoremei lui Lazare Carnot în cazul ciocnirii a două solide rigide libere . . . . . 5—6 422
IAMANDI, CONSTANTIN, Contribuţii la problema jeturilor fluide turbulente . . . . . 5—6 460
[IAMANDI, CONSTANTIN], Academicianul profesor Dumitru T. Dumitrescu 5—6 413
ILINCIOIU, DAN v. PETRESCU, GEORGE 1 94
IONESCU, D. v. ANTON, I. . . . . 5—6 439
IONESCU, DAN GH., O mişcare lentă creată de dipolul plan . . . . . 5—6 600
IONESCU, FLORIN, Modelarea matematică şi simularea numerică structurată a supapelor de limitare a presiunii 2 167
IONESCU, V. v. DUMITRESCU, D. . . . . 5—6 430
IONIŢĂ, ACHIM, Influenţa întîrzierii răspunsului asupra stabilităţii avionului relaxat static longitudinal 1 3
MARTIAN, IRONIM, Plăci plane circulare cu deformaţii mari 1 66
MIHĂILESCU, E. v. BLUMENFELD, M. 4 367
MOHORA, ION v. CONSTANTINESCU, DORIN 4 392
MUNTEANU, M. GH., I. N. CONSTANTINESCU, Asupra unor tipuri speciale de elemente finite 4 331
MUŞAT, SORIN DUMITRU, Un procedeu de determinare a modurilor proprii de vibraţii la sistemele vibrante cu deplasări de rigid 1 46
NEAGU, GABRIELA, F. POTERAŞU, D. VIERU, Sinteza optimală a unor mecanisme plane utilizate pentru transmiterea mişcării la sitele oscilante ale maşinilor de sortat seminţe 2 147
NEAMŢU, MIHAI, Contribuţia lui ELIE CARAFOLI la dezvoltarea teoriei aripilor cu jeturi laterale 3 201
NIŢĂ, M. M., V. PASCU, Cu privire la optimizarea mişcării verticale în mediu rezistent a unei rachete cu două trepte 4 291
[OROVEANU, T.], In Memoriam Elie Carafoli 2 103
PASCU, V. v. NIŢĂ, M. M. 4 291
PETRE, MARINEL v. CONSTANTINESCU, DORIN 4 392
PETRESCU, GEORGE, DAN ILINCIOIU, Eforturi în sisteme de bare concurente datorate inexactităţilor de execuţie 1 94
POPA, LUCIA, MARIN GHERGU, RADU, POPA Modelarea procesului de vidare la procedeul de turnare în forme vidate 1 30
POPA, O., Soluţionarea problemei mişcării homocore a fluidelor perfecte în prezenţa elicelor propulsive şi a rotoarelor eoliene . . . . . 5—6 512
POPA, RADU v. POPA, LUCIA 1 30
POPOVICI, ADRIAN, Consideraţii asupra analizei seismice tridimensionale a platformelor marine template 1 82

POPOVICI, MONICA, v. CAZACU, M. . . . . 5—6 573
POSEA, N., AL. ANGHEL, ŞT. DĂRVĂREANU, Algoritm şi program pentru calculul vibraţiilor la torsiune ale arborilor 3 223
POTENCZ. I. v. ANTON, I. . . . . 5—6 451
POTERAŞU, F. v. NEAGU, GABRIELA 2 147
PRIŞCU, RADU, DAN STEMATIU, Noi criterii de proiectare în domeniul marilor baraje . . . . . 5—6 542
SÂRBU, A. v. CONSTANTINESCU, V. N. 2 117
SÂRBU, A. v. GĂLEŢUŞE, S. 4 311
SETEANU, I., M. ERHAN, Exploatarea energetică a lacurilor de acumulare cuplate 4 317
SETEANU, I., M. ERHAN, A. ERHAN, Analiza neuniformităţii cîmpului de viteze în circuitul hidraulic al hidrogeneratoarelor de joasă cădere . . . 3 238
SOARE, MIRCEA, V., PETRE ŞUPROVICI. Asupra unei curbe funiculare 1 53
SOBEC, M. v. BLUMENFELD, M. 4 367
STAICU, ŞT., Generalizarea teoremelor lui Koenig şi aplicarea lor în dinamica mişcării relative a sistemelor 4 302
STAICU, ŞT. v. CARAFOLI, E. 2 106
STAN, AL. D. v. CREŢU, I. 1 12
STEMATIU, DAN v. PRIŞCU, RADU . . . . . 5—6 542
STOICESCU, AUREL P., Determinarea rapoartelor de transmitere ale schimbătorului de viteze ale autovehiculului după criteriul timpului minim de demarare 3 251
STOICESCU, AUREL P., Metodă numerică pentru studiul dinamicii tracţiunii autovehiculelor cu transmisie hidromecanică 4 379
ŞTEFĂNESCU, M. -D. v. BLUMENFELD, M. 4 367
ŞUPROVICI, PETRE v. SOARE, MIRCEA V. 1 53
TUCSNAK, MARIUS, O nouă demonstraţie a teoremei lui Cauchy 3 279
ŢAROG, DORIN, Structuri planare tridirecţionale. Analogia cu un mediu continuu echivalent. I 4 346
VÉKÁS, L. v. ANTON, I. . . . . 5—6 451
VIERU, D. v. NEAGU, GABRIELA 2 147

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică:

- Studii originale de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.
- Note (lucrări mai scurte cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni).
- Referate ştiinţifice şi tehnice, în care se expun stadiul actual al unei anumite probleme, subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.
- Recenzii asupra cărţilor române şi străine.

Domeniile de specialitate ale revistei sînt:

- Astrodinamica (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţii, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosfera rarefiată, în atmosfera densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).
- Aerodinamica (mecanica fluidelor, aerodinamica, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).
- Hidrodinamica (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).
- Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calcul al maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).
- Mecanica generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).
- Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, stabilitatea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).
- Tehnica măsurătorilor (aparate electrice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi izotopilor radioactivi în tehnică).

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

Manuscrisele se vor trimite la sediul Comitetului de redacţie, Bucureşti, 70701, str. Const. Mille nr. 15, sectorul 1.

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

ELIE CARAFOLI, V. N. CONSTANTINESCU, **Dinamica fluidelor compresibile**, 1984, 886 p., 68 lei.
IOAN ANTON, **Cavitația**, Vol. I, 1984, 338 p., 46 lei.
C. AVRAM, C. BOB, R. FRIEDRICH, V. STOIAN, **Structuri din beton armat. Metoda elementelor finite. Teoria echivalențelor**, 1984, 446 p., 47 lei.
IOAN I. MUNTEANU, **Structuri pentru construcții. Teorie și calcul**, Vol. II, 1984, 244 p., 22 lei.
A. PAVEL, **Elastostabilitatea recipientelor cilindrice**, 1983, 310 p., 26 lei.
SERGIU T. CHIRIACESCU, **Stabilitatea în dinamica aşchierii metalelor**, 1984, 188 p., 16,50 lei.
D. F. SĂMĂRESCU, **Difuzia cîmpului electromagnetic și aplicații**, 1983, 238 p., 20 lei.
DRAGOȘ CIOCLOV, **Recipiente sub presiune. Analiza stării de tensiune și deformație**, 1983, 354 p., 32 lei.
V. HANDRA-LUCA, **Funcțiile de transmitere în studiul mecanismelor**, 1983, 260 p., 20 lei.
IOAN I. MUNTEANU, **Structuri pentru construcții. Teorie și calcul, vol. I**, 1983, 198 p., 18 lei.
ȘTEFAN BĂLAN, VALERIU CRISTESCU, ION CORNEA (sub redacția), **Cutremurul de pămînt din România de la 4 martie 1977**, 1982, 516 p., 10 lei.
ALEXE MARINESCU, **Probleme optimale în dinamica zborului spațial**, 1982, 253 p., 20 lei.
GORUN MANOLESCU, **Abordarea ierarhic structurată și informatică**, 1982, 192 p., 14,50 lei.
VOICU DOLOCAN, **Fizica joncțiunilor cu semiconductoare**, 1982, 320 p., 30 lei.
A. CARABULEA, I. GH. CARABOGDAN, **Modele de bilanțuri energetice reale și optime**, 1982, 326 p., 39 lei.
DAN TEODORESCU, **Modele stohastice**, 1982, 246 p., 20 lei.
ELIE CARFOLI, V. N. CONSTANTINESCU, **Dinamica fluidelor incompresibile**, 1981, 630 p., 44 lei.
VALERIU PETCU, GEORGETA STĂNCULESCU, UMBERTO PANÇALDI, **Adaptabilitatea plastică a structurilor din beton armat**, 1981, 236 p., 12 lei.
GEORGE ȘT. ANDONIE, **Istoria științelor în România : Matematica, Mecanica, Astronomia**, 1981, 618 p., 9 lei.
LIVIU DUMITRAȘCU, IOACHIM ALEXANDRU, **Tehnici de construire a programelor cu structuri alternative**, 1981, 295 p., 20,40 lei.
TITUS PETRILĂ, **Modele matematice în hidrodinamica plană. Cercetări asupra influenței pereților nelimitați**, 1981, 239 p., 10,50 lei.
ION BOLDEA, **Vehicule pe pernă magnetică**, 1981, 283 p., 16 lei.
MIHAI FLORESCU, EDMOND NICOLAU, EUGENIU NICULESCU-MIZIL, **Istoria științelor în România. Cibernetica**, 1981, 229 p., 10,50 lei.
DAN MATEESCU, IOSIF APPELTAUER, EUGEN CUTEANU, **Stabilitatea la compresiune a structurilor din bare de oțel**, 1981, 327 p., 26 lei.
HRISTACHE POPESCU, VETURIĂ CHIROIU, **Calculul structurilor optimale**, 1981, 239 p., 20,50 lei.

REVISTE PUBLICATE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
REVUE ROUMAINE DES SCIENCES TECHNIQUES
– SÉRIE DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE
– SÉRIE D'ÉLECTROTECHNIQUE ET D'ÉNERGETIQUE

RM—ISSN 0039—4017

ST. CERC. MEC. APL., TOM 43, NR. 5—6, 1984, P. 411—606

I. P. Informația c. 2520

Lei 110.—

$ 62 pour un abonnement annuel